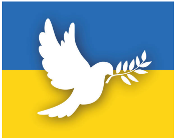
Estatística II

Aulas 18 a 22

Nelson Faustino [1]

[1]**Faculdade de Economia (FEUC)**
Universidade de Coimbra – Portugal

nelson@fe.uc.pt



Conteúdos

1 Teste de Hipóteses
- Hipóteses Estatística vs. Hipótese Paramétrica
- Dimensão e Potência do Teste
- Valor-p
- Teste de médias de populações normais
- Teste de variâncias de populações normais
- Teste assintóticos para a média

2 Exercícios Resolvidos
- Aula 18
- Aulas 19 & 20
- Aulas 21 & 22

3 Exercícios Extra-Aula

Aulas 18 a 22

Como irão funcionar

Aula 18

Introdução e noções fundamentais de teste de hipóteses.

Aulas 19 & 20

Aplicação do teste da média e da variância a **populações** $N(\mu, \sigma^2)$.

Aulas 21 & 22

Testes assintóticos a respeito da média, com recurso ao **Teorema do Limite Central.**

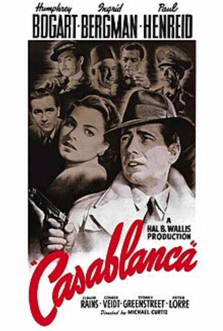


Figura: *'The fundamental things apply, as time goes by'*, citação retirada do **filme Casablanca (1945)**

Hipótese Estatística/Paramétrica

[Murteira et al. (2015), p. 464]

Conceitos Gerais

A partir da função distribuição $X \sim F(x|\theta)$ ou uma função [densidade de] probabilidade $X \sim f(x|\theta)$:

- **Hipótese Estatística:** qualquer conjectura sobre aspectos desconhecidos de $F(x|\theta)/f(x|\theta)$.
- **Hipótese Paramétrica:** qualquer conjectura sobre θ, assumindo que $F(x|\theta)$ e/ou $f(x|\theta)$ são **conhecidas**.
- **Teste de Hipóteses:** decidir com base na informação fornecida pelos dados, sobre a 'rejeição' ou 'não rejeição' de uma **hipótese paramétrica.**

Teste de Hipóteses

[Murteira et al. (2015), p. 465]

H_0 vs. H_1

Se $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ corresponde a uma **partição do espaço dos parâmetros** θ (i.e. $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$):

- **Hipótese Nula:** $H_0 \ : \ \theta \in \Theta_0$ corresponde à **hipótese que pretendemos testar**.
- **Hipótese Alternativa:** $H_1 \ : \ \theta \in \Theta_1$ corresponde à hipótese que nos fornece o **conjunto das alternativas** para θ.

Teste de Hipóteses

Regra que nos permite especificar um subconjunto W – **região de rejeição** – do espaço amostra X tal que:

- **Rejeita-se** H_0 – $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$;
- **Não se rejeita** H_0 – $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin W$.

Dimensão do Teste vs. Potência do Teste

[Murteira et al. (2015), p. 467–468]

- **Dimensão ou nível do teste:** Correponde à probabilidade condicional

$$\begin{aligned} \alpha &:= P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) \\ &= P((X_1, \ldots, X_n) \in W | \theta \in \Theta_0) \end{aligned}$$

- **Potência do Teste:** Correponde à probabilidade condicional

$$\begin{aligned} \beta &:= P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) \\ &= P((X_1, \ldots, X_n) \in W | \theta \in \Theta_1) \end{aligned}$$

- **Erro Primeira Espécie:** Probabilidade α;
- **Erro Segunda Espécie:** Probabilidade $1 - \beta$.

Dimensão e Potência do Teste

[Murteira et al. (2015), p. 468]

Probabilidade de erros $1^a/2^a$ espécie vs. decisões correctas

Decisão Tomada	H_0 **verdadeira**	H_0 **falsa**
Rejeitar H_0	Erro de 1^a espécie (prob. $=\alpha$)	Decisão correcta (prob. $=\beta$)
Não rejeitar H_0	Decisão correcta (prob. $=1-\alpha$)	Erro de 2^a espécie (prob. $=1-\beta$)

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin W$: **Não há motivo para rejeitar** H_0 a um nível de $\alpha \times 100\%$.
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$: **Deve-se rejeitar** H_0 a um nível de $\alpha \times 100\%$.

Valor-p

[Murteira et al. (2015), p. 487-490]

Valor-p

- **O que mede?** O nível de significância associado ao valor observado $t_{obs} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ da estatística T.
- **Como interpretar?** O valor-p dá-nos a probabilidade de obter $t_{obs} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou um outro mais desfavorável para a **hipótese nula** (H_0).
- **Como calcular?** Depende da hipótese alternativa (H_1).

Teste de Hipóteses

Regra para realizar **teste de hipóteses** vs. determinar **região de rejeição** (W) a um nível de significância de $\alpha \times 100\%$:

- **Rejeita-se** H_0 **–** $t_{obs} \in W \iff$ valor-p $< \alpha$;
- **Não se rejeita** H_0 **–** $t_{obs} \notin W \iff$ valor-p $\geq \alpha$.

Populações Normais

Estatísticas vs. Variáveis Fulcrais de Interesse

Populações Normais

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Média Amostral ($\overline{X}$)

$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

μ, σ^2 conhecidas
n conhecida/a estimar

Variância Amostral (S^2)

$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

n conhecida
σ^2 conhecida/a estimar

Rácio de Student ($\overline{X}$ vs. $(S')^2$)

$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S'} \sim t_{n-1}$

n conhecida
μ conhecida/a estimar

Variância Amostral Corrigida ($(S')^2$)

$\frac{(n-1)(S')^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

n conhecida
σ^2 conhecida/a estimar

Rácio de Student ($\overline{X}$ vs. S^2)

$\sqrt{n-1}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$

n conhecida
μ conhecida/a estimar

Testes de Hipóteses ($H_0 \ : \ \mu = \mu_0$)

H_1	**Rejeitar** H_0	**valor-p** (rejeitar H_0 se valor-p$< \alpha$)
$\mu > \mu_0$	$t_{obs} > q_{1-\alpha}$	$P(T \geq t_{obs} \mid \mu = \mu_0)$
$\mu < \mu_0$	$t_{obs} < q_{\alpha}$	$P(T \leq t_{obs} \mid \mu = \mu_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_{obs}\rvert > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2 \times P(T \geq \lvert t_{obs}\rvert \mid \mu = \mu_0)$

- **Variância Conhecida:** $T = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$.
- **Variância Desconhecida:** $T = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S'} \sim t_{n-1}$.

Teste de Variâncias

Populações Normais

Testes de Hipóteses ($H_0 \ : \ \sigma^2 = \sigma_0^2$)

H_1	**Rejeitar** H_0	**valor-p**
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$t_{obs} > q_{1-\alpha}$	$P(T \geq t_{obs} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$t_{obs} < q_{\alpha}$	$P(T \leq t_{obs} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$t_{obs} < q_{\frac{\alpha}{2}} \vee t_{obs} > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2 \times$ 'min. dos valores acima'

- **Estatística de Teste:** $T = \dfrac{(n-1)(S')^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Testes de Hipóteses

Regiões de Rejeição da forma $W = \{\overline{x} \ : \ \text{valor-p} < \alpha\}$

Variância Conhecida $\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)\right)$

$$t_{obs} = \sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}$$

- $H_1 \ : \ \mu > \mu_0$: $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma} > q_{1-\alpha} \iff \overline{x} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times q_{1-\alpha}$
- $H_1 \ : \ \mu < \mu_0$: $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma} < q_{\alpha} \iff \overline{x} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times q_{\alpha}$
- $H_1 \ : \ \mu \neq \mu_0$:

$$\left|\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\right| > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \iff$$

$$\iff \overline{x} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times q_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \vee \ \overline{x} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times q_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Variância Desconhecida $\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{S'} \sim t_{n-1}\right)$

$$t_{obs} = \sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu_0}{s'}$$

- $H_1 \ : \ \mu > \mu_0$: $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu_0}{s'} > q_{1-\alpha} \Longleftrightarrow \overline{x} > \mu_0 + \frac{s'}{\sqrt{n}} \times q_{1-\alpha}$
- $H_1 \ : \ \mu < \mu_0$: $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu_0}{s'} < q_{\alpha} \Longleftrightarrow \overline{x} < \mu_0 + \frac{s'}{\sqrt{n}} \times q_{\alpha}$
- $H_1 \ : \ \mu \neq \mu_0$:

$$\left|\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu_0}{s'}\right| > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \overline{x} < \mu_0 - \frac{s'}{\sqrt{n}} \times q_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \vee \ \overline{x} > \mu_0 + \frac{s'}{\sqrt{n}} \times q_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Testes de Hipóteses

Regiões de Rejeição da forma $W = \{(s')^2 \;:\; \text{valor-p} < \alpha\}$

$$\frac{(n-1)(S')^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1} \longrightarrow t_{obs} = \frac{(n-1)(s')^2}{\sigma_0^2}$$

- $H_1 \;:\; \sigma^2 > \sigma_0^2$: $\dfrac{(n-1)(s')^2}{\sigma_0^2} > q_{1-\alpha} \Longleftrightarrow (s')^2 > \dfrac{\sigma_0^2}{n-1} \times q_{1-\alpha}$
- $H_1 \;:\; \sigma^2 < \sigma_0^2$: $\dfrac{(n-1)(s')^2}{\sigma_0^2} < q_{\alpha} \Longleftrightarrow (s')^2 < \dfrac{\sigma_0^2}{n-1} \times q_{\alpha}$
- $H_1 \;:\; \sigma^2 \neq \sigma_0^2$:

$$\frac{(n-1)(s')^2}{\sigma_0^2} > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \;\vee\; \frac{(n-1)(s')^2}{\sigma_0^2} < q_{\frac{\alpha}{2}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (s')^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1} \times q_{1-\frac{\alpha}{2}} \;\vee\; (s')^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1} \times q_{\frac{\alpha}{2}}$$

Populações Normais

Hipótese Nula (H_0) vs. Estatística de Teste

Média Amostral ($\overline{X}$)

$\overline{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$

$H_0 \;:\; \mu = \mu_0$
n, σ^2- conhecidas

Populações Normais

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Rácio de Student
($\overline{X}$ vs. $(S')^2$)

$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_0}{S'} \sim t_{n-1}$

$H_0 \;:\; \mu = \mu_0$
$n-$ conhecida
σ^2- desconhecida

Variância Amostral Corrigida ($(S')^2$)

$\frac{(n-1)(S')^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$H_0 \;:\; \sigma^2 = \sigma_0^2$
$n-$ conhecida

Teorema do Limite Central

Amostras casuais envolvendo distribuições discretas

$\overline{X} \dot{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

- **Bernoulli** $X \sim B(1,\theta)$
  - $n\overline{X} \sim B(n,\theta)$
  - $\mu = \theta$
  - $\sigma^2 = \theta(1-\theta)$
- **Geométrica** $X \sim BN(1,\theta)$
  - $n\overline{X} \sim BN(n,\theta)$
  - $\mu = \frac{1}{\theta}$
  - $\sigma^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2}$
- **Poisson** $X \sim Po(\lambda)$
  - $n\overline{X} \sim Po(n\lambda)$
  - $\mu = \lambda$
  - $\sigma^2 = \lambda$

Teste de médias assintóticos

Teorema do Limite Central

Testes de Hipóteses ($H_0 \ : \ \mu = \mu_0$)

H_1	**Rejeitar** H_0	**valor-p** (rejeitar H_0 se valor-p$< \alpha$)
$\mu > \mu_0$	$t_{obs} > q_{1-\alpha}$	$\approx P(T \geq t_{obs} \mid \mu = \mu_0)$
$\mu < \mu_0$	$t_{obs} < q_{\alpha}$	$\approx P(T \leq t_{obs} \mid \mu = \mu_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_{obs}\rvert > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\approx 2 \times P(T \geq \lvert t_{obs}\rvert \mid \mu = \mu_0)$

- **Variância Conhecida:** $T = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \dot{\sim} N(0,1)$.
- **Variância Desconhecida:** $T = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S'} \dot{\sim} N(0,1)$.

Conteúdos

Exercícios Resolvidos

Exercício 1., p. 527

[Murteira et al. (2015), Exercício 1, p. 527]

Alguns comentários:

- **a)** $\mu = 3$ trata-se de uma **hipótese estatística**;
- **b)** $\overline{x} = 4$ refere-se uma estimativa para a média amostral. Logo **não pode ser considerada como hipótese estatística**;
- **c)** $P(X < 2.5) = 0.4$ **trata-se de uma hipótese estatística**, já que a probabilidade $P(X < 2.5)$ está associada à função distribuição;
- **d)** $2 < \sigma < 3$ trata-se de uma **hipótese estatística**;
- **e)** $\overline{X} < 3$ refere-se uma condição imposta à média amostral, pelo que **não pode ser considerada como hipótese estatística**. No entanto, **se tivéssemos considerado** p.e. $P(\overline{X} < 3) = 1$ já teríamos uma hipótese estatística.

[Murteira et al. (2015), Exercício 15, p. 531]

a) **Verdadeiro**, pois para $X \sim Po(\lambda)$ se tem $Pr(X=0)=0.8 \iff e^{-\lambda}=0.8$;

b) **Verdadeiro**, pois se a hipótese nula (H_0) é rejeitada com um erro de 1ª espécie igual a 10%, então **é rejeitada para todos os testes** com dimensão $\alpha \times 100\% \leq 10\%$ $(5\% < 10\%)$;

c) **Falso.** A afirmação correcta seria

$$\overbrace{P(\text{Rej. } H_0|H_0)}^{=\alpha}+\overbrace{P(\text{Não Rej. } H_0|H_0)}^{=1-\alpha}=1;$$

d) **Verdadeiro,** uma vez que a potência de teste, definida por $\beta := P(\text{rejeitar } H_0|H_0 \text{ falsa})$, dá-nos uma decisão correcta [para $\beta=0.3$] (ver [Murteira et al. (2015), p. 468, Quadro 8.2]);

e) **Verdadeiro,** pois a região de rejeição (W) está definida implicitamente em termos da hipótese nula (H_0).

Exercícios Resolvidos

Exercício 16., página 531

Formulação 16.

O enunciado do exercício diz-nos claramente que:

1. Estamos perante uma população $X \sim N(\mu, 4)$ ($\sigma = 2-$conhecida)
2. $W = \{\overline{x} \ : \ \overline{x} < 74.1\}$ é a **região de rejeição** para $H_0 \ : \ \mu = 75$ (amostra casual de dimensão $n = 10$).

Exercício 16. a)

Dado que $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{4}{10})$, a dimensão do teste corresponde a

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\overline{X} \in W | H_0 \text{ verdadeira}) \\ &= P(\overline{X} < 74.1 | \mu = 75) \\ &= \Phi\left(\frac{74.1 - 75}{\sqrt{\frac{4}{10}}}\right) \quad [\ \texttt{> pnorm(74.1,75,sqrt(4/10))}\ ]\end{aligned}$$

Exercício 16. b)

Dado que $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{4}{10})$, a potência do teste corresponde a

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\overline{X} \in W | H_0 \text{ falsa}) \\
&= P(\overline{X} < 74.1 | \mu < 75) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{4}{10}}} < \frac{74.1 - \mu}{\sqrt{\frac{4}{10}}} \mid \mu < 75\right)
\end{aligned}$$

- **Potência de teste para $\mu = 74$:**

```
> pnorm(74.1,74,sqrt(4/10))
```

- **Potência de teste para $\mu = 72.5$:**

```
> pnorm(74.1,72.5,sqrt(4/10))
```

[Murteira et al. (2015), Exercício 22, p. 532]

a) **Verdadeiro**, pois o valor-p (0.078) é superior à dimensão do teste ($\alpha = 0.05$).
[seria falso se a dimensão do teste fosse p.e. $\alpha = 0.1$].

b) **Falso**. Apenas se rejeita a hipótese nula (H_0) no caso de 'valor-p'$\leq \alpha$, onde α denota a **dimensão do teste**.
[i.e. aumentar/reduzir o valor-p apenas em nada tem a ver com aumentar/diminuir a dimensão do teste].

c) **Verdadeiro**, pois $P(\overline{X} \leq \overline{x} | \mu = \mu_0) = 1 - P(\overline{X} > \overline{x} | \mu = \mu_0)$ é a probabilidade que define o valor-p ($= 0.05$).

d) **Verdadeiro**, pois o valor-p apenas depende do t_{obs} relativamente à estatística de teste $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
[No caso do item **c)** $t_{obs} = \overline{x}$ e $T = \overline{X}$].

Formulação 24.

De acordo com as informações do enunciado do exercício:

1. Estamos perante uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\mu, \sigma -$ desconhecidos).
2. $H_0 \ : \ \mu = 0.5$ vs. $H_0 \ : \ \mu < 0.5$ é o **teste de hipóteses** que decorre da afirmação

   'teor médio da acidez não ultrapassa 0.5 **g/l'**.

3. **Em 24.b)** Conhecendo a dimensão da amostra ($n = 20$), a **média amostral** ($\overline{x} = 0.7$) e o **desvio padrão corrigido** ($s' = 0.08$), a **estatística de teste** a ser considerada é

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - 0.5}{S'} \sim t_{n-1}.$$

Resolução 24. a)

Sendo $t_{obs} = \sqrt{20}\dfrac{\overline{x} - 0.5}{s'}$ retira-se do teste de hipóteses

$$H_0 \ : \ \mu = 0.5 \text{ vs. } H_1 \ : \ \mu < 0.5$$

que, para uma dimensão de teste α, **rejeita-se** H_0 sempre que $t_{obs} < q_\alpha$.

Resolução 24. b) em R – aceitar H_0

- $t_{obs} = 11.18034$ **(sempre superior a $q_\alpha = -q_{1-\alpha} < 0$):**

```
> sqrt(20)*(0.7-0.5)/(0.08)
```

- **Valor-p:** $P(T \leq t_{obs}|\mu = 0.5)$

```
> tobs<-sqrt(20)*(0.7-0.5)/(0.08)
> pt(tobs,19)
[1] 1
```

Formulação 25. a)

1. **Teste de hipóteses** a ser considerado é

$$H_0 \;:\; \mu = 750 \text{ vs. } H_1 \;:\; \mu \neq 750$$

2. $X \sim N(\mu, (125)^2)$ é a população considerada, e $n = 36$ a dimensão da amostra.

Resolução Exercício 25. a)

Sendo $T = \sqrt{36}\dfrac{\overline{X} - 750}{125} \sim N(0,1)$ a **estatística de teste** a ser considerada, retira-se que H_0 é rejeitada para uma dimensão de teste de $\alpha = 0.05$ $(1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975)$, sempre que $|t_{obs}| > q_{0.975}$. Logo, a **região de rejeição** é igual a

$$W = \left\{\overline{x} \;:\; \overline{x} > 750 + \frac{125}{6} q_{0.975}\right\} \cup \left\{\overline{x} \;:\; \overline{x} < 750 - \frac{125}{6} q_{0.975}\right\}.$$

Exercícios Resolvidos

Exercício 25., página 533

Formulação 25.b)

Conhecidos os valores $\overline{x} = 800$ e $(s')^2 = 62000$ da amostra, é legítimo calcular $valor - p = 2 \times P(T \geq |t_{obs}| \mid \mu = 750)$ de duas formas distintas ($T \sim N(0,1)$ **está de acordo com as soluções do livro**).

Resolução Exercício 25.b)

- **Valor-p:** $T = \sqrt{36}\dfrac{\overline{X} - 750}{125} \sim N(0,1)$ **(resolução correcta)**

```
> tobs<-sqrt(36)*(800-750)/125
> 2*(1-pnorm(tobs))
[1] 0.01639507
```
(rejeitaria H_0 maioria dos casos)

- **Valor-p:** $T = \sqrt{36}\dfrac{\overline{X} - 750}{S'} \sim t_{35}$ **(resolução errada)**

```
> tobs<-sqrt(36)*(800-750)/sqrt(62000)
> 2*(1-pt(tobs,35))
[1] 0.2363531
```
(não rejeitaria H_0)

Resolução 25. c)

Sendo $t_{obs} = \dfrac{35(s')^2}{(125)^2}$ $(n-1=35 \;\&\; \sigma_0^2=(125)^2)$ retira-se do teste de hipóteses [por $(s')^2 = 62000 > 15625 = (125)^2$]:

$$H_0 \;:\; \sigma^2 = (125)^2 \text{ vs. } H_1 \;:\; \sigma^2 > (125)^2$$

que, para uma dimensão de teste α, **rejeita-se** H_0 sempre que $t_{obs} > q_{1-\alpha}$.

Resolução 25. c) em R – rejeitar H_0

- $t_{obs} = 138.88$ **(muito elevado):** `> (35*62000)/(125)^2`
- **Valor-p:** $P(T \geq t_{obs} | \sigma^2 = (125)^2)$

```
> tobs<-(35*62000)/(125)^2
> 1-pchisq(tobs,35)
[1] 2.58682e-14
```

Formulação 28. a)

O enunciado do exercício diz-nos claramente que:

1. Estamos perante uma população $X \sim N(10, \sigma^2)$ ($\mu = 10-$conhecida)
2. $W = \{(s')^2 \ : \ (s')^2 > 0.8\}$ é a **região de rejeição** para $H_0 \ : \ \sigma^2 = 0.5$ (amostra casual de dimensão $n = 20$).

Exercício 28. a) – Formulação do Teste de Hipóteses

$$H_0 \ : \ \sigma^2 = 0.5 \text{ vs. } H_1 \ : \ \sigma^2 > 0.5$$

é o teste de hipóteses associada à **região de rejeição** W.
Rejeita-se H_0 com um **nível de significância** de $\alpha \times 100\%$ se

$$(s')^2 > 0.8 \iff \left(t_{obs} =\right)\frac{19(s')^2}{0.5} > \frac{19\times 0.8}{0.5}\left(= q_{1-\alpha}\right).$$

Resolução 28. a) em R – cálculo da dimensão do teste

- $q_{1-\alpha} = 30.4$: `> 19*0.8/0.5`
- **Valor de α:** $1-\alpha = P\left(\frac{19(S')^2}{0.5} \leq q_{1-\alpha}\right)$, com $\frac{19(S')^2}{0.5} \sim \chi^2_{19}$.

```
> q<-19*0.8/0.5
> 1-pchisq(q,19)
[1] 0.04692334
```

Formulação 28. b)

Teremos de considerar a **Estatística** $T = \frac{19(S')^2}{0.66} \sim \chi^2_{19}$ (estamos a assumir que $\sigma^2 = 0.66$) para **calcular a probabilidade**

$$P((S')^2 > 0.5) = 1 - P((S')^2 \leq 0.5)$$

Obs: $P((S')^2 \leq 0.5)$ dá-nos a **probabilidade** da máquina estar afinada – variância não deve ultrapassar 0.5.

Exercícios Resolvidos

Exercício 28., página 534

Resolução 28. b)

Para $T = \frac{19(S')^2}{0.66} \sim \chi^2_{19}$, temos

$$P((S')^2 > 0.5) = P\left(\frac{9(S')^2}{0.66} > \frac{9 \times 0.5}{0.66}\right) = 1 - P\left(T \leq \frac{9 \times 0.5}{0.66}\right)$$

Resolução 28. b) em R

- **Cálculo** $P((S')^2 > 0.5)$

```
> q<-19*0.5/0.66
> 1-pchisq(q,19)
[1] 0.7602614
```

Formulação 39. – dados do problema

1. Conjectura-se no enunciado que $\mu \leq 275$ – **número médio** de km **não ultrapassa** os 275;
2. $n = 500$ é a **dimensão da amostra** (500 alugueres) ;
3. $\overline{x} = 278.5$ é a **média da amostra** e $(s')^2 = 6430.5$ a **variância corrigida da amostra**.

Formulação 39. – teste de hipóteses

Considere-se o **teste de hipóteses** $H_0 \ : \ \mu \leq 275$ vs. $H_1 \ : \ \mu > 275$

ou $H_0 \ : \ \mu = 275$ vs. $H_1 \ : \ \mu > 275$

de **dimensão** $\alpha = 0.05$. A **rejeição de** H_0 $[t_{obs} > q_{1-\alpha}]$ vai contra o que é assumido. Por outras palavras, a **aceitação** de H_0 corrobora o que conjecturado no enunciado – não ser necessário proceder à de revisão da tarifa diária.

Exercícios Resolvidos

Exercício 39., página 538

Estatística de Teste do Exercício 50.

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S'}\sqrt{n} \overset{H_0:\mu=275}{=} \frac{\overline{X} - 275}{S'}\sqrt{500} \dot{\sim} N(0,1)$$

Resolução Exercício 39. via t_{obs}:

```
> tobs<-(278.5-275)/sqrt(6430.5)*sqrt(500)
> tobs
[1] 0.975957
```

`> qnorm(0.95)` (Valor $q_{1-\alpha}$ para $\alpha = 0.05$)

`[1] 1.644854` (superior a `tobs`)

`> tobs>qnorm(0.95)` (critério para rejeitar H_0)

`[1] FALSE` (não rejeitamos H_0 de acordo com o output)

Exercícios Resolvidos

Exercício 39., página 538

Estatística de Teste do Exercício 39.

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S'}\sqrt{n} \overset{H_0:\mu=275}{=} \frac{\overline{X} - 275}{S'}\sqrt{500} \overset{.}{\sim} N(0,1)$$

Resolução Exercício 39. via valor-p$= P(T \geq t_{obs} | \mu = 275)$:

```
> tobs<-(278.5-275)/sqrt(6430.5)*sqrt(500)
> 1-pnorm(tobs)
```
(valor-p)

```
[1] 0.1645429
```
(superior a $\alpha = 0.05$)

```
> 1-pnorm(tobs)<0.05
```
(critério para rejeitar H_0)

```
[1] FALSE
```
(não rejeitamos H_0 de acordo com o output)

Exercícios Resolvidos

Exercício 44., página 539

Formulação 44. a)

Está implícito no enunciado que:

1. Estamos perante uma população de Bernoulli $X \sim B(1, \theta)$, onde θ – probabilidade do **grau de insatisfação**.
2. $W = \{\overline{x} \ : \ \overline{x} > \frac{14}{100}\}$ é a **região de rejeição**, onde $\overline{x}$ corresponde à média de clientes insatisfeitas para uma amostra de dimensão $n = 100$.

Exercício 44. a) – Formulação do Teste de Hipóteses

Sendo $\mu = 0.10$ $(=10\%)$ o limite considerado para os **clientes insatisfeitos**, a **região de rejeição** (W) conduz-nos ao teste de hipóteses $H_0 \ : \ \theta = 0.10$ vs. $H_1 \ : \ \theta > 0.10$.
A partir destas informações pretende-se determinar

$$\alpha = P(\overline{X} \in W \mid H_0 \text{ verdadeira})$$ – **dimensão do teste**.

Exercícios Resolvidos

Exercício 44., página 539

Resolução 44. a) – Aplicação do Teorema do Limite Central

Para $X \sim B(1,\theta)$ tem-se $\mu := E(X) = \theta$ e $\sigma^2 := V(X) = \theta(1-\theta)$. Logo, para uma amostra de dimensão $n = 100$, a aplicação do **Teorema do Limite Central** conduz-nos à distribuição assintótica

$$\overline{X} \dot{\sim} N\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{100}\right).$$

Exercício 16. a)

Sendo $T = \dfrac{\overline{X} - 0.10}{\sqrt{\frac{0.10 \times 0.90}{100}}} = \dfrac{\overline{X} - 0.10}{0.03}$ a **estatística de teste** associada a H_0, tem-se $\alpha = P(\overline{X} \in W | H_0 \text{ verdadeira})$ é igual a

$$\alpha = P\left(\overline{X} > \frac{14}{100} | \theta = 0.10\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.14 - 0.10}{0.03}\right).$$

Exercícios Resolvidos

Exercício 44., página 539

Dimensão do Teste do Exercício 44. a)

$$\alpha = P\left(\overline{X} > \frac{14}{100} | \theta = 0.10\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.14 - 0.10}{0.03}\right).$$

Estatística de Teste do Exercício 44. a)

$$T = \frac{\overline{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \overset{H_0:\theta=0.10}{=} \frac{\overline{X} - 0.10}{0.03} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

Resolução Exercício 44. a) em R:

```
> q<-(0.14-0.10)/0.03
> 1-pnorm(q) (valor de α)
[1] 0.09121122
```

Estatística de Teste do Exercício 44. b)

$$T=\frac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{100}}}\overset{\theta=0.15}{=}\frac{\overline{X}-0.15}{\sqrt{0.01275}}\dot{\sim}N(0,1)$$

Potência do Teste do Exercício 44. b)

$$\theta=0.15\Longrightarrow\beta=P\left(\overline{X}>\frac{14}{100}|\theta=0.15\right)=P\left(T>\frac{0.14-0.15}{\sqrt{0.01275}}\right).$$

Resolução Exercício 44. a) em R:

```
> q<-(0.14-0.15)/sqrt(0.01275)
> 1-pnorm(q) (valor de β)
[1] 0.5352848
```

Formulação 50. – dados do problema

1. O **número de acidentes por semana** é descrito pela v.a. $X \sim Po(\lambda)$;
2. $\overline{x} = \frac{170}{104}$ é o **número médio de acidentes** para uma **amostra** de dimensão $n = 104$ (semanas);
3. $\alpha = 0.05$ é a **dimensão do teste**.

Formulação 50. – teste de hipóteses

Considere-se o **teste de hipóteses** $H_0 \ : \ \lambda \geq 2$ vs. $H_1 \ : \ \lambda < 2$

ou $H_0 \ : \ \lambda = 2$ vs. $H_1 \ : \ \lambda < 2$

de **dimensão** $\alpha = 0.05$. A **rejeição de** H_0 $[t_{obs} < q_\alpha]$ dá-nos a negação do que é assumido no enunciado. Por outras palavras, a **aceitação** de H_0 corrobora o que número médio de acidentes é de pelo menos 2 ($\lambda \geq 2$).

Exercícios Resolvidos

Exercício 50., página 541

Estatística de Teste do Exercício 50.

$$T = \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \overset{H_0:\lambda=2}{=} \frac{\overline{X} - 2}{\sqrt{2}}\sqrt{104} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

Resolução Exercício 50. via t_{obs}:

```
> x<-170/104
> tobs<-(x-2)/sqrt(2)*sqrt(104)
> tobs
[1] -2.634826
> qnorm(0.05)
[1] -1.644854 (superior a tobs)
> tobs<qnorm(0.05) (critério para rejeitar H0)
[1] TRUE (rejeitamos H0 de acordo com o output)
```

Exercícios Resolvidos

Exercício 50., página 541

Estatística de Teste do Exercício 50.

$$T = \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \overset{H_0:\lambda=2}{=} \frac{\overline{X} - 2}{\sqrt{2}}\sqrt{104} \dot{\sim} N(0,1)$$

Resolução Exercício 50. via valor-p$= P(T \leq t_{obs}|\lambda = 2)$:

```
> x<-170/104
> tobs<-(x-2)/sqrt(2)*sqrt(104)
> pnorm(tobs)
```
(valor-p para o nosso teste de hipóteses)

```
[1] 0.004209022
```
(inferior a $\alpha = 0.05$)

```
> pnorm(tobs)<0.05
```
(critério para rejeitar H_0)

```
[1] TRUE
```
(rejeitamos H_0 de acordo com o output)

Conteúdos

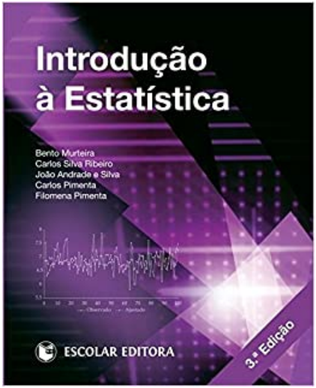
Exercícios Propostos

Complemento da Aula 18

Introdução & Noções Fundamentais

- **págs. 527–531:**
  2., 3., 4., 5., 14.

Murteira, B., C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta, F. Pimenta (2015), **Introdução à Estatística, 3ª Edição**', Escolar Editora.

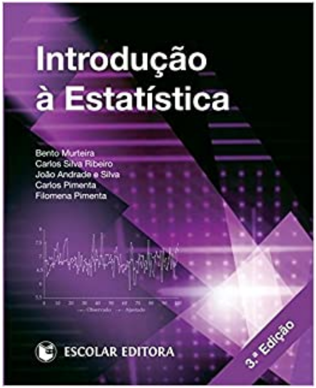


Exercícios Propostos

Complemento das Aulas 19 & 20

Testes de Média e Variância

- **págs. 532–535:**
  2., 21., 23., 26., 27., 29., 30.



Exercícios Propostos

Complemento das Aulas 21 & 22

Testes Assintóticos da Média

- **págs. 538–541:**
  40., 41., 46., 51., 52.