



# **Matemática I**

## **Edição Quadrivium**

**Licenciatura em Gestão**

FACULDADE DE ECONOMIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA (FEUC)

Copyright © 2020,2021

Jorge Marques, Nelson Faustino & Nuno Baeta (2020)  
Nelson Faustino (2021)

*Última versão, 5 de abril de 2022*

## Sumário

### I Funções Reais de Uma Variável Real

<b>1</b>	<b>Funções Elementares e Gráficos</b>	<b>15</b>
1.1	Revisão de Geometria Analítica	15
1.1.1	Referencial Cartesiano	15
1.1.2	Rectas: equações de rectas	17
1.1.3	Curvas: equações de circunferências e parábolas	23
<b>1.2</b>	<b>Definições, Representações e Aplicações</b>	<b>26</b>
1.2.1	Representação Analítica: Domínio e Contradomínio	26
1.2.2	Representação Geométrica: Gráfico	27
1.2.3	Aplicação em Economia - Leis da procura e da oferta	32
<b>1.3</b>	<b>Propriedades de Funções: Abordagens Analítica e Gráfica</b>	<b>33</b>
1.3.1	Injectividade e Sobrejectividade	33
1.3.2	Zeros e Sinal	35
1.3.3	Paridade e Simetria	40
1.3.4	Periodicidade e Limitação	43
1.3.5	Monotonia e Concavidades	47
<b>1.4</b>	<b>Operações e Transformações</b>	<b>52</b>
1.4.1	Igualdade e Restrição	52
1.4.2	Soma, Produto e Quociente	52
1.4.3	Função Composta	54
1.4.4	Transformações de Gráficos	58
1.4.5	Função Inversa e Gráfico	69
<b>1.5</b>	<b>Directório: Funções Algébricas e Funções Transcendentais</b>	<b>73</b>
1.5.1	Funções Polinomiais	74
1.5.2	Funções Racionais	76

1.5.3	Funções Irracionais .....	77
1.5.4	Funções Exponenciais .....	78
1.5.5	Funções Hiperbólicas .....	81
1.5.6	Funções Logarítmicas .....	83
1.5.7	Função Exponencial-Potência .....	85
1.5.8	Funções Trigonométricas .....	87
1.5.9	Funções Trigonométricas Inversas .....	90
<b>1.6</b>	<b>Recursos Complementares</b>	<b>99</b>
<b>1.7</b>	<b>Exercícios Propostos</b>	<b>100</b>
<b>2</b>	<b>Limites e Continuidade</b>	<b>103</b>
<b>2.1</b>	<b>Limites</b>	<b>103</b>
2.1.1	Definições e Exemplos .....	103
2.1.2	Existência e Unicidade de Limite .....	105
2.1.3	Assíntotas .....	109
2.1.4	Propriedades e Resultados .....	117
2.1.5	Teorema do Enquadramento e Aplicações .....	122
2.1.6	Cálculo de limites usando substituição .....	130
2.1.7	Cálculo de limites no infinito .....	132
<b>2.2</b>	<b>Continuidade</b>	<b>133</b>
2.2.1	Definições: Continuidade num ponto .....	133
2.2.2	Funções contínuas em intervalos .....	134
2.2.3	Propriedades e Resultados .....	135
2.2.4	Zeros e extremos de funções contínuas .....	135
<b>2.3</b>	<b>Exercícios Propostos</b>	<b>141</b>
<b>3</b>	<b>Derivadas e Aplicações</b>	<b>143</b>
<b>3.1</b>	<b>A derivada da função no ponto e interpretação geométrica</b>	<b>143</b>
3.1.1	Existência de derivada vs. diferenciabilidade .....	143
3.1.2	Derivadas laterais .....	145
3.1.3	Diferenciabilidade vs. Continuidade .....	147
3.1.4	Interpretação Geométrica do Conceito de Derivada .....	149
<b>3.2</b>	<b>Derivadas de funções elementares</b>	<b>153</b>
3.2.1	Operações envolvendo derivadas .....	154
3.2.2	Derivadas da função composta e da função inversa .....	155
3.2.3	Derivadas de potências .....	160
3.2.4	Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas .....	161
3.2.5	Derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas .....	163
3.2.6	Tabela de derivadas .....	166
<b>3.3</b>	<b>Funções regulares</b>	<b>166</b>
3.3.1	Teoremas de Rolle e Lagrange .....	166
3.3.2	Funções monótonas .....	167
3.3.3	Aproximação linear e diferencial de uma função .....	168
<b>3.4</b>	<b>Derivadas de 2<sup>a</sup> ordem e Derivadas de ordem superior</b>	<b>173</b>
<b>3.5</b>	<b>Cálculo de limites usando derivadas: a Regra de L' Hôpital</b>	<b>174</b>
3.5.1	Limites envolvendo indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ .....	175
3.5.2	Limites envolvendo indeterminações do tipo $\infty - \infty$ .....	175
3.5.3	Limites envolvendo indeterminações do tipo $0 \times \infty$ .....	176

3.5.4	Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital . . . . .	176
3.5.5	Limites envolvendo a função exponencial-potência . . . . .	177
<b>3.6</b>	<b>Extremos Relativos e Absolutos</b>	<b>178</b>
3.6.1	Estudo de pontos críticos/estacionários . . . . .	179
3.6.2	Determinação e classificação de extremos relativos . . . . .	180
3.6.3	Determinação de extremos absolutos num intervalo fechado . . . . .	181
<b>3.7</b>	<b>Esboço de gráficos baseado no estudo completo de funções</b>	<b>182</b>
<b>3.8</b>	<b>Aplicações: Taxas de Variação em Economia</b>	<b>182</b>
3.8.1	O Princípio da Minimização do Custo Médio . . . . .	182
3.8.2	O Princípio da Maximização do Lucro . . . . .	184
3.8.3	Elasticidade Preço da Procura . . . . .	185
3.8.4	Tempo de Retenção Ideal em Compra e Venda de Imóveis . . . . .	185
<b>3.9</b>	<b>Exercícios Propostos</b>	<b>187</b>
<b>4</b>	<b>Primitivação . . . . .</b>	<b>191</b>
<b>4.1</b>	<b>Definições e propriedades</b>	<b>191</b>
<b>4.2</b>	<b>Regras de Primitivação Imediata</b>	<b>196</b>
4.2.1	Exemplos . . . . .	197
4.2.2	Tabela de Primitivação Imediata . . . . .	202
4.2.3	Regras de Primitivação Imediata Generalizadas . . . . .	203
<b>4.3</b>	<b>Primitivação envolvendo composição de funções</b>	<b>204</b>
4.3.1	Primitivação envolvendo a derivada logarítmica . . . . .	205
4.3.2	Primitivação de funções potência . . . . .	206
4.3.3	Primitivação de funções exponenciais . . . . .	208
4.3.4	Tabela de Primitivação Generalizada . . . . .	209
<b>4.4</b>	<b>Métodos de Primitivação</b>	<b>210</b>
4.4.1	Método de Primitivação por Partes . . . . .	210
4.4.2	Método de Primitivação por Substituição . . . . .	213
<b>4.5</b>	<b>Primitivação de Funções Racionais</b>	<b>218</b>
4.5.1	Frações parciais envolvendo polinómios de grau 1 . . . . .	218
4.5.2	Frações parciais envolvendo polinómios de grau 2 . . . . .	219
4.5.3	Exemplos de primitivação envolvendo frações parciais . . . . .	222
<b>4.6</b>	<b>Primitivação de Potências de Funções Trigonométricas</b>	<b>226</b>
4.6.1	Primitivas imediatas . . . . .	226
4.6.2	Fórmulas de recorrência . . . . .	227
<b>4.7</b>	<b>Exercícios Propostos</b>	<b>230</b>

<b>5</b>	<b>Tipos de Equações Diferenciais (EDO's) . . . . .</b>	<b>235</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução às EDO's</b>	<b>235</b>
<b>5.2</b>	<b>Equações de Variáveis Separadas e Separáveis</b>	<b>236</b>
5.2.1	Equações de Variáveis Separadas . . . . .	236
5.2.2	Equações de Variáveis Separáveis . . . . .	237

<b>5.3</b>	<b>Equação Linear</b>	<b>237</b>
5.3.1	Equação Linear com Coeficientes Constantes . . . . .	238
5.3.2	Equação Linear com Coeficientes Variáveis . . . . .	238
<b>5.4</b>	<b>Equação de Bernoulli</b>	<b>242</b>
<b>5.5</b>	<b>Problema de valor inicial</b>	<b>244</b>
<b>5.6</b>	<b>Exercícios Propostos</b>	<b>246</b>
<b>6</b>	<b>Modelação Matemática Utilizando EDO's</b> . . . . .	<b>249</b>
<b>6.1</b>	<b>Modelos representados por EDO's</b>	<b>249</b>
6.1.1	Modelo de Crescimento Populacional de Malthus . . . . .	249
6.1.2	Modelo de Crescimento Logístico . . . . .	251
6.1.3	Modelo de Capitalização Contínua de Juros Compostos . . . . .	252
6.1.4	Modelo de Crescimento Económico de Harrod-Domar . . . . .	254
6.1.5	Modelo de Crescimento Económico de Solow-Swan . . . . .	254
6.1.6	Modelo de Difusão de Bass . . . . .	256
6.1.7	Modelo Dinâmico do Mercado de um Bem . . . . .	259
<b>6.2</b>	<b>Estudo Qualitativo de EDO's</b>	<b>259</b>
6.2.1	Representação Gráfica do Mapa de Indiferença . . . . .	259
<b>6.3</b>	<b>Exercícios Propostos</b>	<b>262</b>

### III

## Cálculo Integral

<b>7</b>	<b>Integral Definido</b> . . . . .	<b>265</b>
<b>7.1</b>	<b>A Área como Limite de Somas</b>	<b>265</b>
<b>7.2</b>	<b>Propriedades do Integral Definido</b>	<b>269</b>
<b>7.3</b>	<b>Funções Integráveis</b>	<b>272</b>
7.3.1	Condições suficientes de integrabilidade . . . . .	272
7.3.2	Teorema Fundamental do Cálculo Integral . . . . .	273
<b>7.4</b>	<b>Cálculo de Áreas</b>	<b>276</b>
7.4.1	Áreas definidas a partir de funções não positivas . . . . .	276
7.4.2	Áreas definidas a partir da função módulo . . . . .	277
7.4.3	Regiões Verticalmente Simples . . . . .	277
7.4.4	Regiões Horizontalmente Simples . . . . .	286
7.4.5	Regiões Horizontalmente Simples vs. Regiões Verticalmente Simples . . . . .	289
<b>7.5</b>	<b>Técnicas de Integração</b>	<b>293</b>
7.5.1	Integração Por Partes . . . . .	293
7.5.2	Integração Por Substituição . . . . .	295
7.5.3	Integral definido envolvendo a função inversa . . . . .	298
7.5.4	Integração num intervalo simétrico em relação à origem . . . . .	301
<b>7.6</b>	<b>Aplicações</b>	<b>307</b>
7.6.1	Os Excedentes do Produtor e do Consumidor . . . . .	307
7.6.2	As Curvas de Lorenz e o Coeficiente de Gini . . . . .	308
<b>7.7</b>	<b>Recursos Complementares</b>	<b>309</b>
<b>7.8</b>	<b>Exercícios Propostos</b>	<b>310</b>

<b>8</b>	<b>Integrais Impróprios</b>	<b>313</b>
<b>8.1</b>	<b>Definição e Exemplos</b>	<b>313</b>
8.1.1	Integração num intervalo ilimitado . . . . .	313
8.1.2	Integração de uma Função Não-Limitada . . . . .	316
<b>8.2</b>	<b>Aplicações</b>	<b>321</b>
8.2.1	Áreas de Regiões Ilimitadas . . . . .	321
<b>8.3</b>	<b>Exercícios Propostos</b>	<b>325</b>

## IV

## Álgebra Linear

<b>9</b>	<b>Vectores e Matrizes</b>	<b>329</b>
<b>9.1</b>	<b>Conceito de matriz</b>	<b>329</b>
9.1.1	Vectores linha e vectores coluna . . . . .	329
9.1.2	Diagonal principal e diagonal secundária . . . . .	330
9.1.3	Matrizes especiais . . . . .	330
9.1.4	Matriz diagonal . . . . .	331
9.1.5	Matrizes triangulares . . . . .	331
<b>9.2</b>	<b>Operações com matrizes</b>	<b>332</b>
9.2.1	Adição de matrizes . . . . .	332
9.2.2	Multiplicação de uma matriz por um escalar . . . . .	333
9.2.3	Multiplicação de matrizes . . . . .	334
9.2.4	Matrizes quadradas . . . . .	338
9.2.5	Matrizes diagonais e escalares . . . . .	339
9.2.6	Potência de matrizes quadradas . . . . .	340
9.2.7	Transposta de uma matriz . . . . .	343
9.2.8	Matrizes simétricas . . . . .	344
<b>10</b>	<b>Sistemas de Equações Lineares</b>	<b>347</b>
<b>11</b>	<b>Inversa de uma Matriz</b>	<b>349</b>
<b>11.1</b>	<b>Definição e propriedades</b>	<b>349</b>
<b>11.2</b>	<b>Tipos especiais de matrizes</b>	<b>354</b>
11.2.1	Matrizes Diagonais . . . . .	354
11.2.2	Matrizes Ortogonais . . . . .	354
11.2.3	Matrizes Nilpotentes . . . . .	356
<b>11.3</b>	<b>Método de Gauss-Jordan</b>	<b>357</b>
<b>11.4</b>	<b>Matrizes singulares vs Sistemas homogéneos</b>	<b>357</b>
<b>11.5</b>	<b>Equações Matriciais</b>	<b>358</b>
<b>12</b>	<b>Determinante de uma Matriz</b>	<b>359</b>





## Prefácio

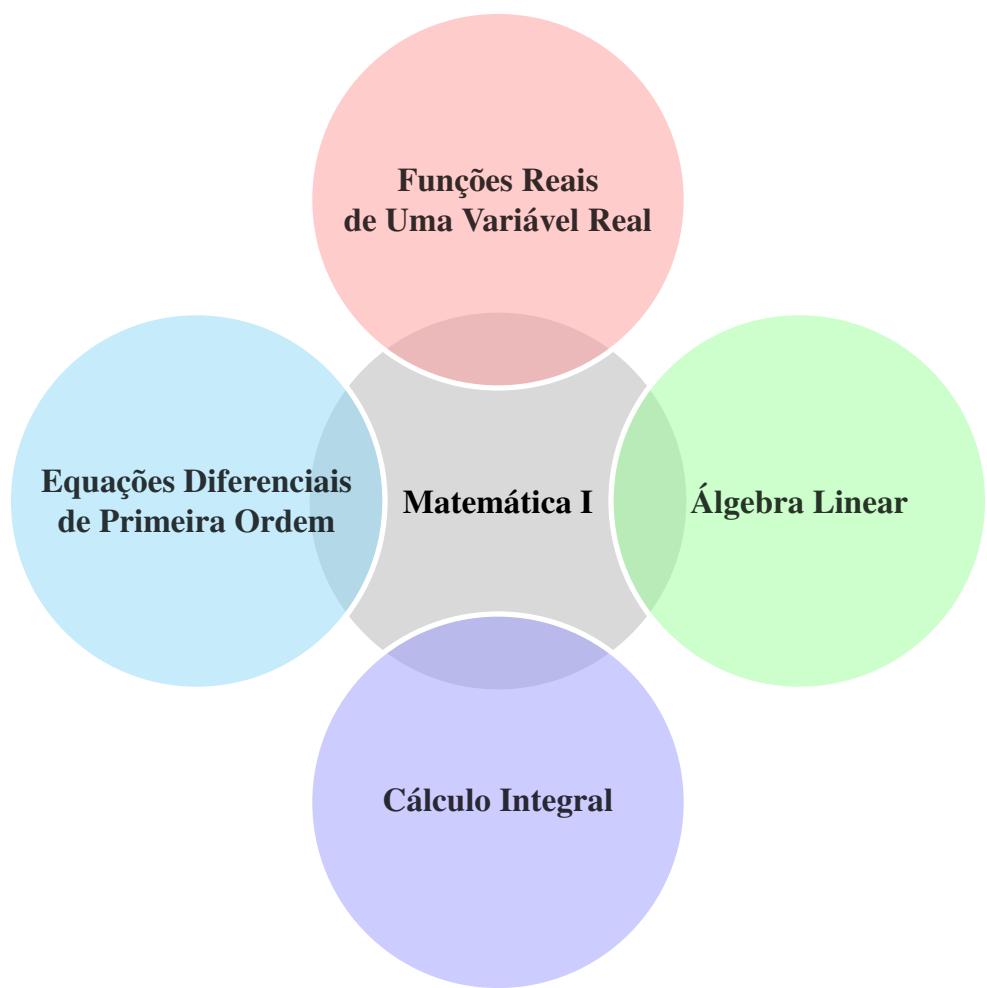
**Matemática I – Edição Quadrivium** corresponde uma versão reformulada e ampliada do caderno teórico-prático idealizado e produzido, no ano lectivo 2020/2021, pelos professores Jorge Marques, Nelson Faustino & Nuno Baeta. Este surgiu da necessidade de atender ao facto de nem todos os alunos poderem assistir presencialmente a todas as aulas do primeiro semestre, por conta das normas sanitárias adoptadas em contexto de pandemia pela Faculdade de Economia (FEUC), e da tentativa de responder, em particular, às necessidades sentidas por muitos estudantes internacionais ingressantes na Universidade de Coimbra (UC).

A sua concepção teve por base os seguintes objectivos:

- Revisitar e consolidar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Secundário de uma forma auto-contida;
- Introduzir novos conceitos e ferramentas de matemática de uma forma intuitiva e ilustrativa;
- Complementar os conceitos teóricos com vários exemplos e desafios propostos;
- Estimular a autonomia do estudante com base nas máximas “Resolva você mesmo” e “Experimente você mesmo”.

Este documento encontra-se dividido em (4) blocos, tal como ilustrado no diagrama abaixo. A saber:

- I Funções Reais de Uma Variável Real;**
- II Equações Diferenciais de Primeira Ordem;**
- III Cálculo Integral;**
- IV Álgebra Linear.**



No bloco **I Funções Reais de Uma Variável Real** será feita uma transição entre os conceitos usualmente estudados no ensino secundário (capítulos 1 a 3) e ensino superior (capítulo 4).

Uma introdução à teoria de equações diferenciais (EDO's) – que se irá debruçar em detalhe na disciplina de Matemática II, no segundo semestre – será o objecto de estudo no bloco **II Equações Diferenciais de Primeira Ordem**. Nesta iremos essencialmente abordar algumas técnicas elementares de resolução de EDO's que podem ser facilmente extrapoladas do estudo de técnicas de primitivação abordadas no capítulo 4.

A consolidação dos conteúdos do bloco **I Funções Reais de Uma Variável Real** será de importância primordial para o estudo de integrais definidos (capítulo 7) e de integrais impróprios (capítulo 8) no bloco **III Cálculo Integral**.

No bloco **IV Álgebra Linear** (ainda em desenvolvimento) será apresentada uma visão abreviada de vários conceitos e técnicas estudadas usualmente numa disciplina tradicional de Álgebra Linear. Este último bloco será não só importante no estudo de máximos e mínimos de funções de várias variáveis, na disciplina de Matemática II, como em todas as disciplinas subsequentes da licenciatura e Gestão que envolvam modelos matemáticos (p.e. matrizes de covariância associadas a modelos de regressão linear & cadeias de Markov descritas em termos de matrizes de transição).

A responsabilidade deste caderno é assumida orgulhosamente pelos seus autores, mas a sua concretização só se tornou possível por via do trabalho desenvolvido por vários docentes que já tiveram a oportunidade de leccionar esta disciplina, desde a reforma curricular das disciplinas do curso de Gestão para os moldes do “Processo de Bolonha”. Sem esquecer o empenho de todos os estudantes que já tiveram a oportunidade de estudar pela versão anterior deste caderno que, com dúvidas e problemas colocados, contribuiram certamente para enriquecer o conteúdo deste.

Para terminar, deverá referir-se que:

- as fotos utilizadas na capa e no início de cada capítulo foram retiradas da página e redes sociais da FEUC;
- a grande maioria dos gráficos que constam nas ilustrações deste documento foram realizadas com recurso ao GeoGebra – <https://www.geogebra.org/>;
- E que este documento está ainda longe de estar terminado, pelo que **observações e/ou sugestões que visem ao melhoramento deste serão sempre muito bem-vindas!**



# Funções Reais de Uma Variável Real

<b>1</b>	<b>Funções Elementares e Gráficos</b>	<b>15</b>
1.1	Revisão de Geometria Analítica	
1.2	Definições, Representações e Aplicações	
1.3	Propriedades de Funções: Abordagens Analítica e Gráfica	
1.4	Operações e Transformações	
1.5	Directório: Funções Algébricas e Funções Transcendentais	
1.6	Recursos Complementares	
1.7	Exercícios Propostos	
<b>2</b>	<b>Limites e Continuidade</b>	<b>103</b>
2.1	Limites	
2.2	Continuidade	
2.3	Exercícios Propostos	
<b>3</b>	<b>Derivadas e Aplicações</b>	<b>143</b>
3.1	A derivada da função no ponto e interpretação geométrica	
3.2	Derivadas de funções elementares	
3.3	Funções regulares	
3.4	Derivadas de 2 <sup>a</sup> ordem e Derivadas de ordem superior	
3.5	Cálculo de limites usando derivadas: a Regra de L'Hôpital	
3.6	Extremos Relativos e Absolutos	
3.7	Esboço de gráficos baseado no estudo completo de funções	
3.8	Aplicações: Taxas de Variação em Economia	
3.9	Exercícios Propostos	
<b>4</b>	<b>Primitivação</b>	<b>191</b>
4.1	Definições e propriedades	
4.2	Regras de Primitivação Imediata	
4.3	Primitivação envolvendo composição de funções	
4.4	Métodos de Primitivação	
4.5	Primitivação de Funções Racionais	
4.6	Primitivação de Potências de Funções Trigonométricas	
4.7	Exercícios Propostos	





# 1. Funções Elementares e Gráficos

## 1.1 Revisão de Geometria Analítica

### 1.1.1 Referencial Cartesiano

Comecemos por fixar o referencial cartesiano no plano  $xOy$ . Este referencial é constituído por dois eixos perpendiculares, eixo horizontal  $Ox$  (ou eixo dos  $xx$ ) e eixo vertical  $Oy$  (ou eixo dos  $yy$ ) que se intersectam na origem  $O$ .

Em concreto, podemos representar qualquer ponto  $P = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  na forma

$$(x, y) = (0, 0) + x \vec{i} + y \vec{j},$$

onde  $\vec{i} = (1, 0)$  denota o vector director associado ao eixo  $Ox$ , e  $\vec{j} = (0, 1)$  o vector director associado ao eixo  $Oy$ . A origem do referencial corresponde ao ponto  $O = (0, 0)$ .

Assim qualquer ponto  $P$  de  $\mathbb{R}^2$  é representado pelas suas coordenadas  $P = (x, y)$ . Diz-se que  $x$  é a abcissa e  $y$  é a ordenada de  $P$ .

Note ainda que os eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  dividem o plano em quatro quadrantes. São eles:

**1º quadrante:** Definido pela conjugação de inequações  $x > 0 \wedge y > 0$ ;

**2º quadrante:** Definido pela conjugação de inequações  $x < 0 \wedge y > 0$ ;

**3º quadrante:** Definido pela conjugação de inequações  $x < 0 \wedge y < 0$ ;

**4º quadrante:** Definido pela conjugação de inequações  $x > 0 \wedge y < 0$ .

A definição abaixo permite-nos em particular estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os pontos do plano e o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

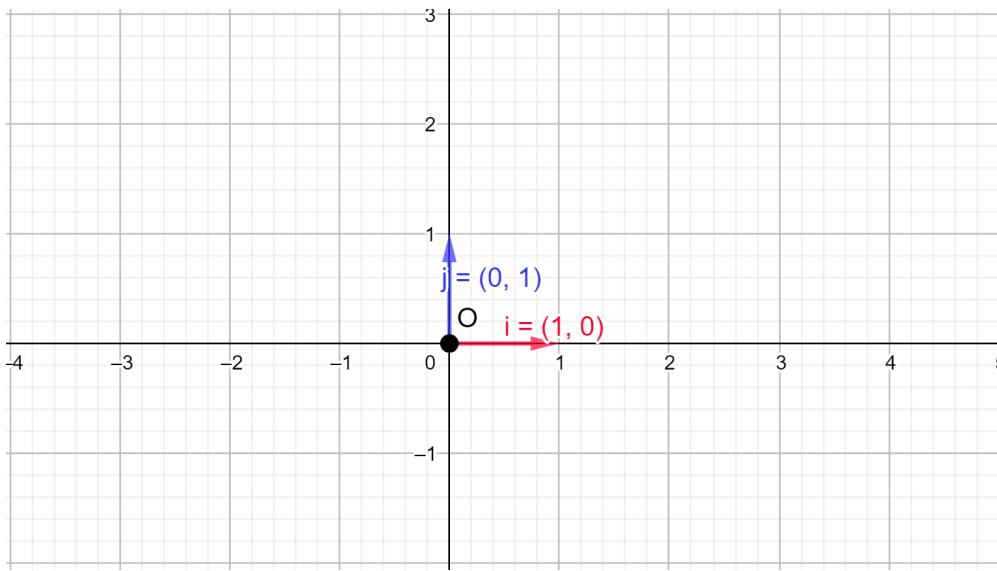


Figura 1.1: Na figura, o ponto  $O = (0,0)$  representa a origem do referencial enquanto que os vetores a vermelho e azul representam os vectores directores associados aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente.

**Definição 1.1.1 — Produto cartesiano de conjuntos.** Sejam  $D$  e  $Y$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .

O produto cartesiano de  $D$  por  $Y$ , o qual iremos denotar por  $D \times Y$ , corresponde ao subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$D \times Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D \wedge y \in Y\}.$$

**Desafio 1.1 — Quadrantes como Produto Cartesiano de Conjuntos.** Use os intervalos da forma

$$]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad \& \quad ]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

para descrever os quatro quadrantes do plano cartesiano como **produto cartesiano de conjuntos**.

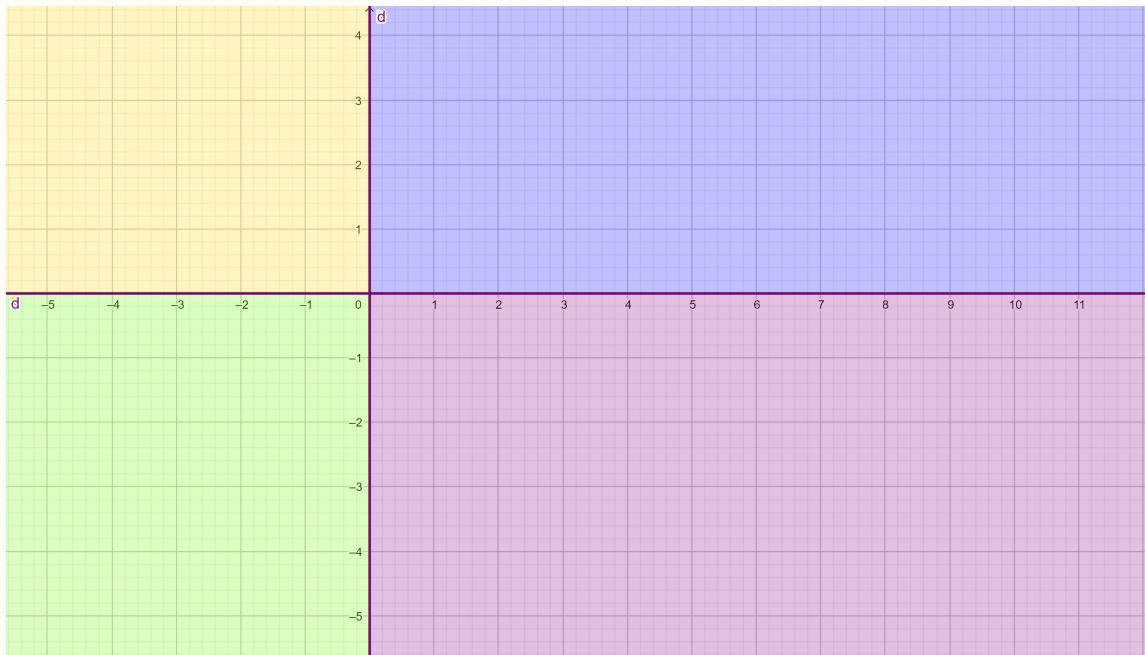


Figura 1.2: Representação dos quatro quadrantes do plano cartesiano: 1º quadrante (a azul), 2º quadrante (a amarelo), 3º quadrante (a verde) e 4º quadrante (a roxo).

### 1.1.2 Rectas: equações de rectas

#### Equações vectorial e normal da recta

**Definição 1.1.2 — Equação vectorial da recta.** A recta  $r$  que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e tem como vector director  $(u, v)$ , não nulo, é dada por

$$r : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u, v), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Uma das coordenadas do vector  $(u, v) \neq (0, 0)$  que determina a direcção da recta  $r$  pode ser nula. Nomeadamente, se  $v = 0$  a recta  $r$  é horizontal e se  $u = 0$  trata-se duma recta vertical.

Observe que a recta  $r$  é representada pelo sistema de equações

$$r : \begin{cases} x = x_0 + \lambda u \\ y = y_0 + \lambda v \end{cases}. \quad (1.1)$$

Multiplicando a primeira equação por  $v \neq 0$  e a segunda equação por  $u \neq 0$ , obtemos

$$\begin{cases} vx = vx_0 + \lambda uv \\ uy = uy_0 + \lambda uv \end{cases}. \quad (1.2)$$

Eliminando o parâmetro  $\lambda$  vem

$$v(x - x_0) - u(y - y_0) = 0.$$

Esta equação permite-nos facilmente deduzir o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.1 — Equação da recta na forma normal.** Seja  $r$  uma reta que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e tem  $(u, v)$ , não nulo, como vector director. Então  $r$  pode ser escrita na forma normal:

$$ax + by + c = 0,$$

com

$$a = v, \quad b = -u \quad \text{e} \quad c = -ax_0 - by_0.$$



As retas horizontal e vertical são casos particulares da equação normal

$$ax + by + c = 0.$$

Em concreto:

- Vector director do tipo  $(u, 0)$  determina a **recta horizontal** de equação  $y = \frac{c}{u}$  ( $u \neq 0$ );
- Vector director do tipo  $(0, v)$  determina a **recta vertical** de equação  $x = -\frac{c}{v}$  ( $v \neq 0$ ).

### Equação reduzida da recta

De seguida iremos focar a nossa atenção na equação reduzida da recta.

**Definição 1.1.3 — Equação reduzida da recta.** A recta de declive  $m \in \mathbb{R}$  e ordenada na origem  $b \in \mathbb{R}$  é definida pela equação

$$y = mx + b.$$

No caso de  $m = 0$  dizemos que a **recta é horizontal**. No caso de  $m \neq 0$  a **recta é oblíqua**.

Note que a **Definição 1.1.3** pode também ser facilmente deduzida a partir da equação vectorial da recta. Em concreto, assumindo que  $u \neq 0$ , com base na primeira equação obtemos

$$\lambda = \frac{x - x_0}{u}.$$

Substituindo agora o parâmetro  $\lambda$  na segunda equação, concluímos que

$$y = y_0 + \frac{v}{u}(x - x_0). \tag{1.3}$$

Da equação (1.3) segue que  $m = \frac{v}{u}$  nos dá o **declive da equação reduzida** da recta  $r$ , enquanto  $b = y_0 - \frac{v}{u}x_0$  a **ordenada na origem**.



A equação (1.3) também poderia ser directamente deduzida a partir da equação normal da recta, assumindo  $u \neq 0$ . Com efeito, o **Teorema 1.1.1** diz-nos essencialmente que se  $(x, y)$  é um ponto da recta  $r$ , então

$$v(x - x_0) - u(y - y_0) = 0.$$

A equação (1.1.2) permite-nos ainda deduzir o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.2 — Declive.** Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , tais que  $x_2 \neq x_1$ , dois pontos que pertencem à recta  $r$ . Então o declive da recta é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

*Ideia da demonstração.* Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dois pontos da recta  $r$ , com  $x_2 \neq x_1$ . Então os vectores  $\overrightarrow{P_1P_2} = (y_2 - y_1, x_2 - x_1)$  e  $(u, v)$  são colineares, i.e.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda(u, v),$$

para algum  $\lambda \neq 0$ .

Daí obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \lambda u \\ y_2 - y_1 = \lambda v \end{cases} \quad (1.4)$$

Como  $m = \frac{v}{u}$ , vem

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (1.5)$$

como pretendido. ■



**Ordenada na origem:** Após a obtenção do declive  $m$ , o valor de  $b$  pode ser calculado a partir de uma das equações abaixo:

- $b = y_1 - mx_1$ ;
- $b = y_2 - mx_2$ .



O **Teorema 1.1.2** permite-nos concluir que o declive da recta e a ordenada na origem são independentes do par de pontos escolhidos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ .

#### Interpretação geométrica do declive da recta:

1. Supondo  $y_2 \neq y_1$  (i.e.  $m \neq 0$ ) construímos um triângulo rectângulo de vértices  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  e  $Q = (x_2, y_1)$ , cuja diagonal corresponde ao segmento de reta  $[P_1P_2]$ .
2. Seja  $\beta$  o ângulo formado pelos vetores  $\overrightarrow{P_1Q} = (x_2 - x_1, 0)$  e  $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .
3. Então

$$\tan(\beta) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Esta interpretação conduz-nos ao seguinte resultado:

**Corolário 1.1.3 — Relação entre o declive e a Inclinação da recta.** Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dois pontos da recta  $r$ , com  $x_2 \neq x_1$  e  $\alpha$  o ângulo formado entre a recta  $r$  e o semieixo positivo  $Ox$ , marcado no sentido anti-horário. Então o declive da recta é dado por

$$m = \tan(\alpha)$$

Diz-se que  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < \pi$  e  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , nos dá a **inclinação da recta**.

*Ideia da demonstração.* Segue do facto de  $(u, v) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ,  $x_2 \neq x_1$ , ser o vetor diretor da recta  $r$  e da inclinação da recta  $r$  – associada a segmentos de recta da forma  $[Q_1Q_2]$ , com

$$Q_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1) \quad Q_2 = (\lambda x_2, \lambda y_2)$$

– ser independente da escolha do parâmetro  $\lambda \neq 0$ . Este último facto segue da igualdade

$$\frac{\lambda y_2 - \lambda y_1}{\lambda x_2 - \lambda x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$

■



- Se  $y_2 = y_1$  então a recta  $r$  tem declive nulo ( $m = 0$ ) e inclinação nula ( $\alpha = 0$ ). Neste caso estamos perante uma recta horizontal, de equação  $y = y_1$ .
- No caso de  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (rectas perpendiculares ao eixo  $Ox$ ), estamos perante uma recta vertical ( $x_2 = x_1$ ). Neste caso dizemos que o declive da recta é indefinido.

■ **Exemplo 1.1 — Revisão de Conceitos.** Na figura abaixo encontra-se representada a equação reduzida da recta, de equação

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

assim como o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  determinado a partir dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  de coordenadas

$$P_1 = (1, 2) \quad \text{e} \quad P_2 = (3, 5).$$

Com base na construção poderá facilmente verificar os seguintes factos:

- $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 3)$  define a hipotenusa do triângulo rectângulo de vértices  $P_1$ ,  $P_2$  e  $Q = (3, 2)$ ;
- Os vectores  $\overrightarrow{P_1Q} = (2, 0)$  e  $\overrightarrow{QP_2} = (0, 3)$  permitem-nos definir os catetos adjacente e oposto do triângulo rectângulo;
- O declive da recta é  $m = \frac{3}{2}$ ;
- A ordenada na origem ( $b = \frac{1}{2}$ ) pode ser calculada a partir da fórmula  $b = y_1 - mx_1$ , sendo  $(x_1, y_1) = (1, 2)$  [ponto  $P_1$ ];
- A ordenada na origem ( $b = \frac{1}{2}$ ) pode ainda ser calculada a partir da fórmula  $b = y_2 - mx_2$ , sendo  $(x_2, y_2) = (3, 5)$  [ponto  $P_2$ ];
- O ângulo formado entre os vectores  $\overrightarrow{P_1Q} = (2, 0)$  e  $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 3)$  coincide com o ângulo formado entre a recta  $r$  e o eixo  $Ox$ .

■

**Desafio 1.2 — Intersecção entre Rectas.** Seja  $r$  a recta que passa pelos pontos de coordenadas  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $x_2 \neq x_1$  e  $y_2 \neq y_1$ . Verifique que a intersecção de  $r$  com as rectas da forma

$$y = y_1 \quad \& \quad x = x_2$$

define um triângulo rectângulo.

Adicionalmente, verifique que se

$$m = \tan(\alpha)$$

nos dá o declive, então a inclinação da recta,  $\alpha$ , coincide com o ângulo formado entre a recta  $r$  com a recta de equação  $y = y_2$ .

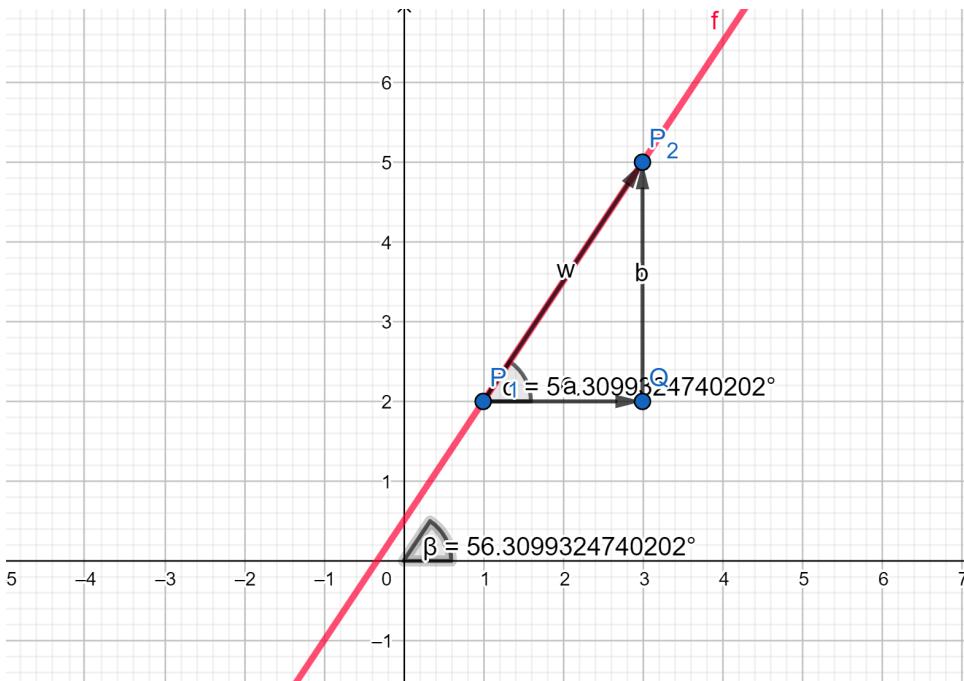


Figura 1.3: Reta de equação  $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$  que passa pelos pontos, de coordenadas  $P_1 = (1, 2)$  e  $P_2 = (3, 5)$ .

Use como referências os pontos  $P_1$  e  $P_2$  do **Exemplo 1.1** para verificar as conclusões obtidas.

#### Posição entre duas rectas

Comecemos por observar que toda a equação da forma  $ax + by + c = 0$  representa uma recta no plano  $xOy$ , sendo  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$  constantes tais que  $a$  e  $b$  não são simultaneamente nulas, i.e.  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

De facto, se  $b \neq 0$  então a equação pode ser reescrita na forma reduzida com

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

mas se  $b = 0$  temos uma recta vertical de equação  $x = -\frac{c}{a}$ ,  $a \neq 0$ .

Adicionalmente, o **Teorema 1.1.1** permite-nos formular a noção de vector normal a uma recta usando o conceito de produto escalar entre dois vectores  $(u_1, v_1)$  e  $(u_2, v_2)$ :

$$(u_1, v_1) \bullet (u_2, v_2) = u_1u_2 + v_1v_2. \quad (1.6)$$

**Definição 1.1.4 — Vector normal à recta.** Dizemos que o vector  $(a, b)$  é normal à recta

$$r : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u, v), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

se para quaisquer pontos da  $P = (x, y)$  da recta  $r$ , o vector  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$  satisfaz a condição de perpendicularidade

$$(a, b) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0.$$



Segue naturalmente da definição anterior que se  $(a, b)$  é um vector normal à recta  $r$ , então  $(u, v) = (b, -a)$  pode ser considerado como vector director da recta  $r$ , e vice-versa.

Em particular, dados dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ :

- $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ , ou o seu vector simétrico  $\overrightarrow{P_2P_1}$ , definem um vector director de  $r$ ;
- $(a, b) = (y_2 - y_1, x_1 - x_2)$ , ou o seu simétrico  $-(a, b) = (y_1 - y_2, x_2 - x_1)$ , são vectores normais a  $r$ .

Suponha agora que pretendemos determinar o ângulo formado entre duas rectas de declive  $m_1 \neq 0$  e  $m_2 \neq 0$ , respectivamente. Para tal, observe que ambas as rectas podem ser reescritas na **forma normal**

$$m_1(x - 0) + (-1)(y - b_1) = 0 \quad \& \quad m_2(x - 0) + (-1)(y - b_2) = 0,$$

sendo  $b_1$  e  $b_2$  as respectivas ordenadas na origem.

Usando agora o facto de os declives  $m_1$  e  $m_2$  serem independentes dos pontos escolhidos da recta, podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$(u_1, v_1) = (1, m_1) \quad \& \quad (u_2, v_2) = (1, m_2) \tag{1.7}$$

definem vectores directores de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente.

**Teorema 1.1.4 — Rectas paralelas e perpendiculares.** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas **rectas** no plano  $xOy$  de declives  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente. Então:

- (i) As rectas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas se, e só se,  $m_1 = m_2$ ;
- (ii) As rectas  $r_1$  e  $r_2$  são perpendiculares se, e só se,  $m_1 m_2 = -1$ .

*Ideia da Prova.* A prova de que a condição  $m_1 = m_2$  corresponde a rectas paralelas é deveras trivial com base na equação (1.7).

Para a prova da condição de perpendicularidade entre rectas ( $m_1 m_2 = -1$ ), comece por observar que dois vectores definidos pela equação (1.7) são perpendiculares se o produto escalar entre ambos vale zero (0), i.e.

$$(1, m_1) \bullet (1, m_2) = 0$$

Substituindo  $(1, m_1)$  e  $(1, m_2)$  na eq. (1.6) obtemos que  $m_1$  e  $m_2$  satisfazem a equação

$$1 + m_1 m_2 = 0.$$



O paralelismo e a perpendicularidade entre retas é independente da ordenada da origem das rectas  $r_1$  e  $r_2$ . Adicionalmente, as equações envolvendo as **funções tangente e cotangente**:

$$m_1 = \tan(\alpha) \quad \& \quad m_2 = -\cot(\alpha)$$

permitem-nos relacionar declives e **inclinações de rectas** perpendiculares entre si.

**Desafio 1.3** Determine a equação reduzida da recta  $s$  que atende às seguintes condições:

1.  $P_1 = (1, 2)$  é um ponto da recta  $s$ ;
2. A recta  $s$  é perpendicular à recta  $r$  do **Exemplo 1.1**.

Após ter determinado a  $s$ , determine a equação reduzida da recta  $t$  paralela à recta  $s$ , e que passa pelo ponto  $P_2 = (3, 5)$ .

### 1.1.3 Curvas: equações de circunferências e parábolas

#### Equação da circunferência

■ **Exemplo 1.2 — Equação da Circunferência.** A circunferência de centro  $C = (\alpha, \beta)$  e raio  $\rho > 0$  é definida pela equação

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2.$$

■

 Por definição, um ponto  $P = (x, y)$  pertence à circunferência de centro  $C = (\alpha, \beta)$  e raio  $\rho > 0$  se a distância entre  $C$  e  $P$  é igual a  $\rho$ , isto é,

$$\overline{CP} = \rho \iff \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = \rho \iff (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2.$$

Com base no que aprendemos na seção 1.1.2 Rectas: equações de rectas, vamos procurar determinar a solução para o seguinte problema:

**Dado um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  da circunferência, de centro  $C = (\alpha, \beta)$  e raio  $\rho > 0$ , como determinar a equação da recta  $r$  que é tangente à circunferência em  $P_0$ ?**

*Resolução.* Primeiramente, note que a distância entre  $C$  e  $P$  ( $\overline{CP}$ ) pode ser determinada a partir da norma<sup>1</sup> do vector  $\overrightarrow{CP}$ , i.e.

$$\overline{CP} = \|\overrightarrow{CP}\|.$$

Em particular, se escolhermos um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  da circunferência é possível determinar uma recta  $r$  que passe por  $C$ , cujo vector director é dado por  $\overrightarrow{CP_0} = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$ , i.e.

$$r : (x, y) = (\alpha, \beta) + \lambda(x_0 - \alpha, y_0 - \beta), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, escolhendo p.e.  $(a, b) = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$  resulta que a recta  $s$ , definida pela equação normal

$$s : a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$$

é perpendicular à recta  $r$ . Em particular, a perpendicularidade entre  $r$  e  $s$  permite-nos concluir que a recta  $s$  toca a circunferência em  $P_0$  uma, e uma só vez. ■

■ **Exemplo 1.3 — Recta Tangente à circunferência.** Para a circunferência de centro  $C = (1, 0)$  e raio  $\rho = 5$ :

$$(x - 1)^2 + y^2 = 25$$

podemos verificar que  $P_0 = (-2, 4)$  é um ponto da circunferência e que o vector

$$\overrightarrow{CP_0} = (-3, 4)$$

define um vector director da recta  $r$  que passa por  $C$ .

Escolhendo agora  $(a, b) = (-3, 4)$  e  $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ , obtemos com base na equação

$$\underbrace{(a, b) \bullet (x - x_0, y - y_0)}_{a(x - x_0) + b(y - y_0)} = 0$$

segue que

$$-3(x + 2) + 4(y - 4) = 0 \iff -3x + 4y = 22$$

nos dá a equação da recta pretendida.

<sup>1</sup> A norma  $\|(a, b)\|$  do vector  $\overrightarrow{CP} = (a, b)$  pode ser calculada com base na igualdade  $\|(a, b)\|^2 = (a, b) \bullet (a, b)$ , onde  $\bullet$  denota o produto escalar.

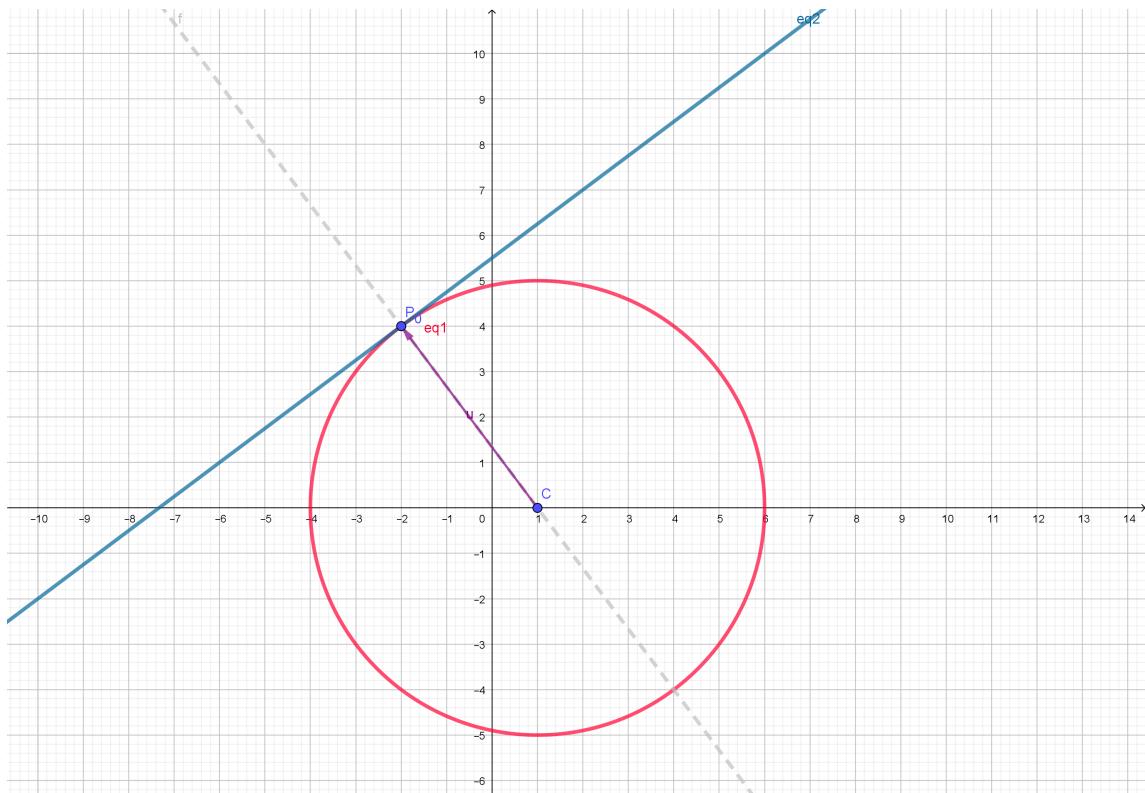


Figura 1.4: A circunferência a vermelho representa a circunferência de centro  $C = (1, 0)$  e raio  $\rho = 5$ ; A recta tangente que passa no ponto  $P_0 = (-2, 4)$  (a azul) foi determinada com base na relação de perpendicularidade da recta a tracejado (cinza). Para tal, fixámos  $(a, b) = (-3, 4)$  (vector a lilás) como sendo o vector normal à recta a azul.

No próximo desafio pretende-se que realize o procedimento recíproco, i.e. determinar a equação da circunferência, conhecendo:

- o centro  $C = (\alpha, \beta)$  da circunferência;
- a equação da recta tangente  $-ax + by + c = 0$ .

**Desafio 1.4** Determine a equação da circunferência sabendo que:

- O centro é  $C = (-4, -2)$  e é tangente à recta de equação  $x = 1$ ;
- O centro é  $C = (3, -2)$  e é tangente à recta de equação  $x + 2y = 6$ .

### Equação da parábola

**Definição 1.1.5** Fixemos uma recta  $d$  e um ponto  $F$ . Diz-se que a parábola é o lugar geométrico do conjunto de todos os pontos do plano  $xOy$  que são equidistantes de  $F$  e  $d$ . Chamamos a  $F$  o foco e a  $d$  a directriz.

Apresentamos algumas características:

- A parábola tem um eixo de simetria que é uma recta que passa por  $F$ .
- O eixo de simetria da parábola é perpendicular à recta  $d$ .

- O vértice é o único ponto da parábola que pertence ao eixo de simetria.

■ **Exemplo 1.4 — Equação da parábola com eixo  $Ox$ .** Consideremos que a parábola tem vértice  $V = (0, 0)$  e que o seu eixo de simetria é o eixo  $Ox$ .

Então  $F = (0, \frac{p}{2})$  e  $y = -\frac{p}{2}$  é a equação da directriz, onde  $p$  é uma constante, não-nula. Sejam  $P = (x, y)$  um ponto qualquer da parábola e  $Q = (x, -\frac{p}{2})$  um ponto da directriz. Por definição de parábola temos  $\overline{PF} = \overline{QF}$ , ou seja,

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \iff x^2 - py = py \iff y = \frac{1}{2p}x^2$$

Fazendo  $a = \frac{1}{2p}$ , escrevemos  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$ . ■

Supondo que o vértice da parábola pode ser qualquer ponto do plano apresentamos a equação geral duma parábola com eixo de simetria vertical.

■ **Exemplo 1.5 Equação da parábola com eixo de simetria vertical**

A parábola de vértice  $V = (h, k)$  e eixo de simetria  $x = h$  é definida pela equação

$$y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$$

- (i) Se  $a > 0$  a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- (ii) Se  $a < 0$  a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

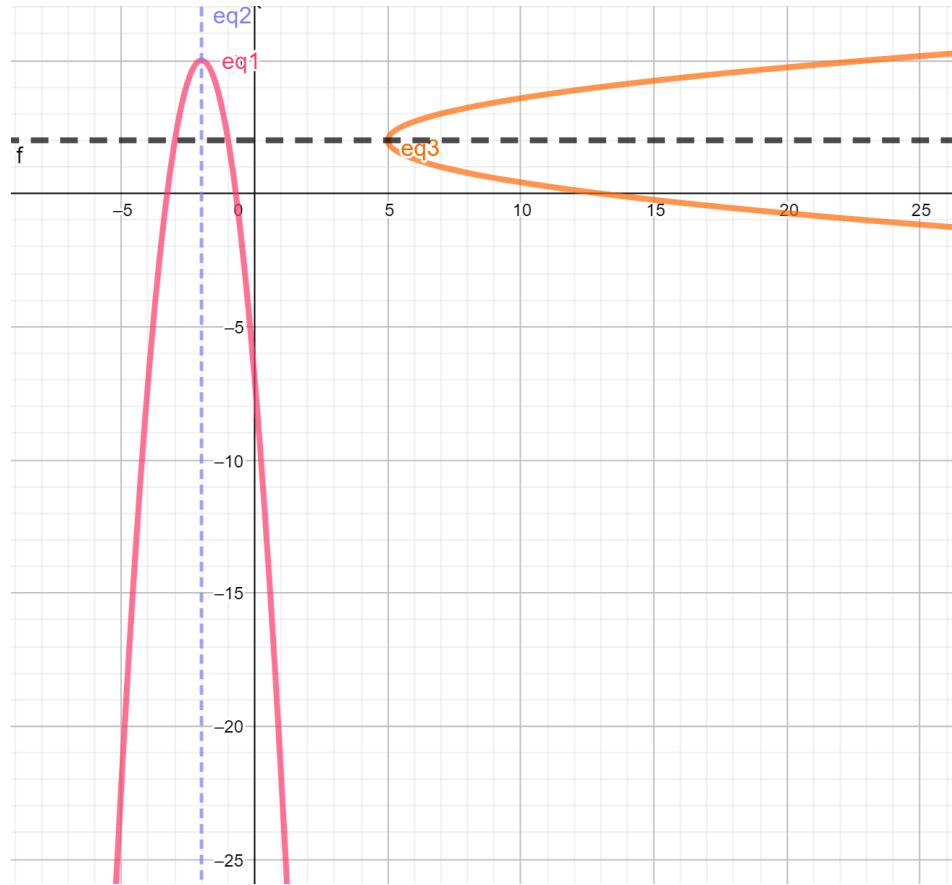
■ **Exemplo 1.6 Equação da parábola com eixo de simetria horizontal**

A parábola de vértice  $V = (p, q)$  e eixo de simetria  $y = q$  é definida pela equação

$$x = a(y - p)^2 + q, a \neq 0$$

- (i) Se  $a > 0$  a parábola tem a concavidade voltada para a direita;
- (ii) Se  $a < 0$  a parábola tem a concavidade voltada para a esquerda.

Na figura abaixo, a parábola de equação  $y = 5 - 3(x + 2)^2$  (a magenta) apresenta  $x = -2$  (recta tracejada a azul) como eixo de simetria vertical e concavidade voltada para baixo, enquanto que a parábola de equação  $x = 5 + 2(y - 2)^2$  (a laranja) apresenta  $y = 2$  (recta tracejada a preto) como eixo de simetria horizontal e concavidade voltada para a direita.



## 1.2 Definições, Representações e Aplicações

### 1.2.1 Representação Analítica: Domínio e Contradomínio

No estudo de funções reais de variável real iremos assumir que  $D$  e  $Y$  são dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , não-vazios, i.e.

$$D \subseteq \mathbb{R} \quad \& \quad Y \subseteq \mathbb{R}.$$

**Definição 1.2.1 — Função real de variável real.** Função definida em  $D$  e com valores em  $Y$ : É uma correspondência que a cada elemento  $x \in D$  associa um único elemento  $y \in Y$  através de  $y = f(x)$ . Usualmente representa-se por

$$\begin{aligned} f : \quad D &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

O conjunto  $D$  designa-se por domínio de  $f$  e o conjunto

$$D' = \{y \in Y : y = f(x), x \in D\}$$

que satisfaz  $D' \subseteq Y$  representa o contradomínio de  $f$ . Ao conjunto  $Y$  chama-se conjunto de chegada.

**Notação 1.1 — Domínio e contradomínio de  $f$ .** É também comum usar as notações  $D_f$  e  $D'_f$  quando nos referimos ao domínio e ao contradomínio de  $f : D \rightarrow Y$ , respectivamente.

Sempre que se justifique usaremos estas notações para evitar possíveis ambiguidades.

**Notação 1.2 — Variável dependente vs. Variável Independente.** Frequentemente, vamos usar a variável  $x$ , dita variável independente, para representar os elementos do domínio de  $f$ , chamados de objectos. Por sua vez, a variável  $y$ , dita variável dependente, é usada para representar os elementos do contradomínio de  $f$ , chamados de imagens.

Podemos agora afirmar que o domínio  $D$  da função é o conjunto de todos os objectos para os quais existem imagens e o contradomínio da função é o conjunto de todas as imagens.



Não se deve confundir  $f(x)$  com  $f$  visto que  $f(x)$  indica o valor que a função assume no número real  $x$  enquanto  $f$  fica definida não só pela expressão  $f(x)$  mas também pelo domínio e conjunto de chegada.

**Notação 1.3 — Função**  $f : D \rightarrow D'$ . Por uma questão de simplicidade, frequentemente iremos usar a notação

$$x \mapsto y = f(x)$$

sempre que pretendamos definir a função  $f$  pontualmente pela expressão  $f(x)$ .

Assim, sempre que recorrermos a esta notação ao longo do texto estaremos a assumir implicitamente que  $f$  é uma função de domínio  $D$  e de conjunto de chegada  $Y = D'$ .

### 1.2.2 Representação Geométrica: Gráfico

**Definição 1.2.2** O gráfico da função  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$  é o conjunto de todos os pontos do plano  $xOy$ :

$$graf(f) = \{(x, y) : y = f(x), x \in D\}.$$

O gráfico de  $f$  é precisamente o produto cartesiano de  $D$  por  $D'$ , escreve-se,  $graf(f) = D \times D'$ , logo é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .



**Teste da recta vertical:** Geometricamente, dizemos que uma curva representada por um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  define uma função  $f : D \rightarrow Y$  se, e só se, para todo o  $d \in D$  a recta vertical  $x = d$  intersecta uma, e uma só vez,  $S$ .

#### Exemplos de funções definidas a partir de curvas

■ **Exemplo 1.7 — Equação da recta.** É evidente que a uma recta não-vertical corresponde um gráfico de uma função. Assim, a equação reduzida da recta introduzida na **Definição 1.1.3** dá-nos a representação gráfica da chamada função afim:

**Definição 1.2.3 — Função Afim - Polinómio de grau 1.** A função afim  $f$  é definida pela expressão  $f(x) = mx + b$ , sendo  $m \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$  constantes. O seu domínio é  $\mathbb{R}$ .

Em particular, diz-se ainda que:

- (i)  $f$  é função constante se  $m = 0$ ;
- (ii)  $f$  é função linear se  $b = 0$  e  $m \neq 0$ .

■ **Exemplo 1.8 — Equação da parábola.** O conjunto de pontos

$$\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$$

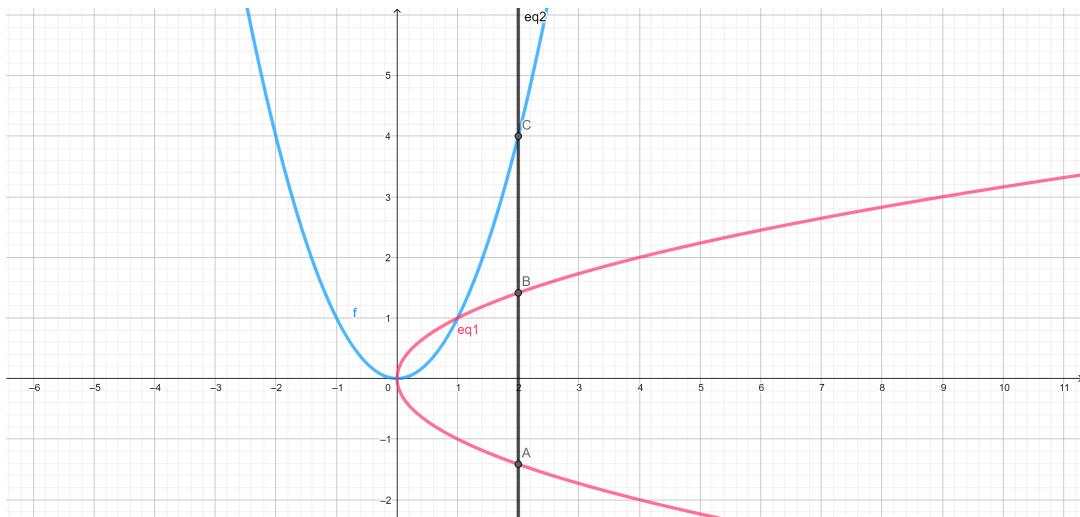
representa a parábola de equação  $y = x^2$  no plano  $xOy$ . Esta curva permite-nos definir uma função (função quadrática), de domínio  $\mathbb{R}$ , representada na figura abaixo a azul ciano.

No entanto, o conjunto de pontos

$$\{(y^2, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

definido no plano  $xOy$  pela parábola de equação  $x = y^2$  – representado na figura abaixo a magenta – já não define uma função uma vez que a **reta vertical**  $x = d$  ( $d > 0$ ) intersecta  $x = y^2$  em dois pontos distintos, de coordenadas

$$A = (d, -\sqrt{d}) \text{ e } B = (d, \sqrt{d}).$$

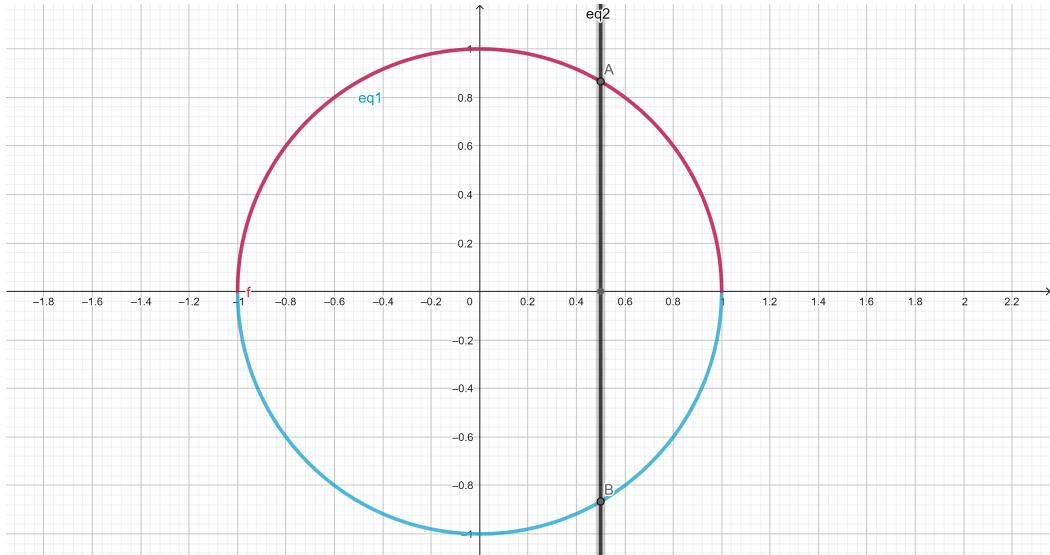


Essencialmente, o gráfico da **função raiz quadrada** foi construído a partir da parábola de equação  $x = y^2$  do **Exemplo 1.8**, excluindo todos os pontos abaixo do eixo  $Ox$  de modo a garantir que o gráfico apenas intersectasse a recta vertical  $x = d$  ( $d > 0$ ) uma, e uma só vez.

■ **Exemplo 1.9 — Equação da circunferência.** Para que a equação da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  defina a função,  $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ , teremos de considerar apenas a semicircunferência situada acima do eixo  $Ox$  ( $y = 0$ ), assim como os pontos  $A = (-1, 0)$  e  $B = (1, 0)$  obtidos pela interseção das equações

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad y = 0$$

tal qual representado na figura abaixo:



O gráfico da função  $x \mapsto y = \sqrt{1 - x^2}$  permite-nos dizer que

$$D_f = [-1, 1] \quad \& \quad D'_f = [0, 1],$$

onde  $[a, b]$  denota o intervalo da forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Como iremos ver mais à frente, o intervalo  $[-1, 1]$  é o conjunto solução da inequação quadrática

$$1 - x^2 \geq 0,$$

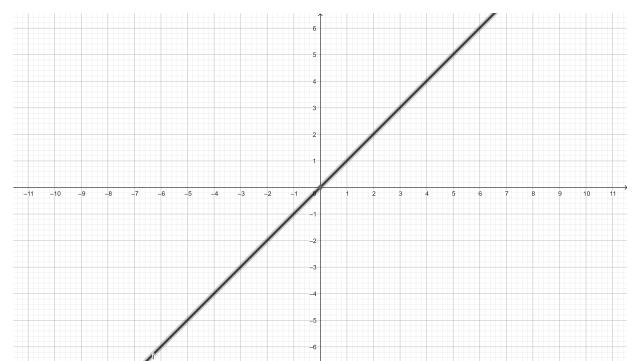
enquanto o intervalo  $[0, 1]$  corresponde ao conjunto solução do sistema de inequações

$$1 - y^2 \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0.$$

### Exemplos de funções elementares

■ **Exemplo 1.10 — Função Identidade.** É a função que a cada número real faz corresponder o próprio número e a sua representação gráfica é a bissecriz dos quadrantes ímpares, i.e,

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = x \end{aligned}$$

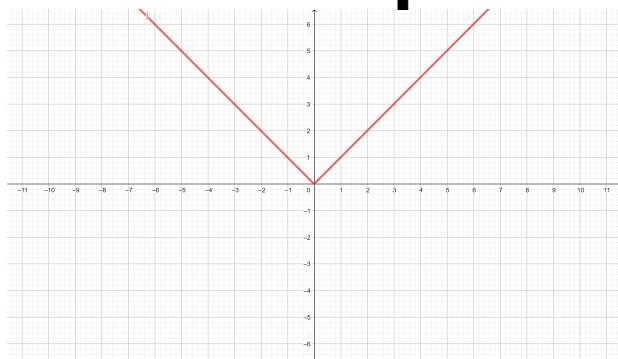


■ **Exemplo 1.11 — Função Módulo.** A função módulo que a cada número real faz corresponder o seu valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

i.e.,  $x \mapsto y = |x|$ , é uma função de domínio  $\mathbb{R}$  e contradomínio  $[0, +\infty[$ . Trata-se de uma função definida por ramos cuja representação gráfica – **em forma de V** – é a reunião de duas semirectas de origem  $O = (0, 0)$  obtidas a partir da bissecriz dos quadrantes pares (para valores de  $x < 0$ ), e da bissecriz dos quadrantes ímpares (para valores de  $x \geq 0$ ).

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ x &\longmapsto y = |x| \end{aligned}$$

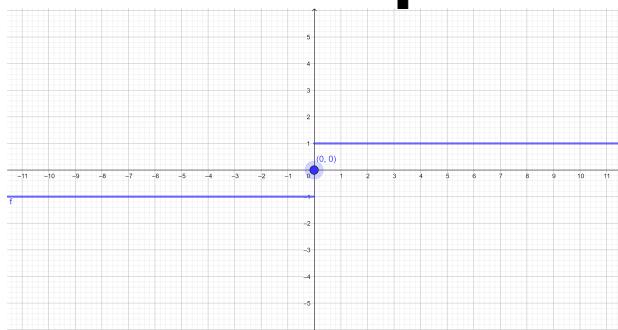


■ **Exemplo 1.12 — Função sinal.** A função sinal,  $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ :

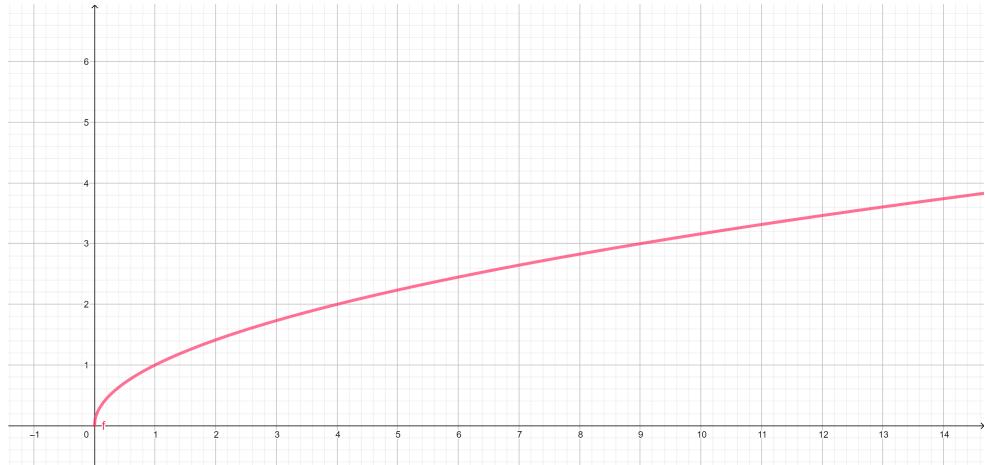
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é uma função definida por ramos de domínio  $\mathbb{R}$  e contradomínio  $\{-1, 0, 1\}$ , cujo gráfico é constituído por duas semirectas de equações  $y = -1$  (para valores de  $x < 0$ ),  $y = 1$  (para valores de  $x > 0$ ) e pela origem do referencial –  $(0, 0) = (0, \operatorname{sgn}(0))$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \{-1, 0, 1\} \\ x &\longmapsto y = \operatorname{sgn}(x) \end{aligned}$$



■ **Exemplo 1.13 — Função raiz quadrada.** A função raiz quadrada,  $x \mapsto \sqrt{x}$ , cujo gráfico é dado pela figura abaixo:



é definida a partir da parábola de equação  $x = y^2$ , para valores de  $y \geq 0$ , i.e.

$$\{(y^2, y) : y \geq 0\} = \{(x, y) : y = \sqrt{x}, x \geq 0\}.$$

O gráfico da raiz quadrada permite-nos indicar que

$$D_f = [0, +\infty[ \quad \& \quad D'_f = [0, +\infty[,$$

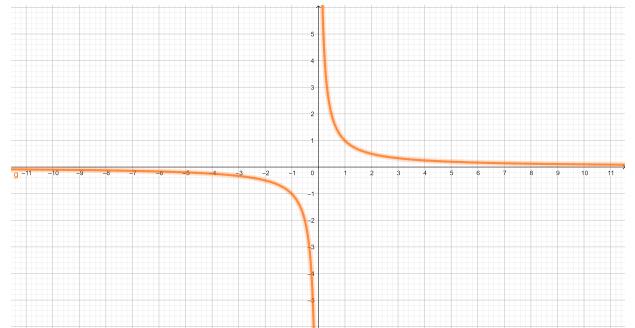
onde  $[a, +\infty)$  denota o intervalo

$$[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

■

■ **Exemplo 1.14 — Função Recíproca da Identidade.** É a função que a cada número real, não nulo, faz corresponder o seu inverso e a sua representação gráfica é uma hipérbole, i.e,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \\ x &\longmapsto y = \frac{1}{x} \end{aligned}$$



■

**Desafio 1.5 — Equações envolvendo módulos.** Esboce a curva de equação

$$x = |y|$$

no plano  $xOy$ .

Verifique que a curva acima corresponde a uma reflexão do gráfico da função módulo relativamente à bissecriz dos quadrantes ímpares.

De seguida aplique o **teste da recta vertical** para concluir que a curva acima não define uma função.

**RECURSO À TECNOLOGIA:** Insira os comandos  $y=\text{abs}(x)$  &  $x=\text{abs}(y)$  no calculadora GeoGebra, disponível a partir do link

[https://www.geogebra.org/calculator.](https://www.geogebra.org/calculator)

**Desafio 1.6 — Função raiz quadrada vs. função módulo.** Mostre que a função,  $x \mapsto y = \sqrt{x^2}$ , coincide com a função módulo,  $x \mapsto y = |x|$ . Adicionalmente, verifique se as funções,  $x \mapsto y = \sqrt{x^2}$  e  $x \mapsto y = (\sqrt{x})^2$  são iguais.

**SUGESTÃO:** Comece por mostrar que  $|x|^2 = x^2$ . Depois faça uso da definição de raiz quadrada, abordada no **Exemplo 1.13**.

**RECURSO À TECNOLOGIA:** Insira os comandos  $\text{sqrt}(x^2)$  &  $(\text{sqrt}(x))^2$  no calculadora GeoGebra, disponível a partir do link

[https://www.geogebra.org/calculator.](https://www.geogebra.org/calculator)

### 1.2.3 Aplicação em Economia - Leis da procura e da oferta

O conceito de função é um instrumento matemático utilizado para estabelecer leis ou princípios entre variáveis. Os economistas estudam a determinação de preços de um bem de consumo num mercado, onde os agentes económicos se encontram para realizarem transações. Os preços num mercado de concorrência perfeita são estabelecidos pelas leis da procura e da oferta. O economista João César das Neves dizia que: "A forma mais sugestiva de abordar um mercado é através de um gráfico que a maioria dos economistas usa intensamente. Ele é, verdadeiramente, o canivete suíço do economista. Foi popularizada por um dos maiores economistas de todos os tempos Alfred Marshall, e por isso se chama cruz marshalliana. Neste gráfico cruzam-se duas curvas: a curva da procura e a curva da oferta."

Por um lado, a curva da procura, de equação  $p = D(q)$ , relaciona a quantidade  $q \geq 0$  procurada de um bem por parte dos consumidores ao preço unitário de  $p \geq 0$  unidades monetárias (u.m.). Trata-se de uma curva decrescente uma vez que a quantidade procurada de um bem varia no sentido inverso do seu preço. De facto, à medida que o preço aumenta a quantidade procurada diminui e vice-versa.

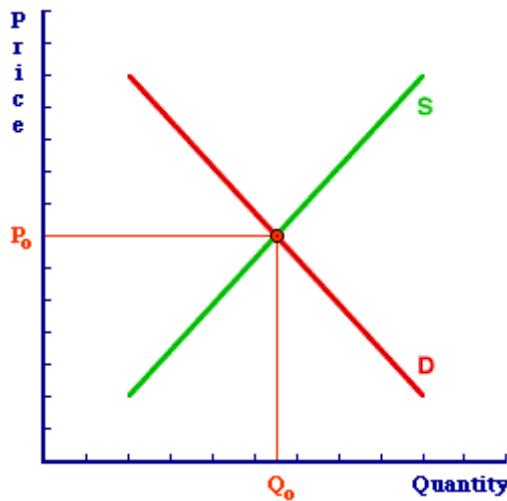
Por outro lado, a curva da oferta de equação  $p = S(q)$  expressa a quantidade do mesmo bem que os produtores estão dispostos a produzir e a vender varia no mesmo sentido do seu preço. De facto, à medida que o preço aumenta a quantidade oferecida aumenta e vice-versa.

Os interesses antagónicos dos consumidores e dos produtores vão determinar o equilíbrio no mercado, que ocorre quando a quantidade procurada do bem coincide com a quantidade oferecida, isto é,

$$D(q_0) = S(q_0).$$

Assim sendo ao correspondente preço,  $p_0$ , chama-se preço de equilíbrio.

Assinale-se que para representar geometricamente as curvas da procura e da oferta, os economistas usam o referencial  $Q \circ P$  por razões históricas, colocando os valores de  $q$  (variável dependente) sobre o eixo horizontal e os valores de  $p$  (variável independente) sobre o eixo vertical.



**Desafio 1.7 — Funções de procura e oferta.** Considere um mercado caracterizado pelas funções procura e oferta, definidas respectivamente por:

$$D(q) = 20 - q^2 \quad ; \quad S(q) = 3q + 2.$$

- Determine os domínios de  $D$  e  $S$ .
- Determine os contradomínios de  $D$  e  $S$ .
- Calcule o preço  $p_0$  e a quantidade  $q_0$  de equilíbrio do bem. Qual é o significado geométrico do ponto  $E = (q_0, p_0)$ ?
- Trace as curvas da procura e da oferta no referencial  $qOp$ .

### 1.3 Propriedades de Funções: Abordagens Analítica e Gráfica

#### 1.3.1 Injectividade e Sobrejectividade

**Definição 1.3.1 — Função Injectiva, Sobrejectiva e Bijectiva.** Diz-se que a função  $f : D \rightarrow Y$ :

- é injectiva se  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  para  $x_1, x_2 \in D$ .
- é sobrejectiva se  $D' = Y$ .
- é bijectiva se é simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Na definição de injectividade, a implicação

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

garante-nos que para cada  $y \in D'$  a equação  $y = f(x)$  admite solução única.

Em vários livros de texto, esta implicação é-nos apresentada na sua forma equivalente

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$



Se determinarmos dois pontos  $x_1, x_2 \in D$  para os quais

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{e} \quad x_1 \neq x_2$$

então provamos que  $f$  **não é injectiva**.

Podemos então definir um critério, do ponto de vista geométrico, para estudar a injectividade de funções.



**Teste da recta horizontal:** Observemos que a recta horizontal de equação  $y = b$  não intersecta o gráfico de uma função injectiva em mais do que um ponto. Assim, se  $b \in D'$  essa recta intersecta o gráfico num único ponto, mas se  $b \notin D'$  essa recta não intersecta-o.

Por outro lado, para demonstrarmos que uma função  $f : D \rightarrow Y$  é sobrejectiva, é suficiente mostrar a inclusão

$$Y \subseteq D',$$

já que a inclusão

$$D' \subseteq Y$$

é sempre verdadeira, por definição de contradomínio.



Por outras palavras, mostrar que uma função é sobrejetiva é equivalente a mostrar que para todos os elementos de  $y \in Y$  (conjunto de chegada) a equação  $y = f(x)$  admite pelo menos uma solução.

Ora, caso pretendamos demonstrar que uma função não é sobrejetiva, basta determinarmos/encontrarmos pelo menos um elemento  $y$  do conjunto de chegada para o qual a equação  $y = f(x)$  não admite solução.

■ **Exemplo 1.15 — Função bijectiva.** Ao contrário da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ , definida por  $f(x) = x^2$ , a função raiz quadrada  $g : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$  ( $x \mapsto y = \sqrt{x}$ ) abordada no **Exemplo 1.13** é injectiva e sobrejectiva, logo bijectiva. ■

■ **Exemplo 1.16 — Função injectiva mas não sobrejectiva.**  $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{x}{2-x}$$

é injectiva mas não é sobrejectiva.

#### Prova da injectividade:

Com efeito, suponhamos que  $f(x_1) = f(x_2)$  para  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{2\}$  arbitrários, ou seja

$$\frac{x_1}{2-x_1} = \frac{x_2}{2-x_2}$$

Note que a igualdade anterior é equivalente a termos

$$x_1(2-x_2) = x_2(2-x_1) \iff 2x_1 - x_1x_2 = 2x_2 - x_1x_2.$$

Simplificando a igualdade acima concluímos que  $x_1 = x_2$ , como pretendido.

#### Prova da não sobrejectividade:

Consideremos a equação  $y = f(x)$ , sendo  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$  e  $y \in \mathbb{R}$ .

Se escolhermos  $y = -1$ , obtemos

$$\frac{x}{2-x} = -1 \iff x = x - 2.$$

Note que a equação acima não admite solução. Logo provámos a existência de um  $y \in \mathbb{R}$  para o qual a equação  $y = f(x)$  não admite solução.

Portanto,  $f$  não é sobrejectiva. ■

■ **Exemplo 1.17 — Função não injectiva mas sobrejectiva.** Consideremos a função  $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , cujo gráfico foi obtido no **Exemplo 1.9**. Esta função não é injectiva uma vez que para  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 1$  temos  $f(-1) = f(1) = 0$ .

No entanto  $f$  é sobrejectiva uma vez que  $D' = [0, 1]$ . ■



Se tivéssemos escolhido  $Y = [-1, 1]$  como conjunto de chegada da função  $f : [-1, 1] \rightarrow Y$  do exemplo anterior, esta já não seria sobrejectiva uma vez que a equação

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

não admite solução para valores de  $-1 \leq y < 0$ .

Graficamente, este facto poderia ser verificado mostrando por exemplo que a recta horizontal  $y = -1$  não intersecta o gráfico de  $f$ .

**Desafio 1.8** Determine os conjuntos  $D$  e  $Y$  para os quais a função  $f : D \rightarrow Y$  definida por

$$f(x) = \frac{x}{3 - 5x}$$

é bijectiva.

**Desafio 1.9** Esboce o gráfico da função  $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

De seguida, verifique graficamente se esta função é bijectiva.

### 1.3.2 Zeros e Sinal

■ **Definição 1.3.2 — Zeros da função.** Seja  $f : D \rightarrow Y$ . Diz-se que o real  $a$  é um zero de  $f$  se  $a \in D$  e  $f(a) = 0$ .

O conjunto de todos os zeros de  $f$  é representado por

$$Z(f) = \{x \in D : f(x) = 0\}.$$



Decorre da definição acima que se a equação  $f(x) = 0$  é impossível em  $\mathbb{R}$ , então o conjunto dos zeros de  $f$  é vazio, i.e.  $Z(f) = \emptyset$ .



Da definição de gráfico de uma função tem-se que  $(a, b)$  é um **ponto de  $graf(f)$**  se, e só se  $a \in D$  é um **zero da função**

$$x \mapsto y = f(x) - b.$$

Os pontos de intersecção do gráfico de  $f$  com os eixos coordenados obtém-se da seguinte forma:

- Se  $0 \in D$  então  $P = (0, f(0))$  é o único ponto do gráfico de  $f$  que toca o eixo  $Oy$ ;
- Se  $a$  é um zero de  $f$  então  $Q = (a, 0)$  é um ponto do gráfico de  $f$  que intersecta o eixo  $Ox$ .



As funções identidade ( $x \mapsto y = x$ ), módulo ( $x \mapsto y = |x|$ ) e sinal ( $x \mapsto y = \text{sgn}(x)$ ) tratadas no **Exemplo 1.10**, **Exemplo 1.11** e **Exemplo 1.12**, respectivamente, são exemplos em que a origem  $O = (0, 0)$  do referencial  $xOy$  é o único ponto pertencente ao eixo  $Oy$  comum a todos os gráficos.

**Corolário 1.3.1 — Zeros vs. Injectividade.** Se  $f : D \rightarrow Y$  tem, pelo menos dois zeros, então  $f$  não é injectiva.

*Ideia da Demonstração.* Segue automaticamente da definição de injectividade de uma função  $f : D \rightarrow Y$ . ■



Com base na caracterização descrita na Seção 1.3.1, podemos facilmente concluir que toda a função injectiva  $f : D \rightarrow Y$  tem **no máximo um único zero** (i.e. a equação  $f(x) = 0$  admite uma única solução ou é impossível). Esta caracterização é equivalente ao **Corolário 1.3.1**.

■ **Exemplo 1.18 — Zeros da função afim.** Consideremos a função afim  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$  tal que  $f(x) = mx + b$  com  $m \neq 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ . O seu gráfico (é uma recta) intersecta o eixo  $Ox$  num único ponto pois a função tem apenas um zero de valor  $x = -\frac{b}{m}$ .

Porém, a função constante definida por  $f(x) = b$  com  $b \neq 0$  não tem zeros pois  $f(x) = 0$  é uma equação impossível em  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $Z(f) = \emptyset$ .

Já a função nula,  $x \mapsto y = 0$ , para todo o real  $x$  tem uma infinidade de zeros uma vez que  $Z(g) = \mathbb{R}$ . ■

■ **Exemplo 1.19 — Nem toda a função com um único zero é injectiva.** A função modular,  $x \mapsto y = |2x + 3|$ , tem apenas um único zero de valor  $x = -\frac{3}{2}$ .

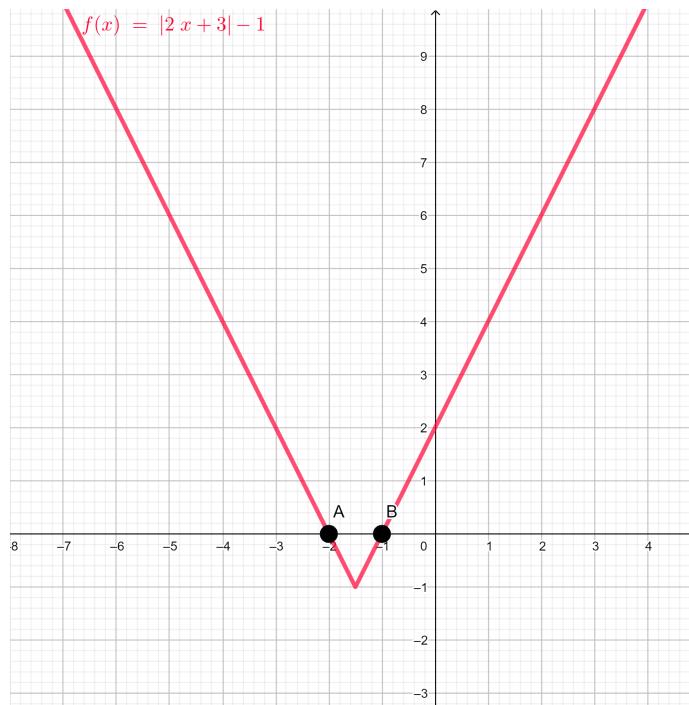
No entanto, a equação

$$|2x + 3| = 1$$

admite duas soluções:

1.  $x = -1$  satisfaz  $|2(-1) + 3| = |1| = 1$ ;
2.  $x = -2$  verifica  $|2(-2) + 3| = |-1| = 1$ .

Contudo, sabendo que a recta de equação  $y = 1$  intersecta o gráfico de  $x \mapsto y = |2x + 3|$  pelo menos uma vez, poderíamos reformular a **prova de não injectividade**, verificando que  $x = -1$  e  $x = -2$  são dois zeros de  $x \mapsto y = |2x + 3| - 1$ , tal como representado na figura pelos pontos  $A = (-2, 0)$  e  $B = (-1, 0)$ .



■



Foi verificado com o **Exemplo 1.19** que existem funções com um único zero mas que não são injetivas.

**Desafio 1.10** Estude a **função recíproca da identidade** definida no **Exemplo 1.14** quanto à injetividade e à existência de zeros. O que pode concluir?

Uma forma de contornar a limitação ilustrada no **Exemplo 1.19** e no **Desafio 1.10** passa pela reformulação do conceito de injetividade em termos do estudo dos zeros do gráfico de uma função, dado pelo próximo teorema:

**Teorema 1.3.2 — Funções Injectivas vs Zeros.**  $f : D \rightarrow Y$  é uma **função injectiva** se, e só se, para cada ponto  $(a, b)$  do gráfico de  $f$ ,  $x = a$  é o **único zero** da função

$$x \mapsto y = f(x) - b.$$

*Ideia da demonstração.* Supondo que  $f : D \rightarrow Y$  é injectiva é equivalente a dizer que, para cada  $y \in D'$ , a equação

$$y = f(x)$$

tem sempre solução única. Caso  $x = a$  seja um zero da função auxiliar

$$x \mapsto f(x) - b,$$

este **terá de ser o único zero** para provarmos a injetividade de  $f : D \rightarrow Y$ , e vice versa. ■

A fórmula resolvente, a ser deduzida mais adiante no **Exemplo 1.41** permite-nos facilmente formular o seguinte resultado:

**Teorema 1.3.3 — Zeros de funções quadráticas.** Seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Então, a função  $f$ :

- (i) Não admite zeros se  $\Delta < 0$ ;
- (ii) Admite um único zero se  $\Delta = 0$ ;
- (iii) Admite dois zeros se  $\Delta > 0$ .

Adicionalmente, para o caso  $\Delta \geq 0$ , tem-se que

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

são os zeros da função  $f$ .

Iremos voltar na subseção **1.5.1 Funções Polinomiais** ao estudo de zeros de funções polinomiais. Como preparação para esta seção, sugerimos ao leitor que resolva os seguintes desafios com recurso ao **Teorema 1.3.3**.

**Desafio 1.11 — Existência de raízes para um polinómio de grau 2.** Determine para que valores de  $c \in \mathbb{R}$ , o polinómio  $p_2(x) = -2x^2 + 8x + c$ :

- (a) Não admite zeros;
- (b) Admite um único zero;
- (c) Admite dois zeros.

**Desafio 1.12 — Raízes de polinómios de grau 3.** Consideremos expressões do tipo  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  com  $a \neq 0$ . Fixando  $a = 1$  e  $d = 0$  escolha os parâmetros reais  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$  de modo que a função cúbica admita:

- (i) Um único zero;
- (ii) dois zeros;
- (iii) três zeros.

**RECURSO À TECNOLOGIA:** Utilizando o GeoGebra, visualize o gráfico em cada caso, assinalando os respetivos zeros e justifique, usando a lei do anulamento do produto.

**Definição 1.3.3 — Sinal da função.** Diz-se que a função  $f$ :

- É positiva se  $f(x) > 0$  para todo  $x \in D_f$ ;
- É não-negativa se  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in D_f$ ;
- É negativa se  $f(x) < 0$  para todo  $x \in D_f$ ;
- É não-positiva se  $f(x) \leq 0$  para todo  $x \in D_f$ .



- O gráfico de uma função positiva (resp. negativa) está acima (resp. abaixo) do eixo  $Ox$ ;
- O gráfico de uma função não-negativa (resp. não-positiva) está acima (resp. abaixo) do eixo  $Ox$  e intersecta-o pelo menos num ponto.

A maior parte das funções não têm sinal constante em todo o seu domínio. Por isso é necessário resolver equações e inequações para construir um quadro de sinais da função.

### Sinal da função afim

Já vimos que a função afim  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$  tal que  $f(x) = mx + b$  com  $m \neq 0$  e  $b \in \mathbb{R}$  tem apenas um zero de valor  $x_0 = -\frac{b}{m}$ . Então:

(i) Se  $m > 0$  então  $f$  é negativa em  $]-\infty, x_0[$  e positiva em  $]x_0, +\infty[$ . Eis o quadro de sinais:

$x$		$x_0$	
$f(x)$	-	0	+

(ii) Se  $m < 0$  então  $f$  é negativa em  $]x_0, +\infty[$  e positiva em  $]-\infty, x_0[$ . Eis o quadro de sinais:

$x$		$x_0$	
$f(x)$	+	0	-

**Desafio 1.13** Esboce o gráfico da função,  $x \mapsto \operatorname{sgn}(f(x))$ , onde:

(i)  $x \mapsto f(x)$  é a função representada pela recta do **Exemplo 1.1**;

(ii)  $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$  é a função sinal do **Exemplo 1.12**.

De seguida, use o gráfico da função  $x \mapsto \operatorname{sgn}(f(x))$  para estudar o sinal da função  $x \mapsto f(x)$ .

**Desafio 1.14** Estude o sinal das funções afins associadas às rectas  $s$  e  $t$  do **Desafio 1.3**.

### Sinal da função quadrática

Existem pelo menos duas estratégias imediatas de determinar o sinal da função quadrática:

(i) A primeira passa por transformar uma função quadrática como produto de funções afins, com recurso ao **Teorema 1.5.1** que aparece na **Subseção 1.5.1 Funções Polinomiais**.

(ii) A segunda estratégia passa pelo estudo do sinal do discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  e das concavidades (que iremos abordar mais à frente no **Teorema 1.4.2**).

■ **Exemplo 1.20 — Sinal da função quadrática no caso de existirem raízes.** Suponha que:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem pelo menos um zero ( $\Delta \geq 0$ ) e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , tais que  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , são os zeros de  $f(x)$  determinados pelo **Teorema 1.3.3**.

No caso de termos raízes iguais ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ), o **Teorema 1.5.1** permite-nos reescrever  $f(x)$  na forma

$$f(x) = a(x - \lambda_1)^2.$$

Assim sendo, o sinal de  $f$  coincide com sinal da constante  $a$ , i.e.

- $f(x) \geq 0$  se  $a > 0$ ;
- $f(x) \leq 0$  se  $a < 0$ ;

Caso contrário, temos de construir o quadro de sinais de  $f(x) = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ . **Para valores de  $a > 0$ , temos**

$x$		$\lambda_1$		$\lambda_2$	
$x - \lambda_1$	-	0	+	+	+
$x - \lambda_2$	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+

Então  $f$ :

- É negativa em  $\lambda_1, \lambda_2[$ ;
- É não-negativa no intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$ ;

- É positiva em  $]-\infty, \lambda_1] \cup [\lambda_2, +\infty[$ ;
- É não-positiva em  $]-\infty, \lambda_1] \cup [\lambda_2, +\infty[$ .

**O estudo do sinal para valores de  $a < 0$  deixamos ao cargo do leitor.** ■

**Desafio 1.15 — Vide Desafio 1.11.** Determine para que valores de  $c \in \mathbb{R}$  a igualdade

$$|-2x^2 + 8x + c| - 2c = -2x^2 + 8x - c$$

é sempre satisfeita.

### Sinal da função raiz quadrada

Recorrendo ao gráfico da função  $g$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$ , dado no **Exemplo 1.13**, é facil de concluir que a função  $h$ ,

$$x \mapsto \sqrt{f(x)},$$

apenas está definido para o caso de  $x \mapsto f(x)$  ser uma função não-negativa em todos os pontos do seu domínio. Adicionalmente  $x \mapsto \sqrt{f(x)}$  é positiva se  $f$  também é uma função positiva (i.e. não admite zeros).

### 1.3.3 Paridade e Simetria

**Definição 1.3.4 — Paridade e Simetria.** Considere-se que o domínio  $D_f$  da função  $f$  é simétrico em relação à origem, i.e.,

$$x \in D_f \iff -x \in D_f$$

para todo  $x$ . Diz-se que a função  $f$ :

(i) É par se  $f(-x) = f(x)$  para todo o  $x \in D_f$ .

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo  $Oy$ , isto é,

$$(x, y) \in \text{graf}(f) \iff (-x, y) \in \text{graf}(f)$$

(ii) É ímpar se  $f(-x) = -f(x)$  para todo o  $x \in D_f$ .

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem, isto é,

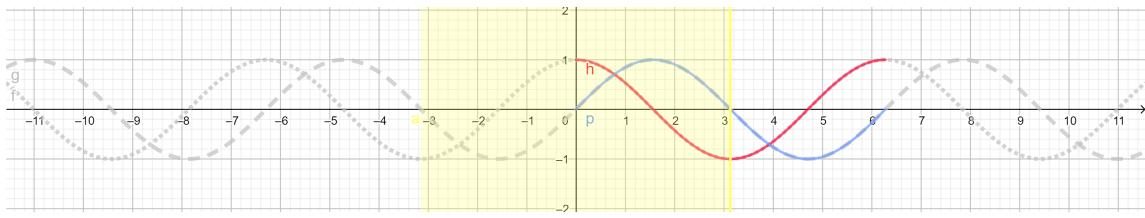
$$(x, y) \in \text{graf}(f) \iff (-x, -y) \in \text{graf}(f)$$



Com base na definição acima, podemos facilmente verificar que as funções identidade ( $x \mapsto x$ ) e sinal do **Exemplo 1.10** e **Exemplo 1.12**, respectivamente, são exemplos de funções ímpares.

Por outro lado, função módulo ( $x \mapsto |x|$ ) tratada no **Exemplo 1.11** é par.

■ **Exemplo 1.21 — Importância do domínio ser simétrico.** Os gráficos das funções cosseno (a pontilhado) e seno (a tracejado) correspondem a dois exemplos de funções pares e ímpares, respectivamente.



Se considerássemos a restrição de ambos os gráficos ao intervalo  $[0, 2\pi]$ , observaríamos que o gráfico das funções  $\cos : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$  (a magenta) e  $\sin : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$  (a azul) não nos permitia definir funções pares e ímpares, pois falha a condição de simetria em relação ao eixo  $Oy$  – para termos uma função par – e à origem  $O = (0, 0)$  – para termos uma função ímpar.

No entanto, caso restringíssemos o traçado de ambos os gráficos ao intervalo  $[-\pi, \pi]$  (região delimitada a amarelo no gráfico), já poderíamos afirmar que:

- $\cos : [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  é uma função par;
- $\sin : [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  é uma função ímpar.

**Corolário 1.3.4 — Zero de função ímpar.** Se  $f : D \rightarrow Y$  é uma função ímpar e  $x = 0 \in D$  então  $f(0) = 0$ .

*Ideia da demonstração.* É automática com base na igualdade  $0 = -0$  e na equação  $f(0) = -f(-0)$ .



No **Exemplo 1.21** considerámos o caso das funções trigonométricas seno e cosseno.

A igualdade  $\sin(0) = 0$  permite-nos verificar que a função seno verifica o resultado obtido no **Corolário 1.3.4**. Por outro lado, a igualdade  $\cos(0) = 1$  corresponde a um exemplo particular de uma função nas seguintes condições:

- (i)  $f : D \rightarrow Y$  é par;
- (ii)  $0 \in D$ ;
- (iii)  $f(0) \neq 0$ .

**Desafio 1.16** Dê um exemplo de uma **função ímpar**  $f$  em que  $x = 0 \notin D_f$ .

■ **Exemplo 1.22 — Paridade da função potência.** Sendo  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \neq 1$ , definimos a função potência de expoente  $n$ ,  $x \mapsto g_n(x) = x^n$ .

- (i) Se  $n$  é par então  $g_n$  é uma função par;
- (ii) Se  $n$  é ímpar então  $g_n$  é uma função ímpar.

Se  $n$  é par então  $n = 2k$  com  $k \in \mathbb{N}$ . Para todo o real  $x$  temos

$$g_n(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k} = x^{2k} = x^n = g_n(x).$$

Por outro lado, se  $n$  é ímpar então  $n = 2k + 1$  com  $k \in \mathbb{N}$ . Para todo o real  $x$  temos

$$g_n(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -x^n = -g_n(x).$$

■ **Exemplo 1.23 — Nem par nem ímpar.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - x$  não é par nem ímpar. Por exemplo, vejamos que  $f(-1) = 2$  e  $f(1) = 0$ , logo

$$f(-1) \neq f(1) \quad \wedge \quad f(-1) \neq -f(1).$$

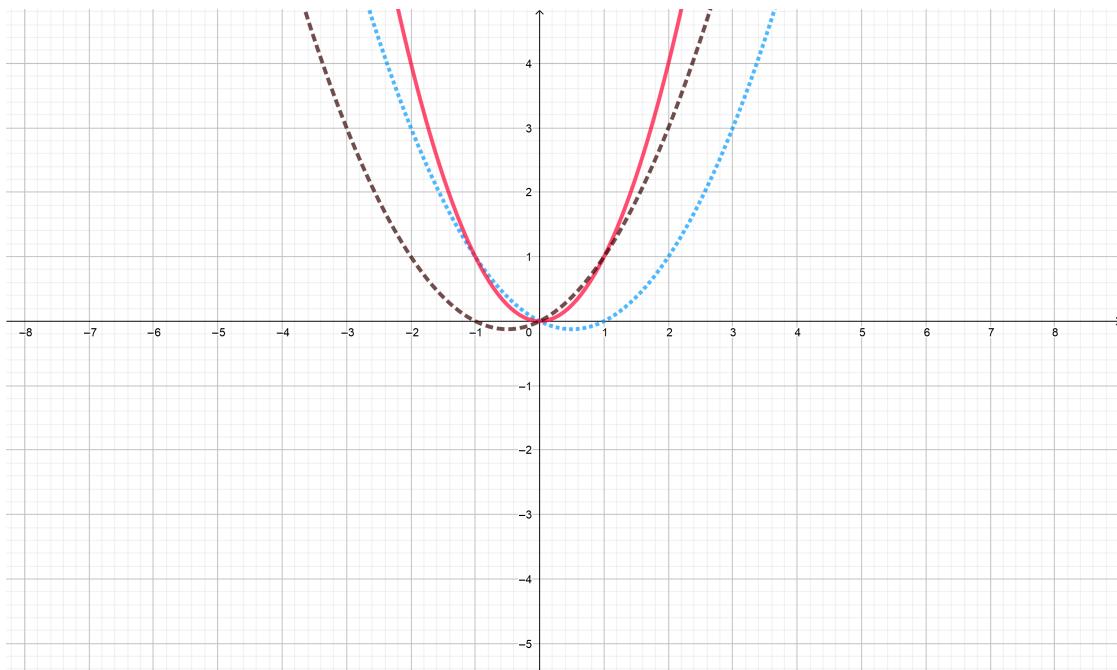


Figura 1.5: Ilustração gráfica da determinação da parte par da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - x$  (a magenta) como o gráfico resultante da sobreposição dos gráficos das funções  $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$  (pontilhado a azul ciano) e  $x \mapsto \frac{1}{2}f(-x)$  (tracejado a castanho).

**Desafio 1.17 — Função Par.** Sendo  $f : D \rightarrow D'$  uma função par, diga justificando, qual das seguintes funções abaixo **não é par**.

- (a)  $x \mapsto xf(x)$ ;
- (b)  $x \mapsto |x|f(x)$ ;
- (c)  $x \mapsto f(|x|)$ ;
- (d)  $x \mapsto |f(x)|$ .

**Desafio 1.18 — Função Ímpar.** Sendo  $f : D \rightarrow D'$  uma função ímpar, diga justificando, qual das seguintes funções abaixo **não é ímpar**.

- (a)  $x \mapsto x^2 f(x)$ ;
- (b)  $x \mapsto xf(x^2)$ ;
- (c)  $x \mapsto x^2 f(x) + x$ ;
- (d)  $x \mapsto x^2 f(x) + |x|$ .

O **Teorema 1.3.5** assim como o **Corolário 1.3.6** que enunciaremos a seguir poderão vir a ser úteis para resolver o **Desafio 1.17 & o Desafio 1.18**.

**Teorema 1.3.5 — Parte par e parte ímpar de uma função.** Suponha que o domínio  $D$  de  $f$  é simétrico em relação à origem.

Então a função  $f : D \rightarrow Y$  pode ser reescrita na forma  $f(x) = g(x) + h(x)$ , onde

- $g : D \rightarrow Y$  definida por

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

é uma **função par**;

- $g : D \rightarrow Y$  definida por

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

é uma **função ímpar**.

*Ideia da Demonstração.* Observe que as funções  $g$  e  $h$  podem ser determinadas a partir da identidade

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{=g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{=h(x)}.$$

A prova de que  $g$  é **par** e  $h$  é **ímpar** é uma consequência directa da **Definição 1.3.4**. ■



**O Teorema 1.3.5** permite-nos determinar sempre uma função par e uma função ímpar, independentemente da paridade de  $f$ .

No caso particular do **Exemplo 1.23**, tem-se que  $f$  pode ser escrita como a soma de  $x \mapsto x^2$  (que é par) e da função  $x \mapsto -x$  (que é ímpar).

**Corolário 1.3.6 — Reformulação de paridade.** Suponha que o domínio  $D$  de  $f$  é simétrico em relação à origem. Então a função  $f : D \rightarrow Y$ :

- É **par** se, e só se  $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ ;
- É **ímpar** se, e só se  $f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ .

Duas entre as várias aplicações directas do **Corolário 1.3.6** é o próximo desafio, e as funções hiperbólicas que estudaremos na subseção **1.5.5 Funções Hiperbólicas**.

**Desafio 1.19** Para a função definida por  $x \mapsto f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ , mostre que:

1.  $\frac{1+x^2}{1-x^2}$  é a parte par de  $f$ .
2.  $\frac{2x}{1-x^2}$  é a ímpar de  $f$ .
3. A parte par e ímpar de  $f$  satisfazem a igualdade

$$\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2 - \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2 = 1.$$

O seguinte corolário também poderá vir a ser útil no estudo de funções.

**Corolário 1.3.7 — Paridade vs. Injectividade.** Suponha que o domínio  $D$  de  $f$  é simétrico em relação à origem. Se  $f : D \rightarrow Y$  é uma função par, então  $f$  **não é injectiva**.

*Ideia da demonstração.* A demonstração decorre da definição de injectividade. De facto, para pontos da forma

$$x_1 = x \quad \text{e} \quad x_2 = -x$$

verifica-se sempre  $f(x_1) = f(x_2)$  e  $x_1 \neq x_2$ , desde que  $x \neq 0$ . ■

### 1.3.4 Periodicidade e Limitação

**Definição 1.3.5 — Função Periódica.** Diz-se que a função  $f$  é **periódica de período  $T$** , se  $T > 0$  é o menor número real positivo para o qual se tem

$$f(x+T) = f(x), \text{ para todo } x \in D_f.$$

■ **Exemplo 1.24 — Período de funções trigonométricas.** As funções trigonométricas seno,  $x \mapsto \sin(x)$ , e cosseno,  $x \mapsto \cos(x)$ , são periódicas de período  $2\pi$ , ao par que as funções trigonométricas<sup>2</sup> tangente e cotangente

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

são periódicas de período  $\pi$ . ■

■ **Exemplo 1.25 — Relações Trigonométricas.** Segue das identidades trigonométricas

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \& \quad \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

que  $\sin^2(x)$  e  $\cos^2(x)$  são funções periódicas de período  $\pi$ .

De facto, decorre da resolução das equações acima em ordem a  $\sin^2(x)$  e  $\cos^2(x)$ :

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \& \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Logo o período de ambas coincide com o período da função  $x \mapsto \cos(2x)$ .

Finalmente, usando o facto da função cosseno ser uma função periódica, de período  $2\pi$ , a sequência de igualdades:

$$f(x) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2(x + \pi)) = f(x + \pi)$$

permite-nos concluir que  $T = \pi$ . ■

**Desafio 1.20 — Funções Periódicas.** Verifique que as funções  $x \mapsto \tan^2(x)$  e  $x \mapsto \cot^2(x)$  são também funções periódicas de período  $\pi$ .

**Corolário 1.3.8 — Funções Periódicas vs Injectividade.** Se  $f : D \rightarrow Y$  é uma função periódica, então  $f$  não é injectiva.

*Ideia da demonstração.* À semelhança da demonstração do **Corolário 1.3.7**, a demonstração segue automaticamente da escolha de pontos  $x_1$  e  $x_2$  da forma

$$x_1 = x \quad \text{e} \quad x_2 = x + T.$$

■

**Definição 1.3.6 — Função Limitada.** Diz-se que a função  $f$  é **limitada** se existirem dois números reais  $m$  e  $M$  tais que

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in D_f.$$

Adicionalmente, se  $m = -M$  a condição anterior é equivalente a

$$|f(x)| \leq M, \text{ para todo } x \in D_f.$$

<sup>2</sup>Ambas as expressões  $\tan(x)$  ou  $\text{tg}x$  representam a tangente de  $x$ . De modo análogo, cotangente de  $x$  é representada por  $\cot(x)$  ou  $\text{cotg}x$ .

A definição acima diz-nos essencialmente que para  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ser limitada o seu contradomínio  $D'$  terá que ser um conjunto limitado, i.e.

$$y \in D' \Rightarrow m \leq y \leq M.$$



Das funções tratadas no **Exemplo 1.10**, **Exemplo 1.11** & **Exemplo 1.12** apenas a função sinal,  $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ , é limitada.

■ **Exemplo 1.26 — Funções limitadas envolvendo relações trigonométricas.** Voltemos novamente às funções periódicas  $x \rightarrow \sin^2(x)$  e  $x \mapsto \cos^2(x)$  do **Exemplo 1.25**. Do facto de

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1,$$

segue que a sequência de (des)igualdades abaixo:

$$0 = \frac{1}{2}(1-1) \leq \underbrace{\frac{1+\cos(2x)}{2}}_{=\cos^2(x)} \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$0 = \frac{1}{2}(1-1) \leq \underbrace{\frac{1-\cos(2x)}{2}}_{=\sin^2(x)} \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

é satisfeita para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

EM SUMA: Verificámos que  $x \rightarrow \sin^2(x)$  e  $x \mapsto \cos^2(x)$  estão nas condições da **Definição 1.3.6**. Em ambos os casos, obtivémos as constantes  $m = 0$  e  $M = 1$ . ■



Das funções periódicas a tratar mais à frente na subseção **1.5.8 Funções Trigonométricas**, apenas as funções  $x \mapsto \sin(x)$  e  $x \mapsto \cos(x)$  são funções limitadas, uma vez que o contradomínio de ambas é dado pelo conjunto

$$[-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq 1\}.$$

■ **Exemplo 1.27 — Função Limitada.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

é limitada.

De facto, da propriedade de módulos

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

decorre que

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1.$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Geometricamente, a condição acima corresponde a dizer que o gráfico da função  $f$  – representado na figura abaixo a **mangenta** – está compreendido entre as retas horizontais, de equação

$$y = -1 \quad \text{e} \quad y = 1, \quad \text{respectivamente.}$$

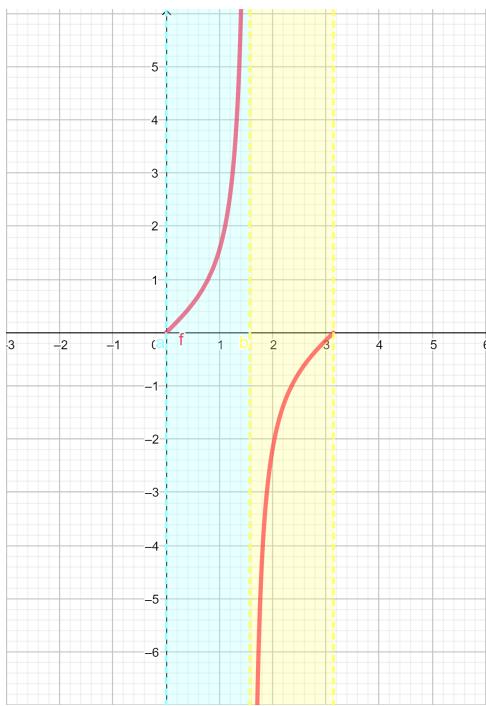
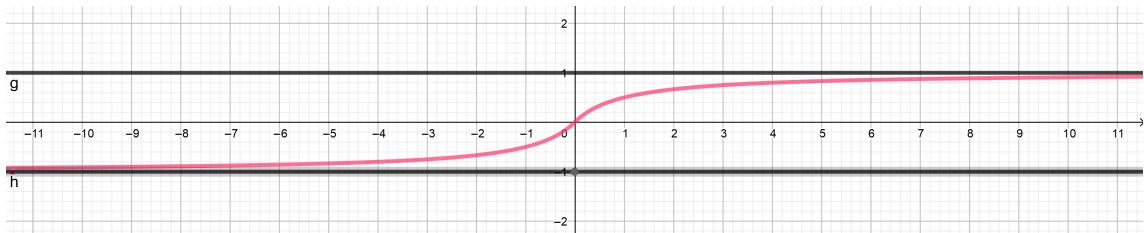


Figura 1.6: Na figura encontra-se representada a função declive  $d$ . A região delimitada pelas rectas de equação  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (a azul) corresponde a funções de declive positivo ( $d(\alpha) > 0$ ), enquanto que a região delimitada pelas retas de equação  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  e  $\alpha = \pi$  (a amarelo) corresponde a funções de declive negativo ( $d(\alpha) < 0$ ).



Note-se ainda que  $f$  nunca intersecta as rectas de equações  $y = \pm 1$ . Este facto permite-nos concluir, em particular, que as equações

$$f(x) = -1 \quad \text{e} \quad f(x) = 1$$

não admitem soluções.

Esta última observação permite-nos mostrar que  $f$  **não é sobrejectiva**. ■

■ **Exemplo 1.28 — Função Ilimitada.** O resultado obtido no **Corolário 1.1.3** permite-nos a partir da equação

$$m = \tan(\alpha)$$

obter a representação do gráfico da função  $d : ]0, \pi[ \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d(\alpha) = \tan(\alpha)$  no plano  $\alpha Om$ .

Esta função permite-nos construir uma família de rectas que passam pela origem do referencial  $xOy$ :

$$y = \tan(\alpha)x, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}.$$

Para este caso é fácil de verificar intuitivamente que  $d$  não é uma função limitada, uma vez que para cada  $M > 0$  é possível construir uma recta de inclinação  $\alpha$ , que passa pelos quadrantes ímpares, com declive superior ao declive da reta de equação

$$y = Mx$$

i.e. que satisfaça a inequação  $\tan(\alpha) > M$ . ■

Em geral, sempre que estamos perante uma função limitada podemos inferir o seguinte resultado:

**Corolário 1.3.9 — Função limitada vs sobrejectividade.** Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada, então  $f$  não é sobrejectiva.

*Ideia da demonstração.* Com efeito, se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a condição  $m \leq f(x) \leq M$ , então a equação

$$y = f(x)$$

não admite solução para valores de

$$y > M \quad \vee \quad y < m.$$
■



A função do **Exemplo 1.27** é injectiva mas não é sobrejectiva. No entanto, a prova da injectividade não é trivial, ao contrário da prova realizada no **Exemplo 1.16**.

Com efeito, a igualdade

$$\frac{x_1}{1 + |x_1|} = \frac{x_2}{1 + |x_2|}$$

é equivalente a termos

$$x_1 + x_1|x_2| = x_2 + x_2|x_1|.$$

Esta última igualdade apenas nos permite concluir que  $x_1 = x_2$  no caso de  $x_1 x_2 \geq 0$  (i.e. apenas quando  $x_1$  e  $x_2$  têm o mesmo sinal).

Uma possibilidade para contornarmos esta limitação algébrica passa pelo estudo da monotonia do gráfico, como iremos detalhar mais à frente na subseção **1.3.5 Monotonia e Concavidades**.

### 1.3.5 Monotonia e Concavidades

**Definição 1.3.7 — Monotonia da função.** Diz-se que a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- (i) É estritamente crescente se  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$  para  $x_1 \in D$  e  $x_2 \in D$ .
- (ii) É crescente se  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$  para  $x_1 \in D$  e  $x_2 \in D$ .
- (iii) É estritamente decrescente se  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$  para  $x_1 \in D$  e  $x_2 \in D$ .
- (iv) É decrescente se  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$  para  $x_1 \in D$  e  $x_2 \in D$ .

Diz-se ainda que a função  $f$  é (estritamente) monótona em  $D$  se é (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente.

Decorre da definição de monotonia o seguinte resultado:

**Corolário 1.3.10 — Monotonia vs Injectividade.** Toda a função estritamente monótona é injectiva.

*Demonstração.* Decorre da definição de monotonia que **toda a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  estritamente monótona** satisfaz a implicação

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

para  $x_1, x_2 \in D$ , arbitrários. Logo  $f$  é injectiva. ■



As funções do **Exemplo 1.14** e do **Exemplo 1.16** são **exemplos de funções injectivas que não são monótonas**. Isto permite-nos concluir que **nem toda a função injectiva é monótona**.

**Desafio 1.21** Dê um exemplo de uma função injectiva que não seja estritamente monótona.



Das funções tratadas nos **Exemplo 1.11** e **Exemplo 1.12**, apenas a função sinal é crescente. No entanto não é estritamente crescente. No caso do **Exemplo 1.11** o facto de esta não ser injectiva é suficiente para provar que esta não é estritamente monótona.



Os gráficos das restrições das funções cosseno e seno ao intervalo  $[0, 2\pi]$  – vide **Exemplo 1.21** – permite-nos concluir que em nenhum dos casos estamos perante funções monótonas.

Uma forma de reformular geometricamente o conceito de monotonia de uma função passa pelo estudo do declive de rectas secantes ao gráfico de  $f$  em dois pontos do domínio distintos.

**Definição 1.3.8 — Recta secante ao gráfico.** Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dois pontos distintos pertencentes ao gráfico de  $f : D \rightarrow Y$ .

Dizemos que a recta  $r$  que passa por  $P_1$  e  $P_2$  é secante ao gráfico de  $f$ .

Nas condições do **Teorema 1.1.2**, o declive dessa recta secante é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

**Teorema 1.3.11 — Teste das rectas secantes.** Sejam  $x, x+h \in D$ , com  $h > 0$ , e

$$m(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

<sup>a</sup> o **declive da recta secante** ao gráfico de  $f$  nos pontos  $P_1 = (x, f(x))$  e  $P_2 = (x+h, f(x+h))$ .

Diz-se que a função  $f : D \rightarrow Y$ :

- (i) É estritamente crescente se  $m(x, h) > 0$  (declive positivo).
- (ii) É crescente se  $m(x, h) \geq 0$  (declive não negativo).
- (iii) É estritamente decrescente se  $m(x, h) < 0$  (declive negativo).
- (iv) É decrescente se  $m(x, h) \leq 0$  (declive não positivo).

<sup>a</sup>Note-se que  $m$  depende tanto de  $x$  como de  $h$ .



Caso particular do **Teorema 1.3.11**: Consideremos a função afim  $x \mapsto y = mx + b$ . Toda a recta secante ao seu gráfico em dois pontos distintos coincide com o próprio gráfico. Assim, facilmente se verifica que a constante  $m$  coincide com o declive da recta secante nos pontos

$$P_1 = (x, mx + b) \quad \& \quad P_2 = (x + h, m(x + h) + b)$$

i.e.,  $m(x, h) = m$ .

Contudo, a **função constante não é uma função estritamente monótona** uma vez que esta define sempre uma recta secante de declive zero (i.e. uma recta horizontal da forma  $y = b$ ).

■ **Exemplo 1.29 — Função quadrática.** Para a função quadrática  $x \mapsto f(x) = -2x^2 + 8x + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) abordada no **Desafio 1.15**, obtemos para valores de  $x \in \mathbb{R}$  e  $h > 0$  que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= -2 \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + 8 \frac{(x+h) - x}{h} \\ &= -2 \frac{2xh + h^2}{h} + 8 \frac{h}{h} \\ &= -4x - 2h + 8 \end{aligned}$$

Portanto,  $m(x, h) = -4x - 2h + 8$  dá-nos o **declive da recta secante**. A expressão acima permite-nos concluir que se trata de uma função que não é monótona em todos os pontos do seu domínio, uma vez que a função (na variável  $x$ )

$$x \mapsto -4x - 2h + 8$$

toma simultaneamente valores positivos e negativos em todos os pontos do seu domínio.

Em concreto:

- é estritamente crescente (resp. crescente) para  $x < \frac{h}{2} - 2$  (resp.  $x \leq \frac{h}{2} - 2$ );
- é estritamente decrescente (resp. crescente) para  $x > \frac{h}{2} - 2$  (resp.  $x \geq \frac{h}{2} - 2$ ).

■

**Desafio 1.22 — Declive recta secante para a função módulo.** Mostre que o declive da recta secante da função módulo nos pontos  $(x, |x|)$  e  $(x + h, |x + h|)$  – vide **Exemplo 1.11** – satisfaz a igualdade

$$\frac{|x+h| - |x|}{h} = \frac{2x + h}{|x+h| + |x|}.$$

SUGESTÃO: Vide **Desafio 1.6**.

**Desafio 1.23** Considere a função do **Exemplo 1.14**.

- Verifique que o domínio  $D$  se pode escrever na forma duma reunião de intervalos  $D = D_1 \cup D_2$ .
- Estude a monotonía das funções  $g_i : D_i \rightarrow D_i$ , definidas por  $g_i(x) = \frac{1}{x}$ ,  $i = 1, 2$ .
- Estude a monotonía da função do **Exemplo 1.14**,  $x \mapsto y = \frac{1}{x}$  em  $D$ .

**Desafio 1.24 — Monotonía duma função envolvendo módulo.** Esboce o gráfico da função  $x \mapsto x + |x - 1|$  e verifique que é crescente mas não é estritamente crescente.

### Concavidades de gráficos

**Definição 1.3.9 — Funções côncavas e convexas.** Dizemos que uma função  $f : D \rightarrow Y$ :

1. É **côncava** se, e só se, a desigualdade

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

é sempre satisfeita para  $x_1, x_2 \in D$ , arbitrários, e para todo  $t \in [0, 1]$ .

2. É **convexa** se, e só se, a desigualdade

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

é sempre satisfeita para  $x_1, x_2 \in D$ , arbitrários, e para todo  $t \in [0, 1]$ .



A Definição 1.3.9 permite-nos afirmar que:

1. A função  $x \mapsto f(x)$  é côncava se, e só se,  $x \mapsto -f(x)$  é convexa.
2. A função  $x \mapsto f(x)$  é convexa se, e só se,  $x \mapsto -f(x)$  é côncava.



Com base na definição acima, é fácil de verificar que as funções afins,  $x \mapsto mx + b$ , são funções **simultaneamente côncavas e convexas**.

■ **Exemplo 1.30 — Função módulo é convexa.** Decorre da desigualdade triangular<sup>3</sup>

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

que a função módulo,  $x \mapsto |x|$ , (vide Exemplo 1.11) é convexa.

De facto, para pontos arbitrários  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq t \leq 1$ , os pontos  $a = (1-t)x_1$ , e  $b = tx_2$  satisfazem

$$|(1-t)x_1| = (1-t)|x_1| \quad \& \quad |tx_2| = t|x_2|.$$

Portanto,

$$|(1-t)x_1 + tx_2| \leq (1-t)|x_1| + t|x_2|.$$

■



A desigualdade triangular também pode ser utilizada para demonstrar que  $x \mapsto -|x|$  é uma função côncava.

Para interpretarmos geometricamente as noções de funções côncavas e convexas, começemos por observar que o segmento de recta  $[P_1P_2]$  que une os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  pode ser definido em termos do conjunto

$$[P_1P_2] = \{((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

<sup>3</sup>Para obter a desigualdade triangular, note que as desigualdades  $-|a| \leq a \leq |a|$  &  $-|b| \leq b \leq |b|$  são sempre satisfeitas, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ .

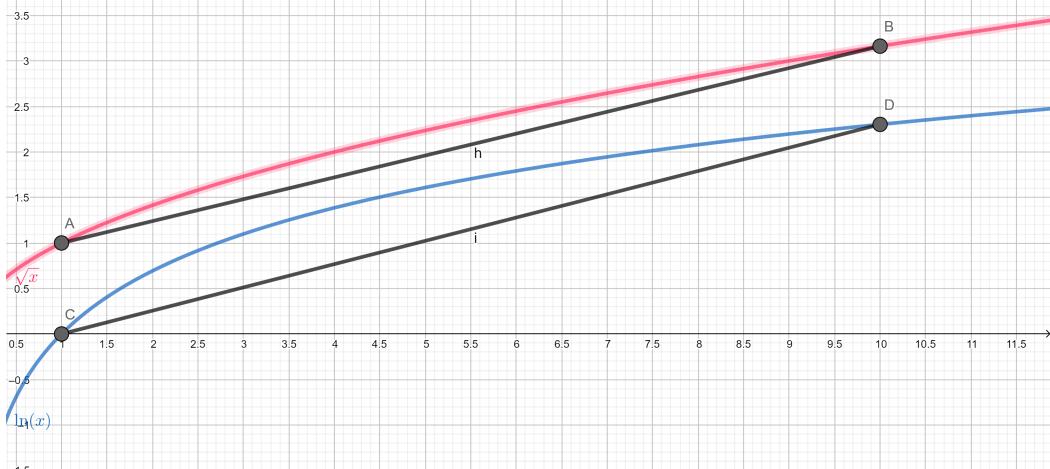


Figura 1.7: Na figura encontram-se representadas as rectas secantes aos gráficos de  $x \mapsto \sqrt{x}$  (a magenta) &  $x \mapsto \ln(x)$  (a azul) nos pontos  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 10$ . Em ambos os casos, temos que o gráfico de ambas restrito ao intervalo  $I = [1, 10]$  situa-se sempre acima da respectiva recta secante.

Assim, dizemos que  $f : D \rightarrow Y$  **côncava** (resp. **convexa**) se, e só se, para  $x_1, x_2 \in D$ , arbitrários, a reta secante ao gráfico de  $f$  em  $P_1 = (x_1, f(x_1))$  e  $P_2 = (x_2, f(x_2))$  situa-se **abaixo** (resp. **acima**) do gráfico de  $f$  no intervalo

$$I = \{(1-t)x_1 + tx_2 : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Note que se assumirmos  $x_1 < x_2$  vem  $I = [x_1, x_2]$ .

■ **Exemplo 1.31 — Funções côncavas.** Os gráficos das funções raiz quadrada  $x \mapsto \sqrt{x}$  e logaritmo  $x \mapsto \ln(x)$  correspondem a dois exemplos de funções côncavas. Na verdade, podemos verificar geometricamente que é possível traçar sempre rectas secantes que se situam sempre abaixo do gráfico de  $f$  restrito a intervalos da forma

$$I = \{(1-t)x_1 + tx_2 : 0 \leq t \leq 1\}.$$

■

Os conceitos de funções côncava e convexa são difíceis de tratar na prática. Sendo assim, usaremos esses termos para uma função tendo por base a forma do respectivo gráfico, nomeadamente relacionamos com concavidades do gráfico (tal como para as parábolas).

■ **Definição 1.3.10 — Concavidades do gráfico (definição informal).** Diz-se que  $f : D \rightarrow Y$ :

- (i) É côncava quando o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo.
- (ii) É convexa quando o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima.

■ **Exemplo 1.32 — Função quadrática.** Para o caso particular da função quadrática  $x \mapsto x^2$  tratada no **Exemplo 1.8** a demonstração de que é convexa, por definição, é deveras não trivial pois teríamos de provar que a desigualdade da forma

$$((1-t)x_1 + tx_2)^2 \leq (1-t)(x_1)^2 + t(x_2)^2,$$

é sempre satisfeita para  $x_1, x_2 \in D$ , arbitrários, e para todo  $0 \leq t \leq 1$ .

Graficamente, a constatação de que se trata de uma função convexa é imediata. ■

## 1.4 Operações e Transformações

### 1.4.1 Igualdade e Restrição

**Definição 1.4.1 — Igualdade entre funções.** As funções  $f$  e  $g$  dizem-se que são iguais, escrevemos  $f = g$ , se

- (i)  $D_f = D_g$  (O mesmo domínio)
- (ii)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in D_f$  (expressões de  $f$  e  $g$  coincidentes).

■ **Exemplo 1.33 — Domínios diferentes.** As funções  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = x + 1 \quad \& \quad g(x) = x + 1$$

não coincidem uma vez que os domínios são diferentes. ■

■ **Exemplo 1.34 — Conjuntos de chegada diferentes.** A identidade binomial

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

permite-nos afirmar que as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definidas por

$$f(x) = (x + 1)^2 \quad \& \quad g(x) = x^2 + 2x + 1$$

são iguais. ■

**Notação 1.4 — Números reais não negativos.** No exemplo acima foi utilizada a notação  $\mathbb{R}_0^+$  para denotar o conjunto de todos os **números reais não negativos**, i.e.

$$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Em vários livros de texto este conjunto é também representado pelo intervalo  $[0, +\infty[$ , i.e.

$$\mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty[.$$



No **Exemplo 1.34** verificámos, com base na **Definição 1.4.1**, que as funções  $f$  e  $g$  coincidem, mesmo estando definidas para conjuntos de chegada diferentes. No entanto, o contradomínio de ambas é igual a  $\mathbb{R}_0^+$ , uma vez que<sup>4</sup>

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0, \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}.$$

■ **Definição 1.4.2 — Restrição da função.** Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Diz-se que  $f$  é uma **restrição de  $g$  a  $I$**  se

- (i)  $I \subseteq D_g$
- (ii)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in I$ .



O **Exemplo 1.33** permite-nos concluir que  $f$  é a restrição de  $g$  ao conjunto  $I = \mathbb{Z}$ .

### 1.4.2 Soma, Produto e Quociente

<sup>4</sup>Note que o quadrado  $r^2$  de qualquer número real é sempre um número não negativo, i.e.  $r^2 \geq 0$ , para todo o  $r \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.4.1 — Operações com domínios de funções.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de domínio  $D_f$  e  $D_g$ , respectivamente.

Então as seguintes propriedades são verdadeiras:

- (i) O domínio da **função Soma**,  $x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , é dado pela interseção de conjuntos  $D_f \cap D_g$ , i.e.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

- (ii) O domínio da **função Produto**,  $x \mapsto (f \times g)(x) = f(x)g(x)$ , é dado pela interseção de conjuntos  $D_f \cap D_g$ , i.e.

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

. Em particular, se  $f$  é uma função constante,  $x \mapsto k$ ,  $k \neq 0$ , temos  $(k \times g)(x) = kg(x)$ .

- (iii) O domínio da **função Quociente**,  $x \mapsto (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , é dado pela interseção de conjuntos  $D_f \cap D_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$ , i.e.

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$$

. Em particular, a **função Recíproca** de  $g$ , definida por  $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ , tem domínio

$$D_{1/g} = D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$



A função diferença satisfaz  $(f - g)(x) = (f + (-g))(x) = f(x) - g(x)$ .

■ **Exemplo 1.35 — Funções Soma e Produto.** Com base no estudo do gráfico das funções,  $x \mapsto \sqrt{x}$  e  $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ , no **Exemplo 1.13** e no **Exemplo 1.9**, respectivamente, podemos facilmente verificar que

$$[0, 1] = [0, +\infty[ \cap [-1, 1]$$

é o domínio da funções  $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2}$  &  $x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{1 - x^2}$ , sendo:

- $[0, +\infty[$  o domínio de  $\sqrt{x}$ ;
- $[-1, 1]$  o domínio de  $\sqrt{1 - x^2}$ .



No exemplo referido acima somos tentados a afirmar, com base nas propriedades envolvendo radicais<sup>5</sup>, que o domínio da função,  $x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{1 - x^2}$ , coincide com o domínio da função,  $x \mapsto \sqrt{x - x^3}$ , **o que não é verdade**.

Caso tenha dúvidas, procure representar simultaneamente no GeoGebra o gráfico de ambas as funções. Com o gráfico poderá ainda concluir, à semelhança do **Exemplo 1.36**, que estas apenas coincidem se restringirmos o domínio de  $x \mapsto \sqrt{x - x^3}$  – dado pelo conjunto solução da inequação  $x - x^3 \geq 0$  – ao conjunto  $[0, 1]$ .

■ **Exemplo 1.36 — Função Quociente.** Pese embora o facto de  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$  corresponder a uma versão simplificada de

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{1 - x^2},$$

<sup>5</sup>  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ , sempre que  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ . No entanto  $\sqrt{ab}$  pode ser sempre calculado, desde que  $ab \geq 0$ .

estas coincidem (vide **Definição 1.4.1**) uma vez que  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  – i.e.  $1 - x^2 \neq 0$  quando  $x \neq \pm 1$  – ao par que  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  – i.e.  $1 - x \neq 0$  quando  $x \neq 1$ .

Para que ambas as funções coincidam, teremos de restringir o domínio de  $f$  ao conjunto  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  (vide **Definição 1.4.2**). ■



As funções tratadas no **Exemplo 1.34** são exemplos de funções polinomiais ao par que as funções tratadas no **Exemplo 1.36** são exemplos de *funções racionais impróprias*. Iremos voltar a abordá-las mais à frente nas subseções **1.5.1 Funções Polinomiais & 1.5.2 Funções Racionais**, respectivamente.

**Desafio 1.25** Para as funções do **Exemplo 1.10**, **Exemplo 1.11** e **Exemplo 1.12**, verifique que:

- As funções  $x \mapsto x$  e  $x \mapsto |x|\operatorname{sgn}(x)$  coincidem.
- A funções  $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$  e  $x \mapsto \frac{x}{|x|}$  **não coincidem**. No entanto elas coincidem se restringirmos o domínio de  $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ .

**Desafio 1.26** Diga, justificando, qual o domínio das seguintes funções definidas por:

- $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ;
- $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
- $\frac{1+x}{1-x} + \sqrt{1-x^2}$ .

### 1.4.3 Função Composta

**Definição 1.4.3 — Função Composta.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções tais que

$$D'_g \cap D_f \neq \emptyset.$$

A função composta de  $g$  por  $f$  (lê-se  $f$  após  $g$ ), é uma função de domínio

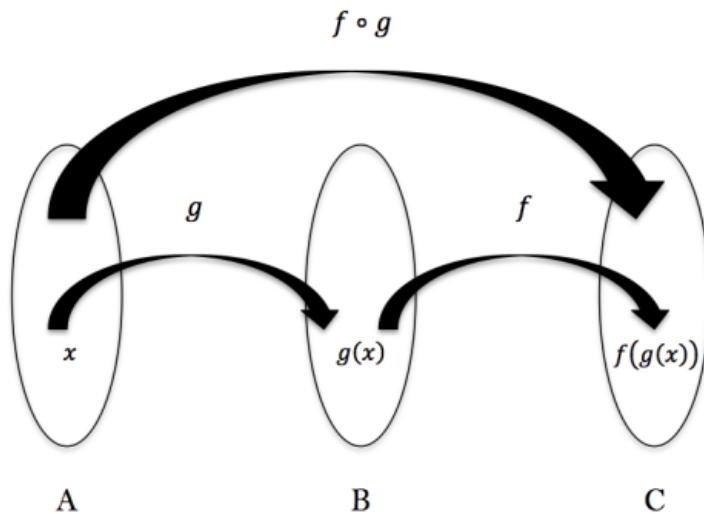
$$D_{f \circ g} = D_g \cap \{x : g(x) \in D_f\}$$

definida pela regra  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

Caso o contradomínio de  $g$  ( $D'_g$ ) seja um subconjunto do domínio de  $f$ , i.e.,  $D'_g \subseteq D_f$ , temos  $D'_g \cap D_f = D'_g$ , por isso

$$D_{f \circ g} = D_g$$

Pictoricamente, a operação de composição das função  $f : B \rightarrow C$  e  $g : A \rightarrow B$  de domínios  $D_f = B$  e  $D_g = A$ , respectivamente, pode ser representada pelo seguinte diagrama:



✓ No caso de  $D'_g \not\subseteq D_f$ , existem valores de  $y = g(x)$  que não podem ser transformados por  $f$ , ou seja, não é possível definir a composição  $f \circ g$  para tais valores de  $x$ . Assim sendo, temos

$$D_{f \circ g} \subset D_g$$

A composição de funções não exclui a possibilidade de se efectuar a composição repetindo a mesma função.

■ **Exemplo 1.37 — vide Exemplo 1.9.** Para a função  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  vem

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{1 - x^2}) = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

para todo o  $x \in [-1, 1]$ . ■

Em geral, a composição de funções não é comutativa, isto é,  $g \circ f \neq f \circ g$ .

■ **Exemplo 1.38 — Vide Desafio 1.6.** Sejam  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Apesar de  $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$  para  $x \geq 0$ , as funções  $g \circ f$  e  $f \circ g$  não são iguais pois têm domínios diferentes,  $D_f = \mathbb{R}$  e  $D_g = [0, +\infty[$ . ■

■ **Exemplo 1.39 — Determinação do domínio de funções compostas.** Para as funções  $f : \mathbb{R} - \{-3, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas pontualmente por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 3$$

podemos verificar, após algumas simplificações, as seguintes igualdades:

- $(f \circ g)(x) = f(x-3) = \frac{1}{x^2-6x}$
- $(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x^2-9}\right) = \frac{28-3x^2}{x^2-9}$ .
- O domínio de  $f \circ g$  é  $\mathbb{R} - \{0, 6\}$ ;
- O domínio de  $g \circ f$  é  $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ .

■



**É possível determinar o domínio da função composta sem calcular a sua expressão analítica.** No caso particular da função  $f \circ g$  do **Exemplo 1.39**, o seu domínio é dado pela seguinte interseção de conjuntos

$$\mathbb{R} \cap \{x : x-3 \neq -3 \wedge x-3 \neq 3\},$$

sendo:

- $\mathbb{R}$  o domínio de  $g$ ;
- $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$  o domínio de  $f$ ;
- as condições  $x-3 \neq -3$  e  $x-3 \neq 3$  são equivalentes à condição  $x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ .

Em geral, a determinação do domínio associado à composição das funções  $f$  e  $g$  envolve a resolução de equações e inequações. Na tabela seguinte, vamos exemplificar como proceder ao cálculo do domínio de  $g \circ f$  para os casos em que  $g$  é uma função conhecida. Algumas das funções  $g$  listadas na tabela abaixo serão estudadas em detalhe mais adiante na Seção **1.5 Funções Transcendentais**.

$g(x)$	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$	EQUAÇÃO/INEQUAÇÃO A RESOLVER
$\sqrt{x}$	$\sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0 \wedge x \in D_f$
$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{f(x)}$	$x \in D_f$
$ x $	$ f(x) $	$x \in D_f$
$\sqrt[2k]{x}$ ( $k \in \mathbb{N}$ )	$\sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x) \geq 0 \wedge x \in D_f$
$\sqrt[2k+1]{x}$ ( $k \in \mathbb{N}$ )	$\sqrt[2k+1]{f(x)}$	$x \in D_f$
$a^x$ ( $a > 0 \wedge a \neq 1$ )	$a^{f(x)}$	$x \in D_f$
$\log_a(x)$ ( $a > 0 \wedge a \neq 1$ )	$\log_a(f(x))$	$f(x) > 0 \wedge x \in D_f$
$\sin(x)$	$\sin(f(x))$	$x \in D_f$
$\cos(x)$	$\cos(f(x))$	$x \in D_f$
$\tan(x)$	$\tan(f(x))$	$\cos(f(x)) \neq 0 \wedge x \in D_f$
$\cot(x)$	$\cot(f(x))$	$\sin(f(x)) \neq 0 \wedge x \in D_f$
$\sec(x)$	$\sec(f(x))$	$\cos(f(x)) \neq 0 \wedge x \in D_f$
$\cosec(x)$	$\cosec(f(x))$	$\sin(f(x)) \neq 0 \wedge x \in D_f$

**Desafio 1.27 — Domínio de  $f \circ g$ .** Repita agora o processo análogo ao que realizámos anteriormente para o caso de pretendermos determinar o domínio de  $f \circ g$ , sendo  $g$  uma função conhecida. Pretende-se apenas que complete os espaços deixados em branco na tabela.

$g(x)$	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	EQUAÇÃO/INEQUAÇÃO A RESOLVER
$\sqrt{x}$	$f(\sqrt{x})$	$x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \in D_f$
$\sqrt[3]{x}$		$\sqrt[3]{x} \in D_f$
$ x $		
	$f(\sqrt[2k]{x})$	
$\sqrt[2k+1]{x}$ ( $k \in \mathbb{N}$ )		
		$a^x \in D_f$
$\log_a(x)$ ( $a > 0 \wedge a \neq 1$ )		
	$f(\sin(x))$	
		$\cos(x) \in D_f \wedge \cos(x) \in [-1, 1]$
$\tan(x)$		

#### 1.4.4 Transformações de Gráficos

**Definição 1.4.4 — Transformações de Gráficos.** As seguintes transformações do gráfico de uma função  $f : D \rightarrow Y$  poderão ser consideradas:

- (i) **Translações do gráfico de  $f$ :** O gráfico da função  $g$  definida por  $x \mapsto g(x) = k + f(x - h)$  obtém-se a partir do gráfico de  $f$ , por translação. Assim o deslocamento efectua-se para
  - (a) a direita se  $h > 0$  e  $k = 0$
  - (b) a esquerda se  $h < 0$  e  $k = 0$
  - (c) cima se  $k > 0$  e  $h = 0$
  - (d) baixo se  $k < 0$  e  $h = 0$
- (ii) **Homotetias do gráfico de  $f$ :** Dado  $c \in (]0, 1[ \cup ]1, +\infty[)$ , as mudanças de escala (i.e.

homotetias) no gráfico de  $f$  podem ser obtidas através das seguintes funções

$$x \mapsto g(x) = cf(x)$$

$$x \mapsto h(x) = f(cx)$$

**(iii) Reflexões do gráfico de  $f$ :** As funções

$$x \mapsto g(x) = -f(x)$$

$$x \mapsto h(x) = f(-x)$$

produzem reflexões no gráfico de  $f$ .

Os gráficos de  $g$  e de  $f$  são simétricos em relação ao eixo  $Ox$ , isto é,

$$(x, y) \in \text{graf}(f) \iff (x, -y) \in \text{graf}(g).$$

Por outro lado, os gráficos de  $h$  e de  $f$  são simétricos em relação ao eixo  $Oy$ , isto é,

$$(x, y) \in \text{graf}(f) \iff (-x, y) \in \text{graf}(h)$$

**(iv) Homotetias e Reflexões do Gráfico de  $f$ –** Podem ser obtidas por combinação das transformações obtidas em **(ii)** e **(iii)**. Em concreto, se  $c \in (]0, 1[ \cup ]1, +\infty[)$ , então as funções

$$x \mapsto g(x) = -cf(x)$$

$$x \mapsto h(x) = f(-cx)$$

produzem simultaneamente reflexões e mudanças de escala (i.e. homotetias) no gráfico de  $f$ .

**(v) Transformações modulares do gráfico de  $f$ –** As funções

$$x \mapsto |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$x \mapsto f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

produzem transformações modulares no gráfico de  $f$ .

Em termos da composição de funções estudada na subseção **1.4.3 Função Composta**, as transformações de gráficos introduzidas ao longo da **Definição 1.4.4** podem ser classificadas de:

- (a) Transformações horizontais** se a função  $g$  – função conhecida *a priori* – transforma o gráfico de  $f$  através da composição  $x \mapsto (f \circ g)(x)$ .
- (a) Transformações verticais** se a função  $g$  – função conhecida *a priori* – transforma o gráfico de  $f$  através da composição  $x \mapsto (g \circ f)(x)$ .

Na tabela abaixo segue um resumo das transformações gráficas introduzidas acima:

	NA HORIZONTAL [ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ]	NA VERTICAL [ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ]
<b>Translação</b> $g(x) = x + c$	$f(g(x)) = f(x + c)$ $c > 0$ – Translação à esquerda do eixo $Oy$ . $c < 0$ – Translação à direita do eixo $Oy$ .	$g(f(x)) = f(x) + c$ $c > 0$ – Translação acima do eixo $Ox$ . $c < 0$ – Translação abaixo do eixo $Ox$
<b>Homotetia</b> $g(x) = cx$ ( $c > 0$ )	$f(g(x)) = f(cx)$ $c > 1$ – Contração do gráfico na horizontal $0 < c < 1$ – Dilatação do gráfico na horizontal.	$g(f(x)) = cf(x)$ $c > 1$ – Dilatação do gráfico na vertical. $0 < c < 1$ – Contração do gráfico na vertical.
<b>Reflexão</b> $g(x) = -x$	$f(g(x)) = f(-x)$ , Reflexão do gráfico relativamente ao eixo $Oy$ .	$g(f(x)) = -f(x)$ Reflexão do gráfico relativamente ao eixo $Ox$ .
<b>Reflexão</b> + <b>Homotetia</b> $g(x) = -cx$ ( $c > 0$ )	$f(g(x)) = f(-cx)$ Reflexão do gráfico relativamente ao eixo $Oy$ seguida de <b>(i)</b> contração na horizontal (se $c > 1$ ); <b>(ii)</b> de dilatação na horizontal (se $0 < c < 1$ ).	$g(f(x)) = -cf(x)$ Reflexão do gráfico relativamente ao eixo $Ox$ seguida de <b>(i)</b> dilação na vertical (se $c > 1$ ); <b>(ii)</b> de contração na vertical (se $0 < c < 1$ ).
<b>Transformação Modular</b> $g(x) =  x $	$f(g(x)) = f( x )$ Gráfico permanece inalterado à direita do eixo $Oy$ ( $x \geq 0$ ). À esquerda do eixo $Oy$ ( $x < 0$ ) o gráfico é reflectido relativamente ao eixo $Oy$ .	$g(f(x)) =  f(x) $ Gráfico permanece inalterado acima do eixo $Ox$ ( $f(x) \geq 0$ ) Abaixo do eixo $Ox$ ( $f(x) < 0$ ) é reflectido relativamente ao eixo $Ox$ .



Graficamente, dizemos que uma função  $f$  é **par** quando reflexões ao gráfico de  $f$  na horizontal não produzem alterações no gráfico de  $f$  ( $f(-x) = f(x)$ ).

No caso de  $f$  ser **ímpar**, pode-se facilmente concluir que reflexões na horizontal e na vertical do gráfico de  $f$  coincidem ( $f(-x) = -f(x)$ ).

Pode-se ainda verificar que a **transformação modular**  $x \mapsto f(|x|)$  produz sempre uma função par, independentemente da paridade de  $f$ .

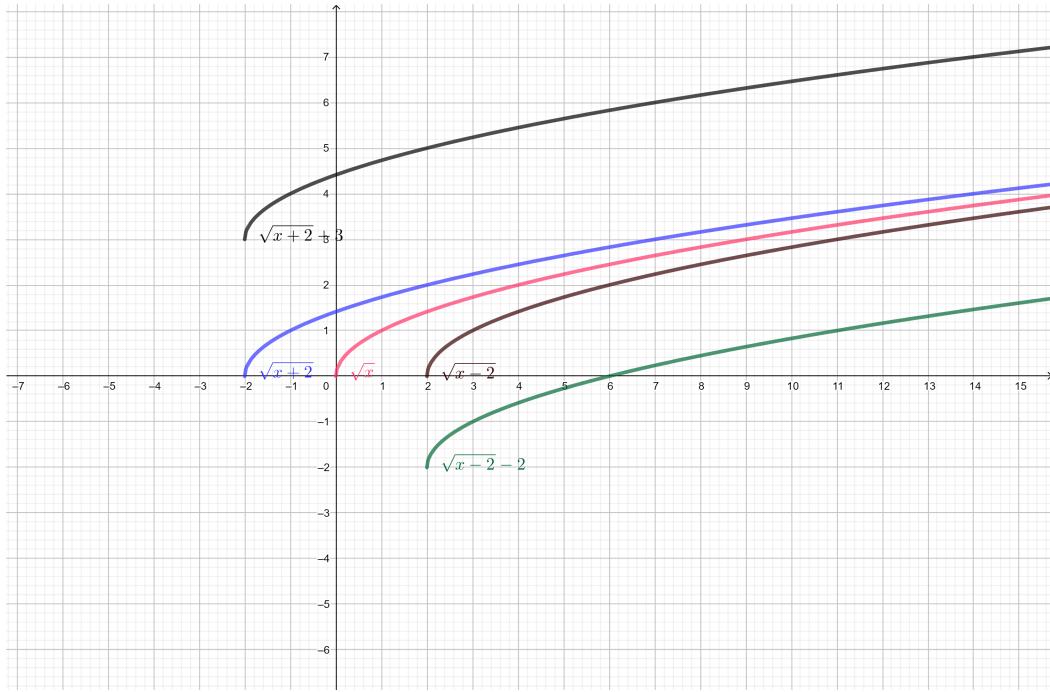


Figura 1.8: Na figura encontram-se representadas translações horizontais e verticais do gráfico da função  $x \mapsto \sqrt{x}$  do **Exemplo 1.13**

### Transformações gráficas envolvendo funções quadráticas

Como teve oportunidade de verificar no **Exemplo 1.8**, a parábola de equação  $y = x^2$  define uma função. O que iremos fazer de seguida permite-nos relacionar o vértice e a concavidade de parábolas com eixo de simetria vertical – vide **Exemplo 1.5** com o estudo dos zeros e sinal das funções quadráticas da forma

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

■ **Exemplo 1.40 — Equação Geral da Parábola.** Considerando a função  $f$ ,  $x \mapsto f(x) = ax^2$ , ( $a \neq 0$ ) – vide **Exemplo 1.4** – podemos concluir que o gráfico da função quadrática,

$$x \mapsto g(x) = ax^2 + bx + c$$

pode ser obtido a partir de translações na horizontal e na vertical do gráfico de  $f$ .

Em particular,  $g(x) = a(x-h)^2 + k$  se, e só se,

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = c - \frac{b^2}{4a}.$$

■



O **Exemplo 1.40** diz-nos essencialmente que toda a função quadrática pode ser associada à equação de uma parábola com eixo de simetria vertical – vide **Exemplo 1.5**.

O gráfico desta função pode ser obtido através do gráfico da função do **Exemplo 1.8** por translações, homotetias [e eventualmente reflexões, para o caso de termos  $a < 0$ ].

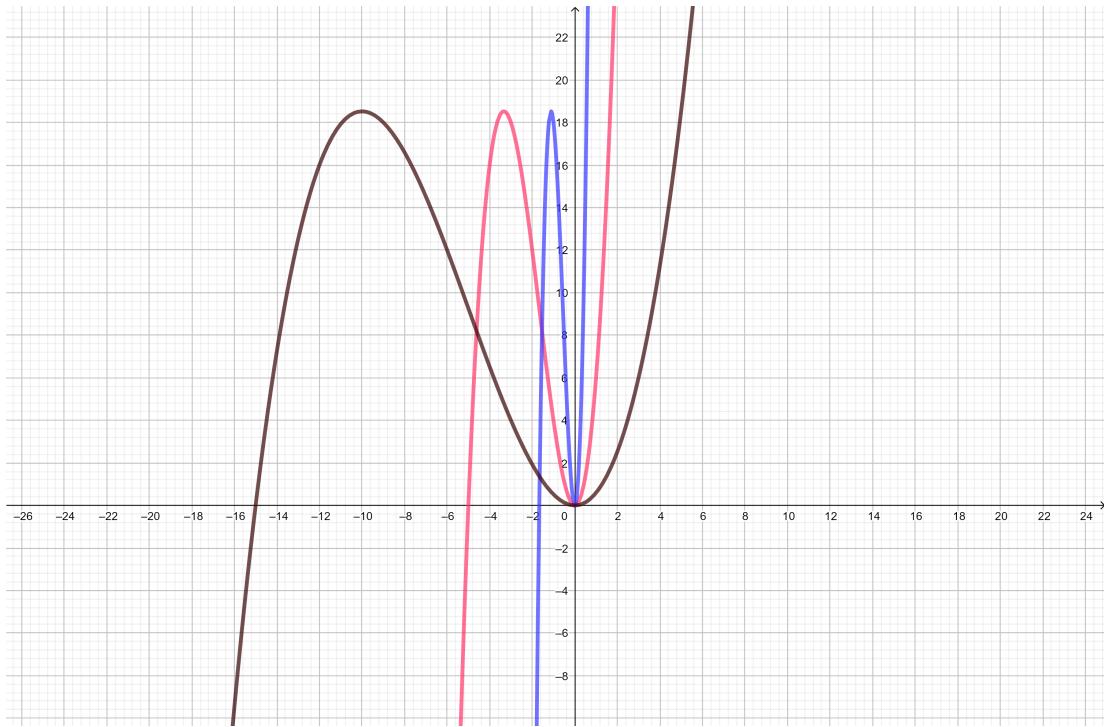


Figura 1.9: Na figura encontram-se representadas **homotetias na horizontal** da função  $x \mapsto x^3 + 5x^2$  (a magenta) para valores de  $c = 3$  (a azul) e  $c = \frac{1}{3}$  (a castanho).



Pela mesma ordem de ideias do já que foi descrito anteriormente no **Exemplo 1.40**, podemos concluir que a equação da parábola com eixo de simetria horizontal – vide **Exemplo 1.6** – não define uma função, uma vez que:

1. Esta pode ser obtida a partir da curva  $x = y^2$  por transformações gráficas;
2. A curva  $x = y^2$  não define uma função – vide **Exemplo 1.40**.

Recorrendo a argumentos geométricos, podemos determinar o vértice da parábola  $V = (h, k)$ , ou seja as suas coordenadas

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = c - \frac{b^2}{4a}$$

do **Exemplo 1.40** do seguinte modo:

**Passo 1.** Observemos que a recta horizontal de equação  $y = c$  intersecta sempre a parábola de equação  $y = ax^2 + bx + c$ . Assim,

$$ax^2 + bx + c = c \iff ax^2 + bx = 0$$

**Passo 2.** Se  $b = 0$  então o ponto  $(0, c)$  é o vértice da parábola. Neste caso, temos  $h = 0$  e  $k = g(0) = c$ .

**Passo 3.** Caso contrário ( $b \neq 0$ ) obtemos dois pontos de interseção  $A$  e  $B$ , de abcissas  $x = 0$  e  $x = -\frac{b}{a}$ .

Considerando o ponto médio do segmento de recta  $[AB]$ , a sua abcissa vale  $h = -\frac{b}{2a}$ . Neste caso  $(-\frac{b}{2a}, k)$  é o vértice da parábola, onde  $k$  é uma constante a calcular.

**Passo 4.** Assumindo que a igualdade

$$\underbrace{a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k}_{=g(x)} = ax^2 + bx + c$$

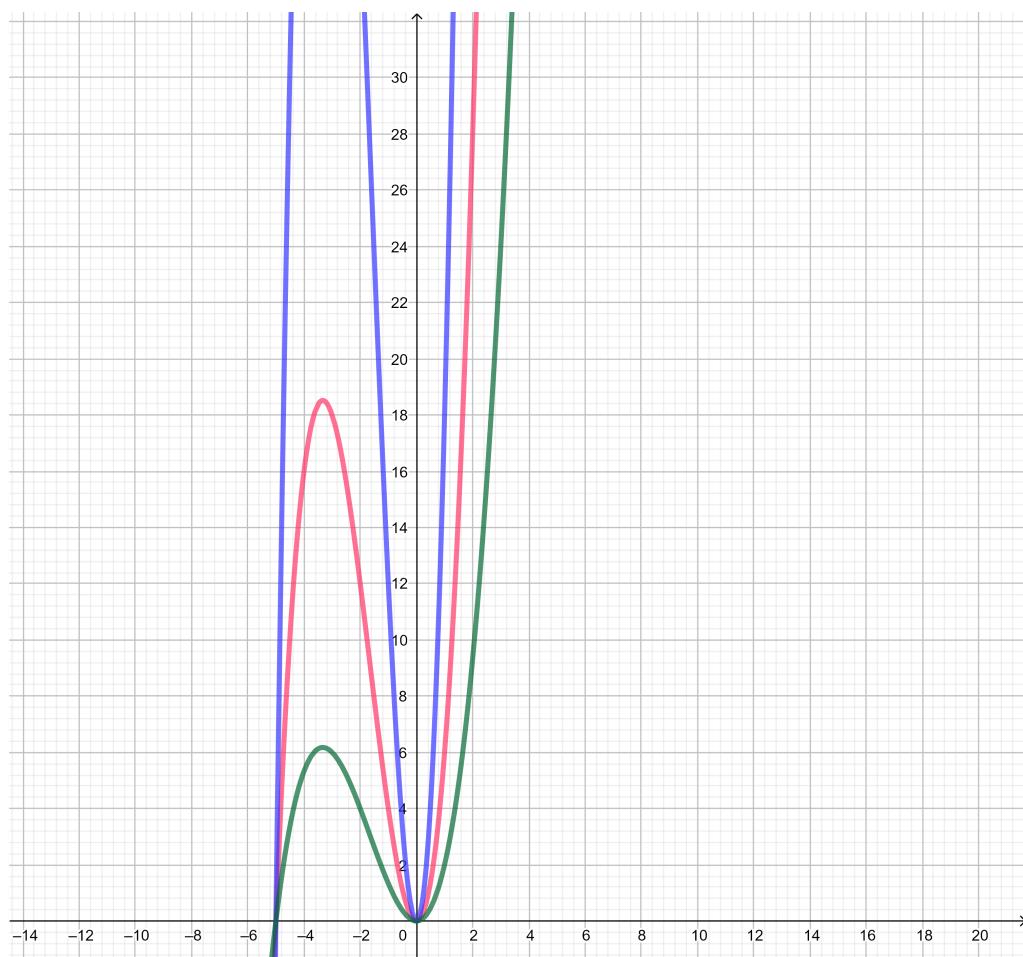


Figura 1.10: Na figura encontram-se representadas **homotetias na vertical** da função  $x \mapsto x^3 + 5x^2$  (a magenta) para valores de  $c = 3$  (a azul) e  $c = \frac{1}{3}$  (a verde).

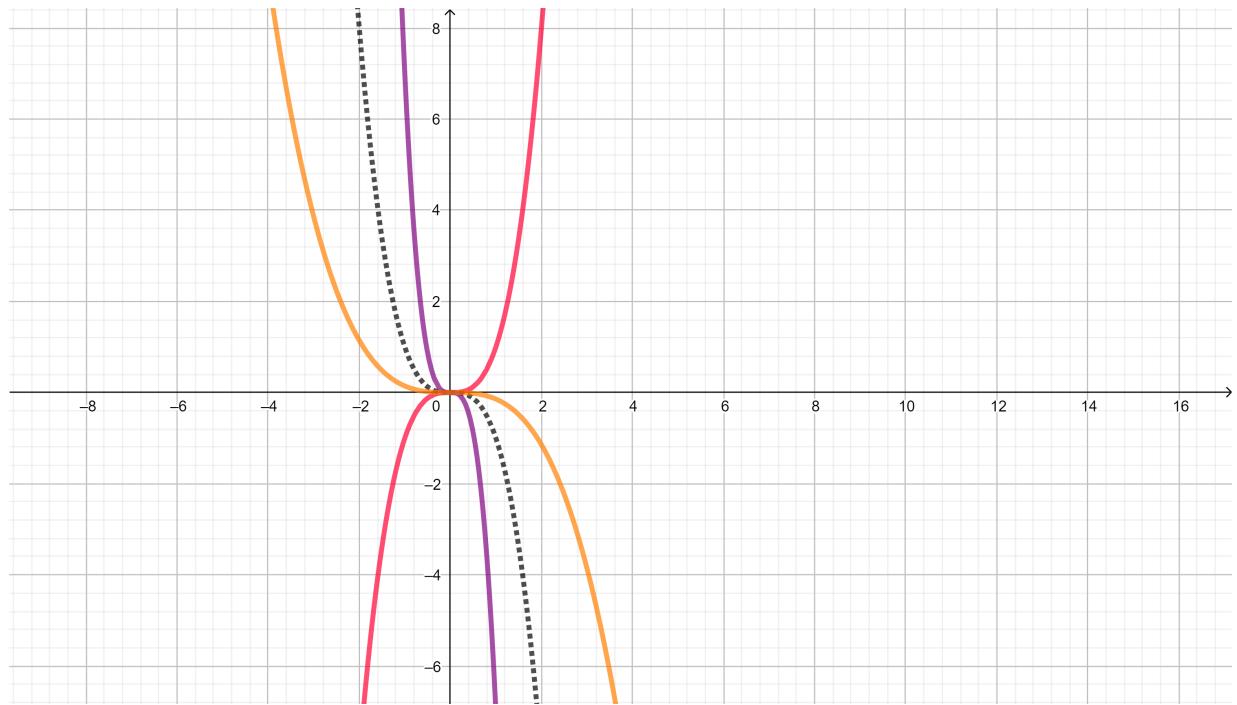


Figura 1.11: Na figura encontram-se representadas **reflexões e homotetias** do gráfico da função  $x \mapsto x^3$  (a magenta) para valores de  $-c = -7$  (a lilás) e  $-c = -\frac{1}{7}$  (a laranja). O gráfico pontilhado (a preto) corresponde à reflexão de  $x \mapsto x^3$  na horizontal e na vertical (que coincidem neste caso por estarmos perante uma função ímpar).



Figura 1.12: Na figura encontram-se representadas reflexões do gráfico função  $x \mapsto \sqrt{x}$  do **Exemplo 1.13** na horizontal (a laranja) e na vertical (a lilás).

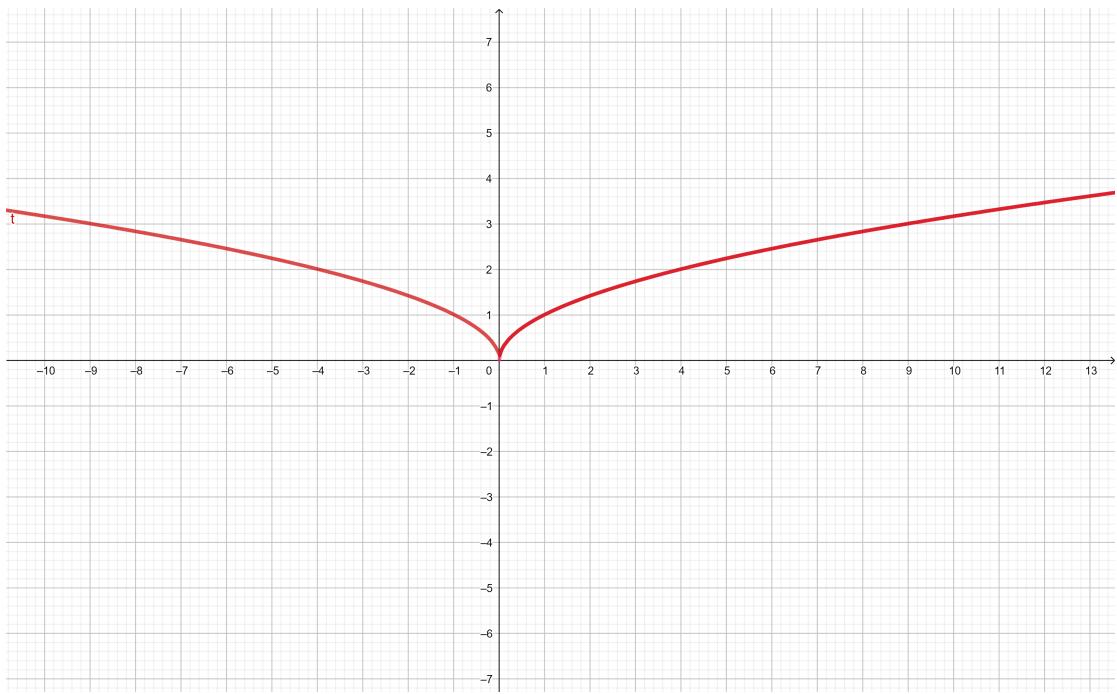


Figura 1.13: Na figura encontram-se representadas reflexões modulares na horizontal do gráfico função  $x \mapsto \sqrt{x}$  do **Exemplo 1.13**. Note que à direita do eixo  $Oy$  corresponde ao gráfico da função enquanto que à esquerda de  $Oy$  uma versão reflectida deste.

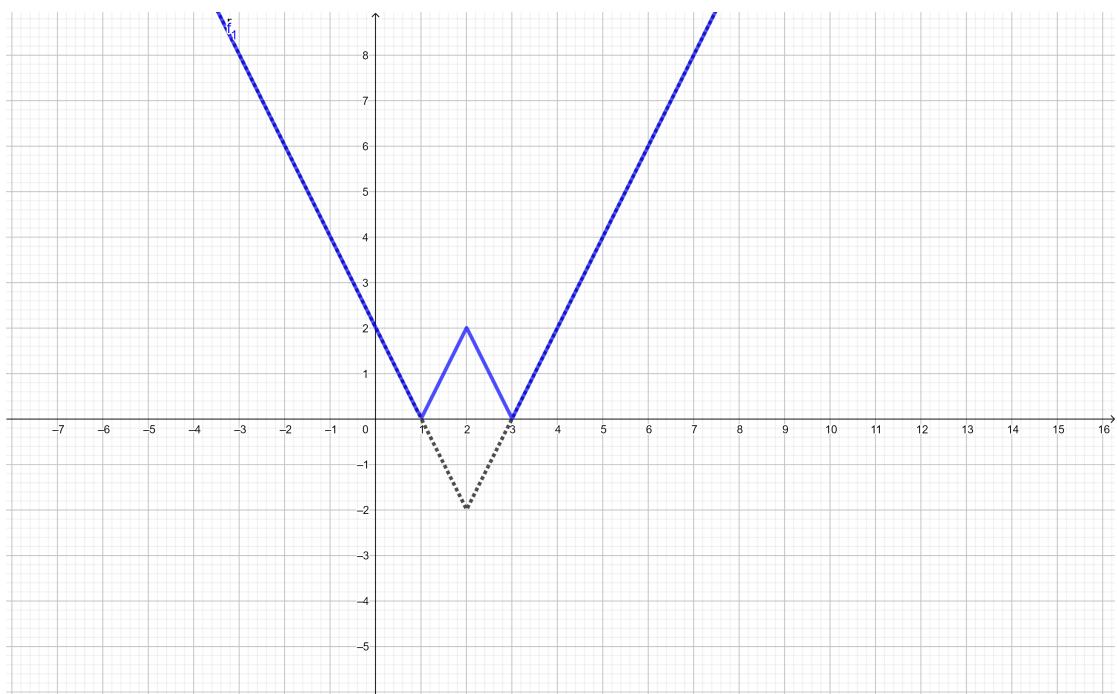


Figura 1.14: Na figura encontram-se representadas reflexões modulares na vertical do gráfico função  $x \mapsto 2|x - 2| - 2$ . Note o gráfico permanece igual para todos os pontos acima do eixo  $Ox$ . A parte do gráfico que se encontra abaixo do eixo  $Ox$  (a preto tracejado) aparece acima reflectida (gráfico em forma de W).

é satisfeita, determininamos a constante  $k$  com base na condição  $g(-\frac{b}{2a}) = k$ .

O tipo de raciocínio ilustrado acima poderá vir a ser útil na resolução do próximo desafio.

**Desafio 1.28 — Revisão da equação da circunferência.** Verifique que a função dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{-3x - x^2}$$

define uma semi-circunferência.

Indique o centro  $C = (\alpha, \beta)$  e o raio  $\rho$  da circunferência. De seguida:

1. Determine o domínio e o contradomínio de  $f$  com base no esboço do gráfico.
2. Mostre que o gráfico de  $f$  pode ser obtido a partir de  $g(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$  por via de translações na horizontal e na vertical.



É claro que a uma circunferência não corresponde o gráfico de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Basta aplicar, à semelhança do **Exemplo 1.9**, o **teste da recta vertical** para constatar que existem retas verticais que intersectam a circunferência em dois pontos.

Contudo, atendendo a que o eixo de simetria horizontal da circunferência divide-a em duas partes iguais, cada semi-circunferência passa a representar o gráfico de uma função.

Este é essencialmente o raciocínio a ser adoptado ao longo da Resolução do **Desafio 1.28**.

■ **Exemplo 1.41 — Equação da Parábola vs Fórmula Resolvente.** A representação de  $y = ax^2 + bx + c$  por translações na horizontal e na vertical obtidas no **Exemplo 1.40** permite-nos deduzir a fórmula resolvente enunciada no **Teorema 1.3.3**.

Com efeito,  $x$  é um zero de  $g$  se, e só se

$$(x - h)^2 + \frac{k}{a} = 0.$$

Adicionalmente, da diferença de quadrados

$$z^2 - w^2 = (z - w)(z + w)$$

obtemos que a equação anterior é equivalente a

$$\left(x - h - \sqrt{-\frac{k}{a}}\right) \left(x - h + \sqrt{-\frac{k}{a}}\right) = 0,$$

desde que  $\frac{k}{a} \leq 0$ .

A verificação das identidades abaixo ficam ao cargo do leitor:

- $-\frac{k}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
- $x$  é um zero de  $ax^2 + bx + c$  se, e só se,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

No caso da função quadrática, podemos ainda obter o seguinte resultado que relaciona o parâmetro de concavidade  $a$  com os zeros e o sinal da função quadrática. O teorema abaixo complementa assim a análise já realizada no decurso do **Exemplo 1.20**.

**Teorema 1.4.2 — Concavidade vs Sinal da função quadrática.** Para a função quadrática  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

podemos concluir o seguinte com base no estudo do discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  e do parâmetro de concavidade  $a$ :

- Se  $\Delta < 0$  então ela é **positiva** resp. **negativa** se  $a > 0$  resp.  $a < 0$ ;
- Se  $\Delta = 0$  então ela é **não negativa ou não positiva**. O sinal de  $f$  depende do sinal de  $a$ ;
- Se  $\Delta > 0$ , então o sinal de  $f$  vai depender:
  - do sinal de  $a$ ;
  - dos zeros  $\lambda_1 < \lambda_2$  – vide **Exemplo 1.20**.

*Ideia da demonstração.* Primeiramente, observe que

$$ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k,$$

onde  $h = -\frac{b}{2a}$  e  $k = -\frac{\Delta}{4a}$ .

**Caso**  $\Delta < 0$ :

Note que

$$a(x - h)^2 \geq 0 \text{ se } a > 0 \text{ & } a(x - h)^2 \leq 0 \text{ se } a < 0.$$

Por outro lado, assumindo que  $\Delta < 0$  obtemos:

$$k > 0 \text{ se } a > 0 \text{ & } k < 0 \text{ se } a < 0.$$

Combinando as desigualdades acima, segue que

- $ax^2 + bx + c \geq k > 0$ , no caso de  $a > 0$  (**função positiva**);
- $ax^2 + bx + c \leq k < 0$ , no caso de  $a > 0$  (**função negativa**).

**Caso**  $\Delta = 0$ :

Assumindo que  $\Delta = 0$ , temos que  $ax^2 + bx + c$  é, na verdade, um quadrado perfeito, i.e.

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Desta última igualdade podemos facilmente concluir que:

- $ax^2 + bx + c \geq 0$ , no caso de  $a > 0$  (**função não negativa**);
- $ax^2 + bx + c \leq 0$ , no caso de  $a < 0$  (**função não positiva**).

**Caso**  $\Delta > 0$ :

Note que a condição  $\Delta > 0$  diz-nos que  $k < 0$ . Logo, seguindo a mesma ordem de ideias do **Exemplo 1.41**, resulta que

$$ax^2 + bx + c = a \left( x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Finalmente, se escolhermos  $\lambda_1$  como sendo o 'menor zero' de  $f$  e  $\lambda_2$  como sendo 'maior zero' de  $f$ , i.e.

$$\lambda_2 = \min \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\},$$

$$\lambda_2 = \max \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\},$$

podemos recorrer aos quadros de sinal ilustrados no **Exemplo 1.20** para concluir a demonstração. ■

Com base na construção obtida ao longo do **Teorema 1.4.2**, o seguinte resultado é imediato:

**Corolário 1.4.3** Para a função quadrática  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

podemos concluir o seguinte com base no estudo do discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  e do parâmetro de concavidade  $a$ :

- Se  $a > 0$  (**gráfico é convexo**), então

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

corresponde ao valor mínimo de  $f$ ;

- Se  $a < 0$  (**gráfico é côncavo**), então

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

corresponde ao valor máximo de  $f$ .

Para terminar esta seção, pretende-se que faça uso do **Teorema 1.4.2** para consolidar o que aprendeu na subseção **1.3.5 Monotonía e Concavidades**.

**Desafio 1.29 — Funções negativas.** Determine o valor da constante  $a$  de modo a que a função

$$x \mapsto a \sqrt{ax^2 + 3x + 2a + 3}$$

seja **negativa em todos os pontos do seu domínio**.

#### Transformações gráficas em funções periódicas

O próximo resultado vai ao encontro do raciocínio já adoptado no **Exemplo 1.25** e **Desafio 1.20**. Este permite-nos calcular o período de funções que resultam de translações e homotetias no gráfico de uma função periódica – vide **Definição 1.4.4**.

**Teorema 1.4.4** Seja  $f$  uma função periódica de período  $T$ . Então, para  $\omega > 0$  e  $\phi \in \mathbb{R}$  a função  $g$  definida por

$$g(x) = f(\omega x + \phi)$$

é uma função periódica de período igual a  $\frac{T}{\omega}$ .

*Ideia da prova.* Usando o facto de  $f$  ser uma função periódica, de período  $T$ , tem-se que

$$f(\omega x + \phi) = f(\omega x + \phi + T) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right) + \phi\right)$$

A sequência de igualdades acima permite-nos demonstrar que a função  $g(x) = f(\omega x + \phi)$  satisfaz a igualdade

$$g(x) = g\left(x + \frac{T}{\omega}\right),$$

para todo o  $x$ , como pretendido. ■



**O Teorema 1.4.4** tem a seguinte interpretação física:

- (a) O período de uma função periódica é independente do fator de fase (i.e. das **translações horizontais** ao gráfico de  $f$ ) – que iremos interpretar como a constante  $\phi \in \mathbb{R}$ ;
- (b) A frequência de  $x \mapsto f(\omega x + \phi)$  está directamente correlacionada com o período  $T$  e com as **mudanças de escalas** (i.e **homotetias**) no gráfico de  $f$ .

Em concreto, se

$$\lambda = \frac{\omega}{T}$$

denota o comprimento de onda induzido pela constante  $\omega > 0$  (i.e. a velocidade de fase), então **a constante  $\frac{1}{\lambda}$  dá-nos o período da função  $x \mapsto f(\omega x + \phi)$** .

**Desafio 1.30** Aplique o **Teorema 1.4.4** para verificar as conclusões obtidas no **Exemplo 1.25** e **Desafio 1.20**. De seguida, aplique o **Teorema 1.4.4** para calcular o período das seguintes funções:

1.  $\cos(2\pi x + \frac{\pi}{6})$ ;
2.  $\cot(3x - 7)$ ;
3.  $\sec^2(\frac{5}{2}x)$ ;
4.  $\sin^4(\frac{\pi x}{4})$ .



O **Desafio 1.58** que se encontra mais à frente na subseção **1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas** é um excelente exercício para aplicar o **Teorema 1.4.4**, assim como o conceito de inversa de uma função, que iremos abordar de seguida na subseção **1.4.5 Função Inversa e Gráfico**. Acresce que este lhe permitirá rever o conceito de paridade abordado na subseção **1.3.3 Paridade e Simetria**.

### 1.4.5 Função Inversa e Gráfico

A expressão analítica  $x = f(y)$  transforma  $y$  em  $x$  por intermédio da função  $f$ . Suponha que quer e pode inverter esta correspondência, trocando o papel das variáveis. Para esse efeito deve então procurar a função  $g$  que permita recuperar o valor de  $y = g(x)$  por alteração de  $x$ . Se existir  $g$  designa-se por  $f^{-1}$ .

**Definição 1.4.5 — Função Inversa.** Sejam  $f : D \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow D$  duas funções. Dizemos que  $g$  é a inversa de  $f$ , escrevemos  $g = f^{-1}$  se, e só se

- (i)  $(g \circ f)(x) = x$  para todo  $x \in D$
- (ii)  $(f \circ g)(y) = y$  para todo  $y \in Y$ .



No **Exemplo 1.37** temos que  $f^{-1} = f$  se restringirmos o domínio de  $f$  ao conjunto  $[0, 1]$ .

Com base no **Exemplo 1.38** tem-se que  $g(x) = \sqrt{x}$  é a inversa de  $f(x) = x^2$  se restringirmos o domínio de  $f$  ao intervalo  $[0, +\infty[$ .

**Note que a condição (i) é equivalente a demonstrarmos que  $f$  é uma função injectiva:**

**(i)  $\Rightarrow$  f é injectiva**

*Ideia da Demonstração.* Com efeito, assumindo que a equação  $(g \circ f)(x) = x$  é satisfeita, para todo o  $x \in D$ , é possível obter, para  $x_1, x_2 \in D$ , arbitrários, a sequência de implicações

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

■

**(i)  $\Leftarrow$  f é injectiva**

*Ideia da Demonstração.* Assumindo agora que  $f : D \rightarrow Y$  é injectiva tem-se que, para cada  $y \in Y$ , a equação  $y = f(x)$  tem uma, e uma só solução. Esta condição permite-nos definir unicamente a função  $g : Y \rightarrow D$  como sendo  $x = g(y)$ .

Tomando  $y = f(x)$  obtemos que a sequência de igualdades

$$x = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

é verdadeira para todo o  $x \in D$ , como pretendido.

■

**Por sua vez, a condição (ii) é equivalente a demonstrarmos que f é uma função sobrejectiva:**

**(ii)  $\Rightarrow$  f é sobrejectiva**

*Ideia da Demonstração.* Se  $f : D \rightarrow Y$  podemos concluir com base na equação

$$(f \circ g)(y) = y$$

que  $x = g(y)$  é solução da equação  $y = f(x)$ , logo sobrejectiva.

■

**(ii)  $\Leftarrow$  f é sobrejectiva**

[Fica como exercício.]



Voltando ao **Exemplo 1.38**, as regras de composição

$$(g \circ f)(x) = |x| \quad \& \quad (f \circ g)(x) = x$$

permitem-nos concluir que a função  $f$  não é injectiva mas é sobrejectiva.

**Teorema 1.4.5 — Função Inversa vs Função Bijectiva.** Seja  $f : D \rightarrow D'$  uma **função sobrejectiva**. Diz-se que  $f$  é invertível se  $f$  é injectiva.

A função inversa de  $f$ ,  $f^{-1} : D' \rightarrow D$  satisfaz

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

para todo o  $x \in D'$  e para todo o  $y \in D$ .



O teorema anterior diz-nos essencialmente que, **caso  $f^{-1}$  exista**, o domínio de  $f^{-1}$  é igual ao contradomínio de  $f$  e o contradomínio de  $f^{-1}$  é igual ao domínio de  $f$ .

O teorema acima permite-nos formular o seguinte procedimento algébrico para determinar  $f^{-1}$ :

**Passo 1.** Determinar o contradomínio de  $f$ ;

**Passo 2.** Trocar de variáveis em  $y = f(x)$ ;

**Passo 3.** Resolver em ordem a  $y$  a igualdade  $x = f(y)$  resultante do ítem anterior;

**Passo 4.** Definir a inversa de  $f$ ,  $f^{-1} : D' \rightarrow D$ , indicando o domínio e a expressão analítica.

O tipo de procedimento descrito anteriormente foi essencialmente o procedimento realizado no **Exemplo 1.13** para determinar a função raiz quadrada como inversa da função quadrática  $f(x) = x^2$  (vide **Exemplo 1.8**).

No próximo exemplo iremos fazer uso do facto de  $y \mapsto x = \sqrt[3]{y}$  corresponder à inversa da função  $x \mapsto y = x^3$ .

■ **Exemplo 1.42** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^{-3}$ . O domínio de  $f$  coincide com o contradomínio, sendo precisamente igual a  $\mathbb{R} - \{0\}$ . A função  $f$  é injectiva pois, para quaisquer  $x_1$  e  $x_2$ , pertencentes ao domínio de  $f$ , tem-se

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^{-3} = x_2^{-3} \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3$$

onde

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Tendo  $f$  inversa, determine-se a expressão analítica através de

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^3} \Leftrightarrow y^3 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Então

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \\ x &\longmapsto y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3} \end{aligned}$$

■ **Exemplo 1.43** A função irracional dada por  $f(x) = \sqrt{x+2}$  tem como inversa a restrição da função quadrática  $g$  ao intervalo  $[0, +\infty[$  que verifica

$$g(x) = x^2 - 2$$

De facto

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - 2 = x$$

para todo  $x \geq -2$  e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = \sqrt{x^2 - 2} = |x| = x$$

para todo  $x \geq 0$ .

**Corolário 1.4.6 — Gráfico da função inversa.** Se  $f^{-1} : D' \rightarrow D$  é a inversa de  $f : D \rightarrow D'$ , então os gráficos de  $f^{-1}$  e de  $f$  são simétricos em relação à bissecriz dos quadrantes ímpares, isto é:

$$(x, y) \in \text{graf}(f) \iff (y, x) \in \text{graf}(f^{-1}).$$

Em particular,

$$\text{graf}(f^{-1}) = \{(f(x), x) : x \in D\}.$$

■ **Exemplo 1.44** Voltemos ao exemplo da função limitada ilustrada no **Exemplo 1.27**.

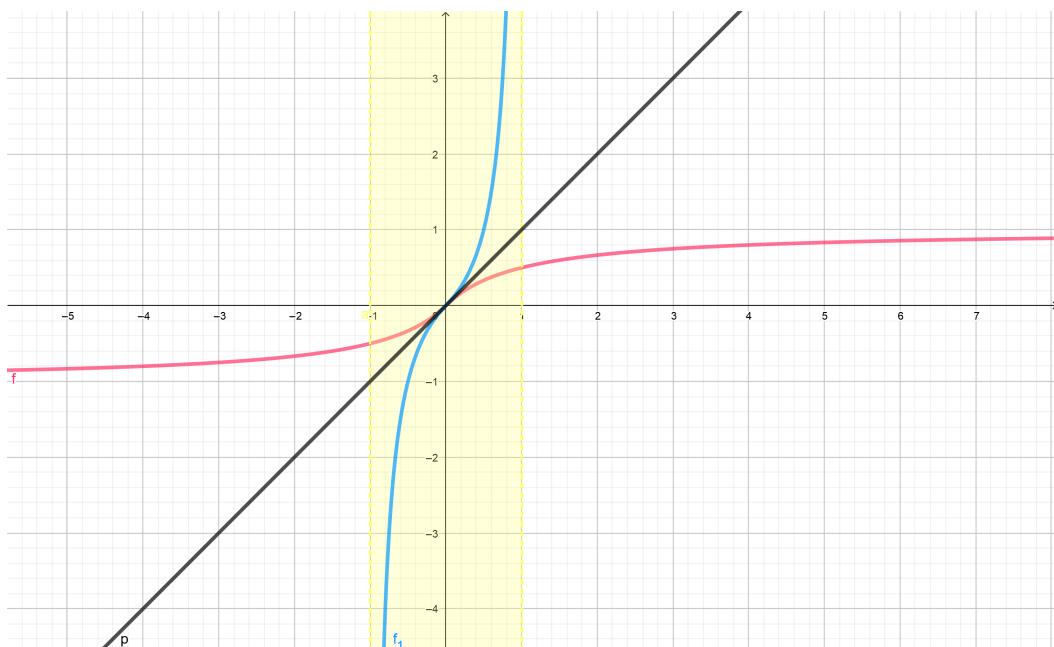
Em primeiro lugar, note-se que a análise do gráfico da função,  $x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ , nos permite facilmente concluir que esta é sobrejectiva se restringirmos o conjunto de chegada ao contradomínio

$$D'_f = ]-1, 1[.$$

Isto permite-nos desde já determinar o domínio da função inversa  $f^{-1}$ ,  $D_{f^{-1}} = ]-1, 1[$ . Geometricamente, isto equivale a dizer que o domínio de  $f^{-1}$  está compreendido entre as retas verticais, de equação

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1$$

tal qual ilustrado na figura abaixo (região a amarelo).



Note ainda que na figura abaixo, o gráfico de  $f$  aparece representado a magenta, ao par que o gráfico de  $f^{-1} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  aparece representado a azul ciano. Este último gráfico, correspondente ao conjunto

$$\text{graf}(f^{-1}) = \left\{ \left( \frac{x}{1+|x|}, x \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Este último foi obtido com recurso ao GeoGebra fazendo a reflexão do gráfico de  $f$  relativamente à recta de equação  $y = x$ .

Para mais detalhes, consulte o link:

<https://www.geogebra.org/m/h4qnbabg>.



O **Corolário 1.4.6** fornece-nos uma construção geométrica para determinar o gráfico de uma função inversa mesmo sem conhecer a expressão analítica de  $f^{-1}$ .

Este tipo de construção foi-nos particularmente útil no **Exemplo 1.44**, dado que a equação

$$x = \frac{y}{1 + |y|}$$

que teríamos de resolver em ordem a  $y$  (**Passo 3.**) é não linear.

**Desafio 1.31 — Revisão do estudo de domínios de funções gráficas.** Sem calcular a regra de composição  $(f^{-1} \circ g)(x)$ , Determine o domínio da função  $f^{-1} \circ g$ , sendo:

1.  $f$  a função do **Exemplo 1.44**;
2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $g(x) = -2x + 3$ .

**Desafio 1.32 — Revisão da Equação da Circunferência.** Após ter verificado no **Desafio 1.28** que a função dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{-3x - x^2}$$

define uma semi-circunferência de centro  $C = (\alpha, \beta)$  e raio  $\rho$ , verifique que a função da forma

$$g(y) = a - \sqrt{\rho^2 - (y - \beta)^2}$$

satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $(f \circ g)(y) = y$ ;
- (ii)  $(g \circ f)(x) = \alpha - |x - \alpha|$ .

De seguida, justifique com base no esboço de ambos os gráficos que para valores de  $x$  no intervalo  $[\alpha - \rho, \alpha]$ :

- (iii)  $f$  é injectiva;
- (iv) o gráfico de  $g$  pode ser obtido como reflexão do gráfico de  $f$  em relação à reta  $y = x$  (bissecriz dos quadrantes ímpares).

**Desafio 1.33 — Revisão da Definição 1.4.5.** Use a função,  $x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ , considerada no **Exemplo 1.27** para mostrar que a função definida por

$$g(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

de domínio  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  não é injectiva<sup>6</sup> mas é sobrejectiva.

De seguida, verifique com recurso ao GeoGebra que o gráfico obtido a partir da reflexão de  $g$  em relação à recta  $y = x$  apenas coincide com o gráfico de  $f$  se restringirmos o domínio de  $g$  ao intervalo  $]-1, 1[$ .

## 1.5 Directório: Funções Algébricas e Funções Transcendentas

**Definição 1.5.1 — Funções Elementares.** Diz-se que a função  $f : D \rightarrow Y$ :

- É **Algébrica** se pode ser expressa em termos de um número finito de operações, tais como adição, multiplicação, divisão ou radiciação de funções polinomiais. Exemplos: Funções Polinomiais, Racionais e Irracionais.
- É **Transcendente** se  $f$  não é algébrica. Exemplos: Funções Exponencial, Logarítmica, Hiperbólicas, Trigonometrícias directas e Trigonometrícias Inversas.

<sup>6</sup>Note que  $|g(x)| = \frac{|x|}{1 - |x|}$  se, e só se,  $|x| < 1$ .

### 1.5.1 Funções Polinomiais

**Definição 1.5.2 — Funções Polinomiais.** A função polinomial é definida pela expressão

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

sendo  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  e  $n \in \mathbb{N}_0$  constantes, tais que  $a_n \neq 0$ . Os números reais  $a_j$  são os coeficientes do polinómio e  $n$  é o seu grau. O domínio de  $p_n$  é  $\mathbb{R}$ .

**Notação 1.5 — Raízes de um polinómio.** Os zeros de funções polinomiais da forma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

são conhecidos na literatura por **raízes** de  $p_n$ .

**Teorema 1.5.1 — Factorização de polinómios.** Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  uma raiz do polinómio  $p_n$  de grau  $n$ . Então existe um polinómio  $q_{n-1}$  de grau igual a  $n - 1$  tal que

$$p_n(x) = (x - \lambda) q_{n-1}(x).$$

Em geral, se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) são  $k$  raízes de  $p_n$ , então existe um polinómio de grau igual a  $n - k$  tal que

$$p_n(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k) q_{n-k}(x).$$

No caso de conhecermos as  $n$  raízes [reais]  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  do polinómio  $p_n$  (vide **Notação 1.5**), tem-se que

$$p_n(x) = a_n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n),$$

onde  $a_n$  é o coeficiente associado ao termo de maior grau do polinómio  $p_n(x)$ .

**Desafio 1.34 — Relação entre as raízes da função quadrática.** Verifique que no caso de  $\Delta \geq 0$  o polinómio  $p_2(x) = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$  ( $a \neq 0$ ) coincide com a função quadrática  $ax^2 + bx + c$  se, e só se, as equações abaixo são satisfeitas

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a} \quad \& \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}.$$

Mostre ainda que  $\Delta = a^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ .

■ **Exemplo 1.45 — Função Cúbica.** O número  $x = -3$  é uma raiz do polinómio  $p_3(x) = x^3 + 27$  uma vez que

$$(-3)^3 + 27 = 0.$$

Podemos ainda verificar com recurso ao **Teorema 1.5.1** que  $x = -3$  é a única raiz de  $p_3$ . Com efeito, sabendo que  $x = -3$  o algoritmo da divisão assegura-nos a existência de um polinómio  $q_2(x)$  de grau 2 tal que

$$p_3(x) = (x + 3)q_2(x).$$

Com base em cálculos auxiliares podemos concluir que  $q_2(x) = x^2 - 3x + 9$ . Finalmente, com base no critério mencionado no **Exemplo 1.3.3** não admite raízes reais, uma vez que  $\Delta = -27 < 0$ .

■ **Desafio 1.35** Determine para que valores de  $b$  o polinómio

$$p_3(x) = (x + 3)(x^2 + bx + 9)$$

admite pelo menos duas raízes (i.e. pelo menos mais uma raiz para além de  $x = -3$ ).

■ **Exemplo 1.46** O gráfico da função representado abaixo corresponde ao gráfico do polinómio

$$p_3(x) = -x^3 + 3x^2 + \frac{15}{4}x + 1.$$



Facilmente podemos concluir com base na figura que este polinómio apresenta duas raízes reais, sendo que  $x = 4$  é uma das raízes de  $p_3(x)$ .

Aplicando o **Teorema 1.5.1** podemos deduzir que  $p_3(x) = (x - 4)q_2(x)$ , sendo

$$q_2(x) = -x^2 - x - \frac{1}{4}.$$

Adicionalmente, aplicando a fórmula resolvente verificamos que  $x = -\frac{1}{2}$  é a única raiz de  $q_2(x)$  uma vez que  $\Delta = 0$  (vide **Teorema 1.3.3**).

De facto,  $q_2(x)$  é um quadrado perfeito que pode ser representado na forma

$$q_2(x) = (-1) \left( x - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Portanto,  $p_3$  pode ser escrito na forma

$$p_3(x) = -(x - 3) \left( x - \frac{1}{2} \right)^2.$$

■



O **Exemplo 1.46** mostra-nos que na factorização

$$p_n(x) = a_n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

podem aparecer raízes iguais (i.e.  $\lambda_i = \lambda_j$  para  $i \neq j$ ).



No **Exemplo 1.45 & Exemplo 1.46** verificámos que, conhecendo pelo menos uma raiz de um polinómio  $p_n$ , é possível determinar as restantes raízes.

Em geral, para polinómios de grau  $n > 2$  a determinação de raízes de  $p_n$  nem sempre é uma tarefa trivial, como iremos ver de seguida no **Exemplo 1.47**.

■ **Exemplo 1.47** Podemos facilmente verificar que  $x = -1$  e  $x = 1$  são duas raízes do polinómio  $p_8(x) = x^8 - 4x^4 + 3$ . Logo, a observação que sucede o **Teorema 1.5.1** assegura-nos a existência de  $q_6(x)$  tal que

$$p_8(x) = \underbrace{(x-1)(x+1)}_{=x^2-1} q_6(x).$$

Mais uma vez, cálculos auxiliares baseados no algoritmo da divisão permitem-nos concluir que  $q_6(x) = x^6 + x^4 - 3x^2 - 3$ . No entanto, a inexistência de uma fórmula geral para determinarmos as raízes de  $q_6$  não nos permite concluir se o polinómio  $p_8$  possui raízes adicionais para além de  $x = \pm 1$ . ■

**Desafio 1.36** Com base na mudança de variável  $y = x^4$  verifique que  $x = -1$  e  $x = 1$  são, de facto, as únicas raízes de  $x^8 - 4x^4 + 3$ .

**Desafio 1.37** Use a mudança de variável  $y = (x-1)^2$  para determinar todas as soluções da equação

$$(x^2 - 2x)^2 - (x-1)^2 + 1 = 0.$$

### 1.5.2 Funções Racionais

**Definição 1.5.3 — Função Racional.** Diz-se que  $f$  é uma função racional se é definida por

$$x \longmapsto f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

para todo  $x \in D = \{x \in \mathbb{R} : q_m(x) \neq 0\}$ , onde  $n \in \mathbb{N}_\neq$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ),  $b_j$  ( $j = 0, \dots, m$ ) são constantes reais tais que  $a_n \neq 0$  e  $b_m \neq 0$ .

A função racional diz-se ainda que:

- É própria se  $n < m$
- É imprópria se  $n \geq m$

■ **Exemplo 1.48 — Funções Racionais Próprias.** São exemplo de funções racionais próprias as funções:

- (i)  $\frac{1}{x}$ ;
- (ii)  $\frac{4}{3x+8}$ ;
- (iii)  $\frac{x^2-1}{x^3+4x}$ .

■ **Exemplo 1.49 — Funções Racionais Impróprias.** São exemplo de funções racionais próprias as funções:

- (i)  $\frac{2x-1}{x+3}$ ;
- (ii)  $\frac{x^3-1}{x^2+4}$ ;
- (iii)  $\frac{x^4+3x^2+3x+1}{x^4+2x^2}$ .



Com base na **Definição 1.5.3** e no **Teorema 1.4.1** tem-se que os **zeros de**  $\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$  são essencialmente as **raízes de**  $p_n(x)$ . Por seu turno, o domínio de  $\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$  é constituído por todos os números reais **com exceção das raízes de**  $q_m(x)$ .

**Desafio 1.38** Determine o domínio e os zeros das funções racionais impróprias do **Exemplo 1.49**.

■ **Exemplo 1.50** Sendo  $m \in \mathbb{N}$ , definimos a função potência de expoente inteiro negativo,  $x \mapsto f_m(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ , para todo  $x \in D$ . ■

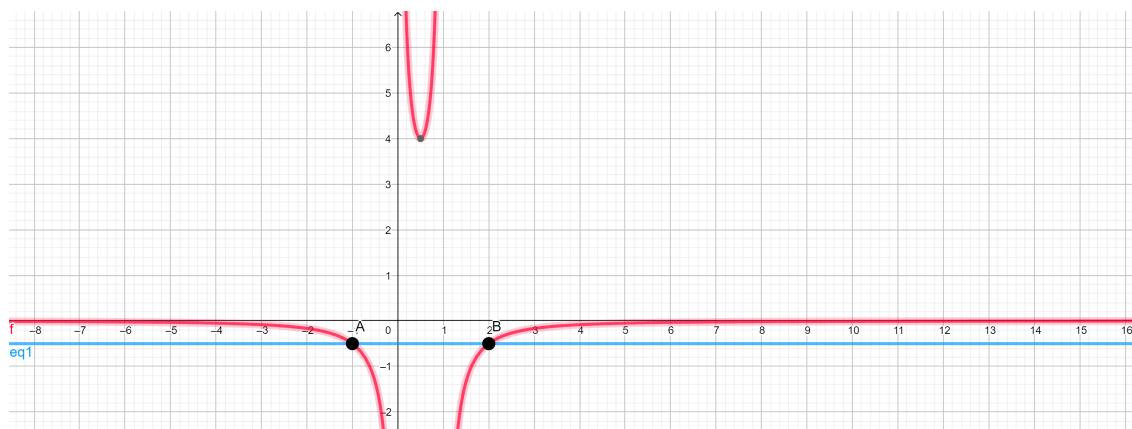
**Desafio 1.39** Determine o domínio e enuncie as propriedades da função potência de expoente inteiro negativo.

### Resolução de equações e inequações

■ **Exemplo 1.51** Graficamente, a resolução da equação

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

pode ser determinada como a intersecção do gráfico da função racional imprópria,  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ , (a magenta) com a reta horizontal de equação  $y = -\frac{1}{2}$  (a azul ciano) tal como ilustrado na figura abaixo, onde as abscissas dos pontos  $A$  e  $B$  representam as duas soluções da equação.



Analiticamente, para determinar as soluções da equação acima precisamos de utilizar um argumento análogo ao utilizado para a determinação do mínimo múltiplo comum (m.m.c), para podermos simplificar  $f$  na forma  $\frac{p}{q}$ .

Em concreto, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} &= \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} \\ &= -\frac{1}{x^2 - x}. \end{aligned}$$

Logo  $f(x) = -\frac{1}{2}$  se, e só se  $x^2 - x = 2$ ,  $x \neq 0$  e  $x \neq 1$ , ou equivalentemente

$$x^2 - x - 2 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1.$$

A tarefa de determinar as raízes do polinómio acima de modo a confirmar a resolução gráfica fica a cargo do leitor. ■

### 1.5.3 Funções Irracionais

■ **Exemplo 1.52** Sendo  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \neq 1$ , definimos a função raiz de índice  $n$ ,  $x \mapsto f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ , para todo  $x \in D$ .

Propriedades:

(i) Se  $n$  é par então:

1.  $D = [0, +\infty[$

2. É positiva
  3. É estritamente crescente
  4. É convexa
- (ii) Se  $n$  é ímpar então
1.  $D = \mathbb{R}$
  2. É negativa em  $]-\infty, 0[$  e positiva em  $]0, +\infty[$
  3. É estritamente crescente
  4. É convexa em  $]-\infty, 0[$  e côncava em  $]0, +\infty[$

■ **Exemplo 1.53** (Funções raiz raiz cúbica e raiz índice 4)

**Desafio 1.40** Consideremos  $x \mapsto f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \neq 1$ .

- (i) Defina a função inversa de  $f_n$ ;
- (ii) Defina a função reciproca de  $f_n$ ;
- (iii) Para  $n = 3$ , faça os gráficos das funções inversa e reciproca que obteve e assinale as diferenças/semelhanças entre essas funções.

#### 1.5.4 Funções Exponenciais

Sendo  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , a função exponencial de base  $a$  é definida por  $f(x) = a^x$ , para todo  $x \in D$ .

Propriedades:

1.  $D = \mathbb{R}$  e  $D' = ]0, +\infty[$ ;
2. É positiva, isto é,  $a^x > 0$  para todo o real  $x$ ;
3. Não é ímpar nem par;
4. Não é limitada nem periódica;
5. É estritamente crescente se  $a > 1$  mas é estritamente decrescente se  $a < 1$ ;
6. É convexa.

Eis as regras operatórias das exponenciais:

- $a^0 = 1$  ;  $a^1 = a$ ;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ;
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$ ;
- $a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$ ;
- $a^{x_1x_2} = (a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1}$ ;

para  $x, x_1, x_2$ .

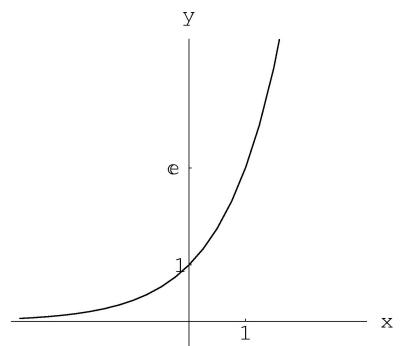
De entre as funções exponenciais, as exponenciais de base  $e$  têm mais relevância, sendo

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828\dots$$

o número de Neper.

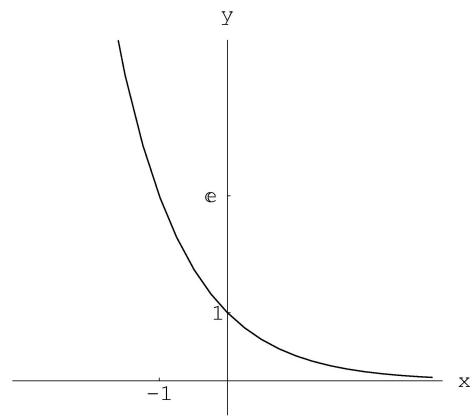
■ **Exemplo 1.54** Gráfico da função exponencial de base  $e$ :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto y = f(x) = e^x \end{aligned}$$



■ **Exemplo 1.55** Gráfico da função exponencial de base  $e^{-1}$ :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto y = g(x) = e^{-x} \end{aligned}$$



**Desafio 1.41** Identifique, justificando, a simetria entre os gráficos de  $f$  e  $g$  no **Exemplo 1.54** e **Exemplo 1.55**.

**Desafio 1.42** Considere as funções  $f$  e  $j$  definidas por

$$f(x) = e^{-x} - 2, \quad j(x) = e^x.$$

- Trace o gráfico de  $f$  tendo por base o gráfico de  $j$ .
- Determine a ordenada do ponto que pertence ao gráfico de  $f$  cuja abcissa é  $\ln(0,5)$ .
- Determine o conjunto-solução de

$$\{x \in \mathbb{R} : -1 < f(x) \leq 0\}.$$

Recorrendo a argumentos geométricos, verifique se o conjunto de pontos que obteve está correcto.

- Resolva a equação  $f(x) = j(x)$ .

■ **Exemplo 1.56 — Modelos Populacionais.** A evolução do número de indivíduos de uma população ao longo do tempo  $t$ ,  $t \geq 0$  é representada por uma função  $t \mapsto y = f(t)$ . No período de tempo  $I = [t, t+1]$ , o acréscimo do tamanho da população é dado por

$$\Delta y = f(t+1) - f(t).$$

Assim, a população cresce em  $I$  se  $\Delta y > 0$  mas decresce em  $I$  se  $\Delta y < 0$ .

Além disso, a taxa de variação relativa (i.e, por indivíduo) em  $I$  é definida por

$$r(t) = \frac{\Delta y}{y}.$$

**Desafio 1.43** Determine a taxa de variação relativa em  $[t, t+1]$ ,  $r(t)$ , para os modelos populacionais representados por

- $f(t) = at + b$ , onde  $a$  e  $b > 0$  são constantes;
- $f(t) = ba^t$ , onde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , e  $b > 0$  são constantes;
- Explique as diferenças entre os dois modelos.

**Desafio 1.44 Aplicação -  $R_0$  o número básico de reprodução usado em Epidemiologia** - Link: <https://www.youtube.com/watch?v=S6IyIsbaG2k>

Considere  $y = f(t)$  o número de indivíduos infectados por um vírus no instante  $t$ . Recorrendo ao modelo exponencial, representado por  $f(t) = ba^t$ , justifique que  $R_0$  é obtido através de uma razão (ou rácio).

Verifique que  $R_0$  está relacionado com a taxa de variação relativa em  $[t, t+1]$ . Assim sendo, podemos concluir que:

- Se  $R_0 > 1$  então cada indivíduo infecta, em média, mais do que um indivíduo e a doença se propaga;
- Se  $R_0 < 1$  então cada indivíduo infecta, em média, menos do que um indivíduo e a doença se erradica.

Consulte ainda - Link: <https://plus.maths.org/content/mathematics-minute-r0-and-herd-immunity>

■ **Exemplo 1.57 — Modelo de Juros Compostos com Capitalização Contínua.** Quando um cliente de uma instituição bancária pede dinheiro emprestado paga um juro sobre o montante devido e quando deposita dinheiro, por exemplo, numa conta poupança, recebe um juro sobre o montante do depósito. O juro é determinado como o produto do capital por uma taxa, durante um período acordado entre as partes. Assim, o juro é uma variável, referida ao período de capitalização, mas só disponível no vencimento que, geralmente coincide com o fim do período. Mas, o capital é uma variável, referida a um momento (início ou fim do período de capitalização). A capitalização é a transformação ao longo do tempo do capital em capital e juro de acordo com uma dada taxa de juro. No regime de juros compostos, o stock de capital cresce de vencimento para vencimento; há juros de juros no interior do próprio processo de capitalização; os juros, mal se vencem, passam a ser capital para contagem do juro do período seguinte.

Suponhamos que um dado capital inicial,  $C_0$  euros, é aplicado durante um ano a uma taxa de juro anual fixa de  $r$  por cento. Admitamos ainda que a capitalização desse capital se efectua em  $n$  períodos iguais durante o ano. Então o capital acumulado no final do ano é dado por

$$C = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Generalizando, isto é, supondo agora que um dado capital inicial,  $C_0$  euros, é aplicado à taxa anual fixa de  $r$  por cento, capitalizável  $n$  vezes ao ano, então a expressão geral do capital acumulado no regime de juros compostos ao fim de  $t$  anos é

$$C = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Matematicamente, suponhamos agora que  $n \rightarrow +\infty$ .

Atendendo a que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

vem

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = C_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = C_0 e^r$$

Esta fórmula representa então o capital acumulado no final do ano em função do capital inicial  $C_0$  aplicado a uma taxa de juro fixa anual de  $r$  por cento. Generalizando, a expressão geral do capital acumulado ao fim de  $t$  anos é

$$C = C_0 e^{rt}$$

Diz-se que é a fórmula do juro composto com capitalização contínua. ■



Se o seu banco lhe oferece uma taxa de juro anual de  $100r\%$ , e se este juro é composto  $n$  vezes por ano (p.e. mensal, trimestral, semestral) então a taxa de juros mensal que é aplicado ao seu depósito a prazo é igual a  $k = \frac{100r}{n}\%$ .

**Desafio 1.45** Suponha que um capital de 2000 euros é colocado a render numa conta poupança, em regime de juros compostos, à taxa fixa anual de 4%. Quanto tempo é necessário para duplicar o capital inicial?

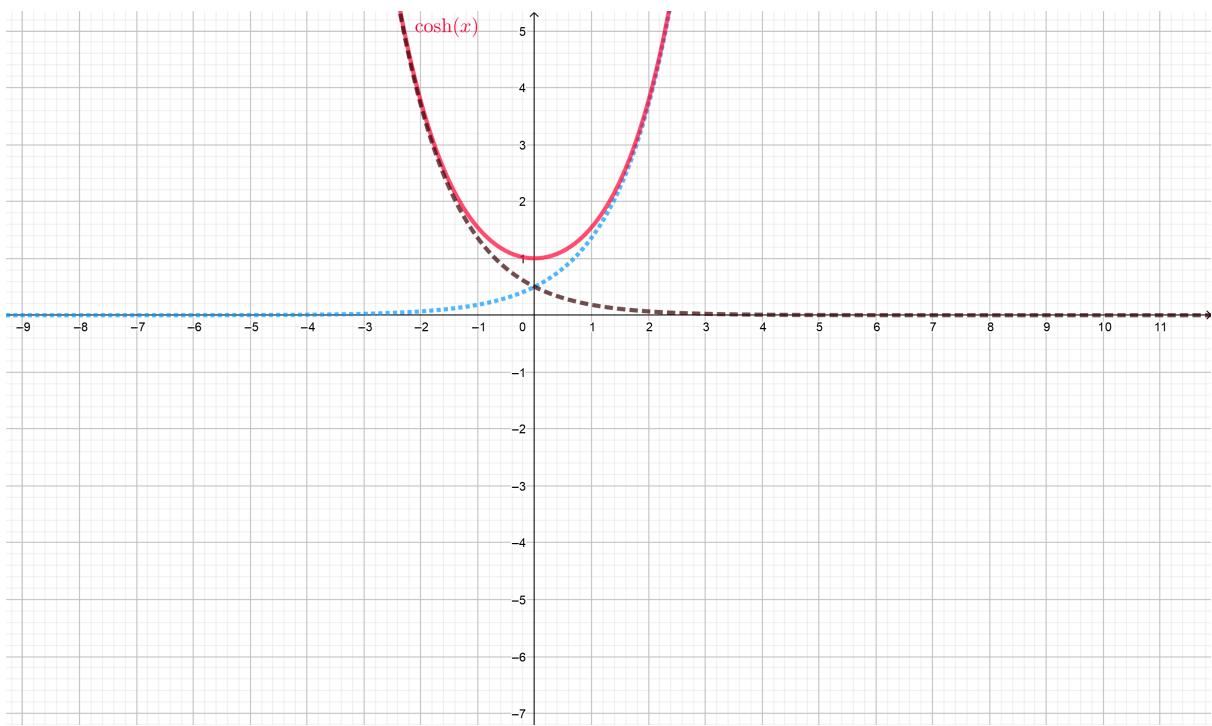


Figura 1.15: Ilustração gráfica do **Teorema 1.3.5**. O gráfico da função cosseno hiperbólico como sobreposição dos gráficos das funções  $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$  (pontilhado a azul ciano) e  $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$  (tracejado a castanho).

- (a) Resolva o problema, aplicando o regime de juros compostos com capitalização trimestral, semestral e anual.
- (b) Resolva o problema, aplicando o regime de juros compostos com capitalização contínua.
- (e) Compare os resultados obtidos nas alíneas (a) e (b) e explique-os.

### 1.5.5 Funções Hiperbólicas

As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são definidas, respectivamente, por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \& \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .



Com base no **Teorema 1.3.5**, as funções  $x \mapsto \cosh(x)$  e  $x \mapsto \sinh(x)$  correspondem à parte par e à parte ímpar, respectivamente, da função exponencial  $x \mapsto e^x$ .

**Desafio 1.46** Determine o domínio e o contradomínio das funções hiperbólicas (cosseno e seno) e estude as suas propriedades quanto ao sinal e paridade. Recorrendo aos gráficos, estude a monotonia e as concavidades.



Figura 1.16: Ilustração gráfica do **Teorema 1.3.5**. O gráfico da função seno hiperbólico como sobreposição dos gráficos das funções  $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$  (pontilhado a azul ciano) e  $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x}$  (tracejado a laranja).

**Desafio 1.47 Aplicação - Catenária** - Link: [https://youtu.be/yBH5ezzY\\_-0](https://youtu.be/yBH5ezzY_-0)

Um cabo flexível e não-elástico suspenso em dois extremos com a mesma altura sob a ação da gravidade descreve uma curva, conhecida por catenária. Essa curva representa o gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{e^{mx+b} + e^{-mx-b}}{2m}$$

onde  $m > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

Admita que para valores de  $m = 0,15$  e  $b = -0,90$  a função acima corresponde a uma catenária formada por um fio suspenso de dois postes,  $P_1$  e  $P_2$ , distanciados 15 metros entre si, em que  $f(x)$  dá-nos a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado à direita do poste  $P_1$ , com  $x \in [0, 15]$ .

1. Verifique se os postes  $P_1$  e  $P_2$  têm a mesma altura.
2. Suponha que um pássaro pousa num ponto do fio, situado mais perto do poste  $P_1$  do que do poste  $P_2$ , a uma distância [aproximada] de 12,5 metros do solo. Determine a distância desse ponto do fio ao poste  $P_2$ .

**Desafio 1.48 — Identidades envolvendo funções hiperbólicas.**

Mostre que:

- (i)  $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$       (ii)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$   
 (iii)  $\cosh x > \sinh x$       (iv)  $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x)$



Tal como para as funções circulares podemos definir as seguintes funções:

1. Tangente hiperbólica  $x \mapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ ;
2. Cotangente hiperbólica  $x \mapsto \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$ ;
3. Secante hiperbólica  $x \mapsto \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ ;
4. Cossecante hiperbólica  $x \mapsto \operatorname{coth} x = \frac{1}{\sinh x}$ .

### 1.5.6 Funções Logarítmicas

Sendo  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , a função logarítmica de base  $a$  é definida por  $f(x) = \log_a x$ , para todo  $x \in D$ .

Propriedades:

1.  $D = ]0, +\infty[$  e  $D' = \mathbb{R}$ ;
2. É negativa em  $]0, 1[$ , mas positiva em  $]1, +\infty[$  se  $a > 1$ . Caso contrário, é positiva em  $]0, 1[$ , mas negativa em  $]1, +\infty[$ ;
3. Não é ímpar nem par;
4. Não é limitada nem periódica;
5. É estritamente crescente se  $a > 1$  mas é estritamente decrescente se  $a < 1$ ;
6. É côncava se  $a > 1$  mas é convexa se  $a < 1$ .

Eis as regras operatórias dos logaritmos

- $\log_a 1 = 0$  ;  $\log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a(x^p) = p \log_a x$

para  $x, x_1, x_2 \in ]0, +\infty[$  e para todo  $p \in \mathbb{R}$ .

O próximo resultado serve para calcular logaritmos por intermédio de uma mudança de base.

**Teorema 1.5.2** Quaisquer que sejam os reais positivos  $a$  e  $b$ , distintos e diferentes da unidade, tem-se

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

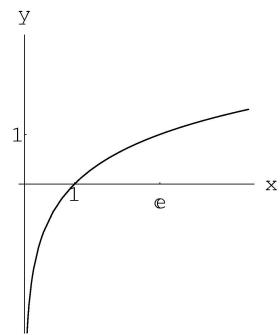
As bases do logaritmo mais usadas são o número de Neper

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828\dots$$

e o número 10. Ao logaritmo de base  $e$  chamamos logaritmo natural ou neperiano e representamos por  $\log x$  ou  $\ln x$ . Por sua vez,  $\log_{10} x$  representa o chamado logaritmo decimal.

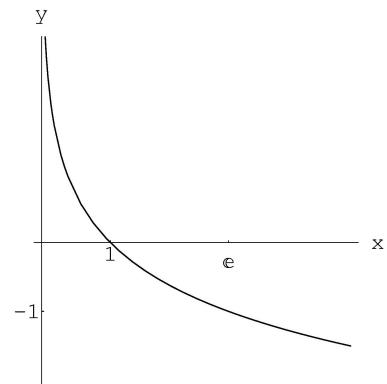
■ **Exemplo 1.58** Gráfico da função logarítmica de base  $e$ :

$$\begin{aligned} g : ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \ln x \end{aligned}$$



■ **Exemplo 1.59** Gráfico da função logarítmica de base  $e^{-1}$ :

$$\begin{aligned} f : ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \log_{e^{-1}} x \end{aligned}$$



**Desafio 1.49** Identifique, justificando, a simetria entre os gráficos de  $g$  e  $f$  dos exemplos anteriores.

**Desafio 1.50** Considere a função seno hiperbólico  $x \mapsto \sinh x$ .

- (i) Justifique que tem inversa;
- (ii) Esboce o gráfico da inversa;
- (iii) Representando a sua inversa por  $\text{argsinh}$  (argumento seno hiperbólico), mostre que

$$\text{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Desafio 1.51 — Funções logísticas em redes neurais.** A função logística  $f : D \rightarrow D'$  da forma

$$f(x) = \frac{1}{1 + a^{-x}} \quad (a > 1)$$

é frequentemente utilizada em redes neurais como função de activação.

Para esta função:

1. Mostre que para qualquer base  $a$ , o gráfico de  $x \mapsto f(x)$  pode ser obtido a partir do gráfico da função  $x \mapsto \tanh(x)$  por translações e dilatações.

SUGESTÃO: Comece por verificar as seguintes igualdades:

- $a^{-x} = e^{-x \ln(a)}$ ;

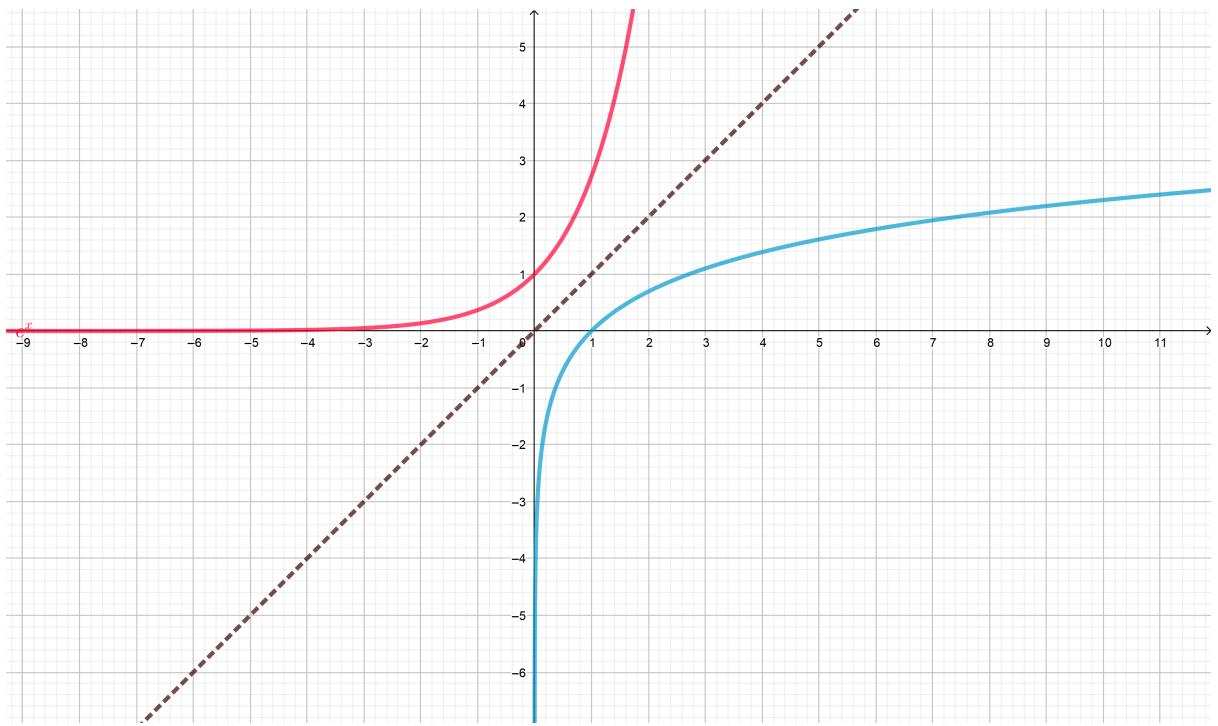


Figura 1.17: Ilustração gráfica do **Corolário 1.4.6**. O gráfico da função  $x \mapsto \ln(x)$  (a azul ciano) é obtido como reflexão do gráfico da função  $x \mapsto e^x$  (a magenta) relativamente à recta  $y = x$  (tracejado a castanho).

- $\tanh(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ ;
- $1 + \frac{1 - a^{-x}}{1 + a^{-x}} = \frac{2}{1 + a^{-x}}$ .

2. Para  $a = 2$ , determine a expressão analítica da função inversa  $x \mapsto f^{-1}(x)$ .
3. Determine o domínio de  $f^{-1}$ . De seguida, diga justificando se  $f$  se trata de uma função limitada.

### 1.5.7 Função Exponencial-Potência

Atendendo a que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, para todo  $x > 0$  temos

$$x = a^{\log_a x}$$

onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Em particular,  $x = e^{\ln x}$ .

**Definição 1.5.4 — Função Exponencial-Potência.** Dadas as funções  $f$  e  $g$  de domínios  $D_f$  e  $D_g$ , respectivamente, define-se a função Exponencial-Potência  $h$  através de

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \ln[f(x)]}.$$

O seu domínio é dado por

$$D_h = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}.$$



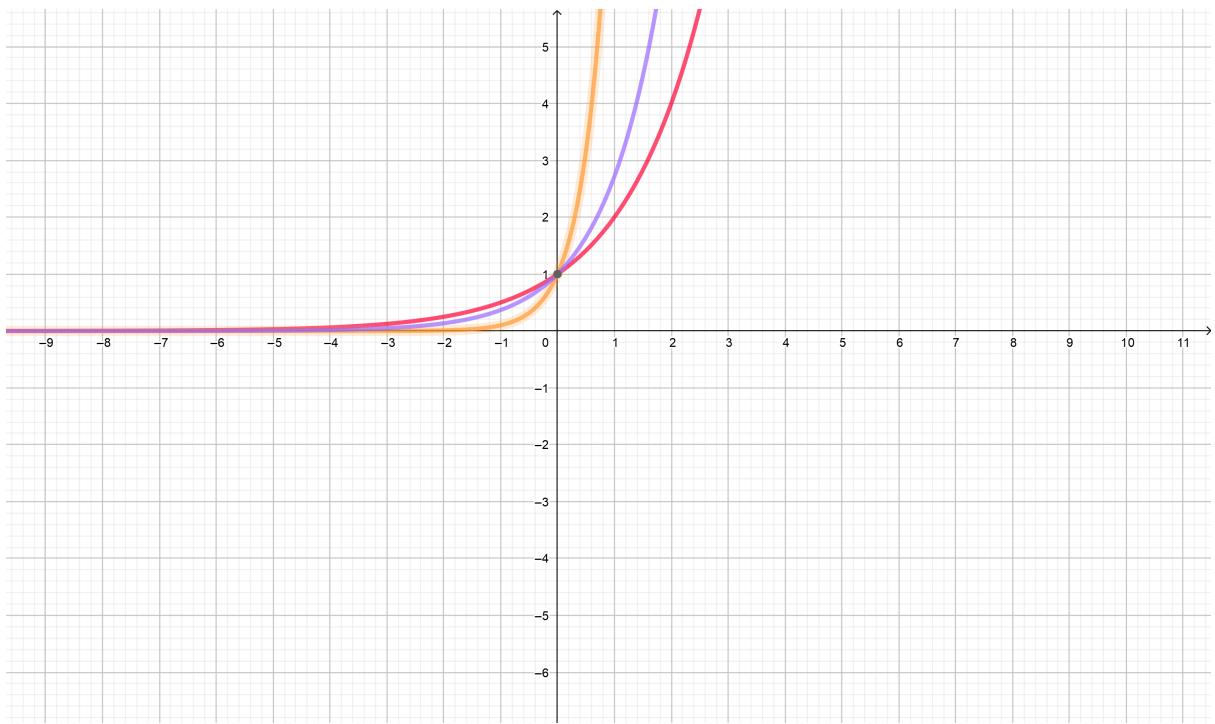


Figura 1.18: Ilustração gráfica da **Definição 1.5.4**. O gráfico da função  $x \mapsto 2^x$  (a vermelho) e  $x \mapsto 10^x$  (a laranja) correspondem a homotetias do gráfico da função  $x \mapsto e^x$  (a azul) associadas às constantes  $c = \ln(2)$  e  $c = \ln(10)$ , respectivamente—vide **Definição 1.4.4**.

- (i) Se  $f(x) = a \in \mathbb{R}$  e  $g$  não é constante, temos uma função exponencial de base  $a$  e expoente variável  $g(x)$ .
- (ii) Se  $f$  não é constante e  $g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ , temos uma função potência de base variável  $f(x)$  e expoente  $\alpha$ .

**Desafio 1.52** Determine o domínio de  $f$  tal que:

- |                             |  |
|-----------------------------|--|
| (a) $f(x) = x^x$            | (b) $f(x) = \left(1 + \frac{2020}{x}\right)^x$ |
| (c) $f(x) = (1 + 3x)^{1/x}$ | (d) $f(x) = \ln(2 - x)^{\sqrt{x}}$             |

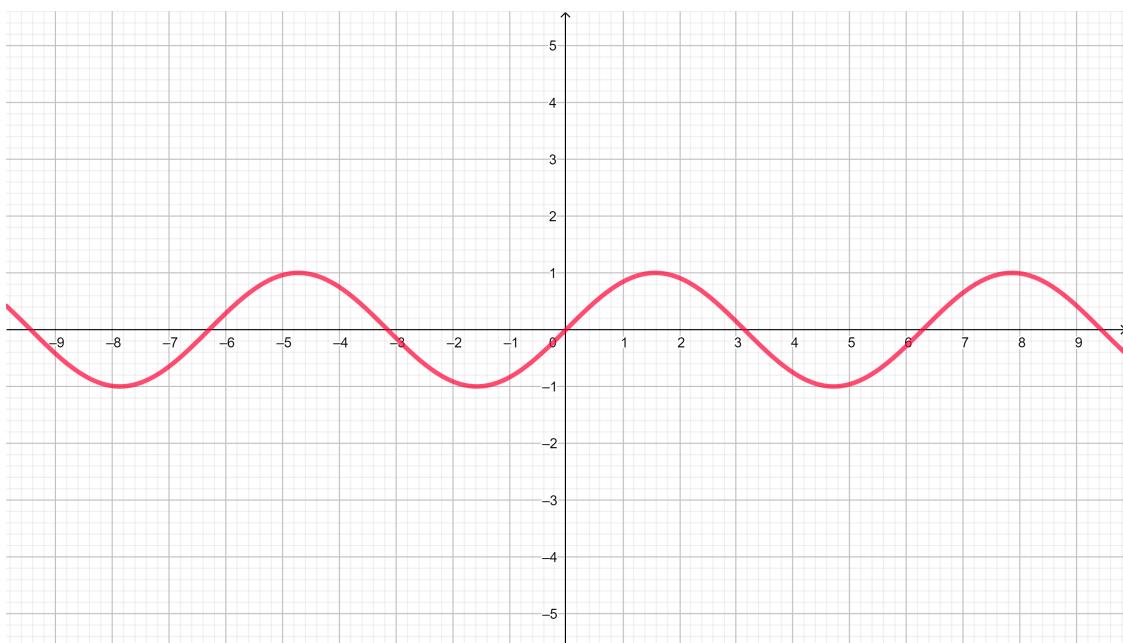
**Desafio 1.53** Resolva as seguintes inequações em  $\mathbb{R}$ :

1.  $x^{1.25} \leq 1.34$ .
2.  $x^{\frac{x^3 - 16x}{\ln(x)}} \leq 0$ .

### 1.5.8 Funções Trigonométricas

#### Função Seno

A função seno definida por  $f(x) = \sin(x)$ , para todo  $x \in D$ , tem a seguinte representação gráfica:



#### Propriedades:

1.  $D = \mathbb{R}$  e  $D' = [-1, 1]$ ; Eis a tabela de alguns valores da função seno:

$x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

2. É periódica de período  $2\pi$  e limitada;
3. É ímpar, isto é,  $\sin(-x) = -\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
4. Eis o quadro de sinal da função seno no intervalo simétrico  $[-\pi, \pi]$ :

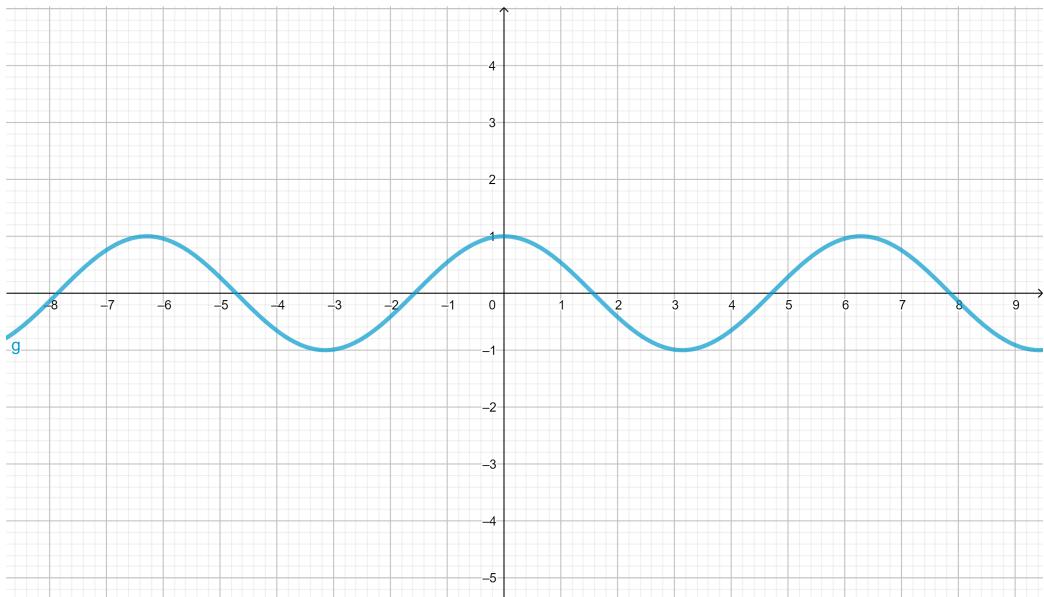
$x$	$-\pi$		0		$\pi$
$f(x)$	0	-	0	+	0

É negativa em  $[-\pi, 0]$ , mas positiva em  $[0, \pi]$ ;

5. É estritamente decrescente em  $[-\pi, -\pi/2]$  e em  $[\pi/2, \pi]$ , mas estritamente crescente em  $[-\pi/2, \pi/2]$ ;
6. É convexa em  $[-\pi, 0]$ , mas côncava em  $[0, \pi]$ .

#### Função Cosseno

A função cosseno definida por  $f(x) = \cos x$ , para todo  $x \in D$ , tem a seguinte representação gráfica:



### Propriedades:

1.  $D = \mathbb{R}$  e  $D' = [-1, 1]$ ; Eis a tabela de alguns valores de da função cosseno:

$x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

2. É periódica de período  $2\pi$  e limitada;
3. É par, isto é,  $\cos(-x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
4. Eis o quadro de sinal da função cosseno no intervalo simétrico  $[-\pi, \pi]$ :

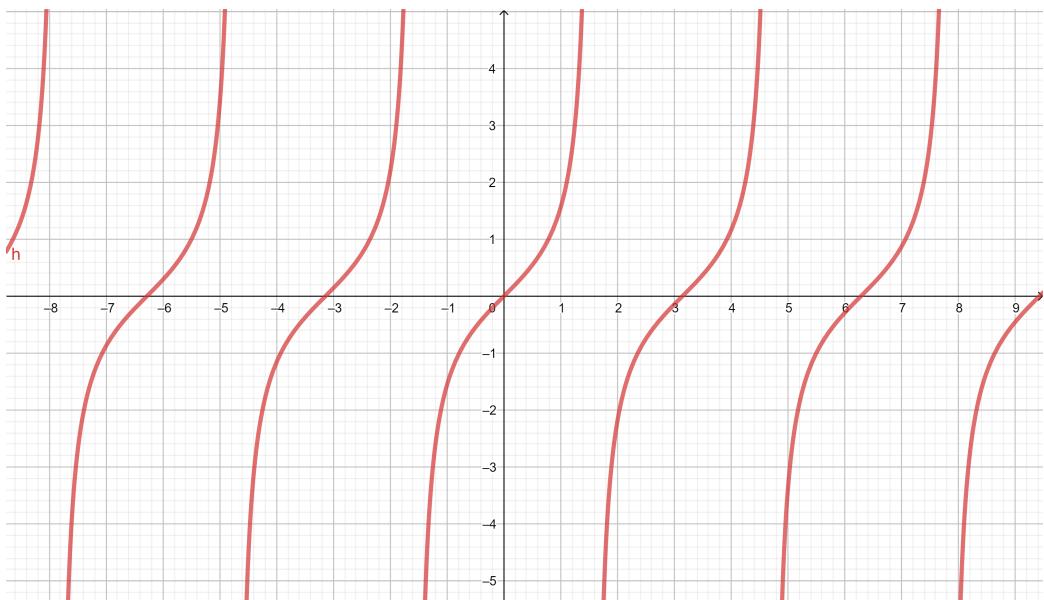
$x$	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		$\pi$
$\cos(x)$	-1	-	0	+	0	-	-1

É negativa em  $[-\pi, 0]$ , mas positiva em  $[0, \pi]$ ;

5. É estritamente crescente em  $[-\pi, 0]$ , mas estritamente decrescente em  $[0, \pi]$ ;
6. É convexa em  $[-\pi, -\pi/2]$  e em  $[\pi/2, \pi]$ , mas côncava em  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

### Função Tangente

A função tangente definida por  $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , para todo  $x \in D$ , tem a seguinte representação gráfica:



**Propriedades:**

1.  $D = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  e  $D' = \mathbb{R}$ ;

Eis a tabela de alguns valores da função tangente:

$x$	$0$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\text{tg}$	$0$	$\sqrt{3}/3$	$1$	$\sqrt{3}$	n.d

2. É periódica de período  $\pi$ ;
3. É ímpar, isto é,  $\text{tg}(-x) = -\text{tg}x, x \in D$ ;
4. Eis o quadro de sinal da função tangente no intervalo simétrico  $[-\pi, \pi]$ :

$x$	$-\pi/2$		$0$	$\pi/2$
$\text{tg}$	n.d	-	0	+

É negativa em  $[-\pi, 0]$ , mas positiva em  $[0, \pi]$ ;

5. É estritamente crescente em  $[\pi/2, \pi/2]$ ;
6. É côncava em  $[-\pi/2, 0]$  mas convexa em  $[0, \pi/2]$ .

**Desafio 1.54 — Função Cotangente.** A função cotangente é definida por  $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , para todo  $x \in D$ . Determine o domínio e estude as suas propriedades a partir da representação gráfica.

**Desafio 1.55 — Função Recíproca do Seno.** A função secante é definida por  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  para todo  $x \in D$ . Determine o domínio e estude as suas propriedades a partir da representação gráfica.

**Desafio 1.56 — Função Recíproca do Cosseno.** A função cosecante é definida por  $\cosec x = \frac{1}{\sin x}$ , para todo  $x \in D$ . Determine o domínio e estude as suas propriedades a partir da representação gráfica.

**Desafio 1.57 — Revisão Trigonometria.** Mostre que:

$$(i) \sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \quad (ii) \sec^2 x + \cosec^2 x = \sec^2 x \cosec^2 x$$

$$(iii) \sec x \cosec x = \frac{2}{\sin(2x)} \quad (iv) \frac{\sec x}{\cosec x} = \text{tg} x$$

### 1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas

#### Função Arco Seno

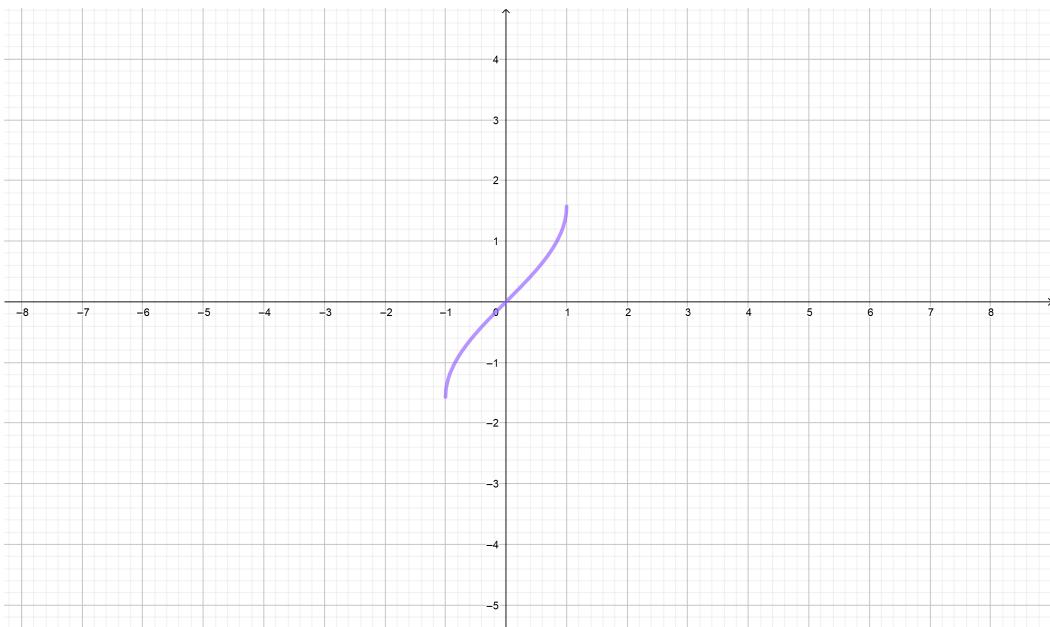
A restrição da função seno a  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  é injectiva. A sua inversa, designada por função arco seno, satisfaz:

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y$$

para  $x \in [-1, 1]$  e  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Logo, obtemos

$$\arcsin(\sin y) = y \quad ; \quad \sin(\arcsin x) = x$$

A sua representação gráfica é



#### Propriedades:

1.  $D = [-1, 1]$  e  $D' = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ; Eis a tabela de alguns valores da função arco seno:

$x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$f(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

2. É ímpar, isto é,  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ ,  $x \in [-1, 1]$ ;

3. Eis o quadro de sinal da função arco seno:

$x$	-1		0		1
$\arcsin(x)$	$-\pi/2$		0		$\pi/2$

É negativa em  $[-1, 0[$ , mas positiva em  $]0, 1]$ ;

4. É limitada pois  $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ ;

5. É estritamente crescente, isto é,

$$x_1 < x_2 \implies \arcsin x_1 < \arcsin x_2, x_1 \in [-1, 1] \wedge x_2 \in [-1, 1];$$

6. É côncava em  $[-1, 0[$ , mas convexa em  $]0, 1]$ .

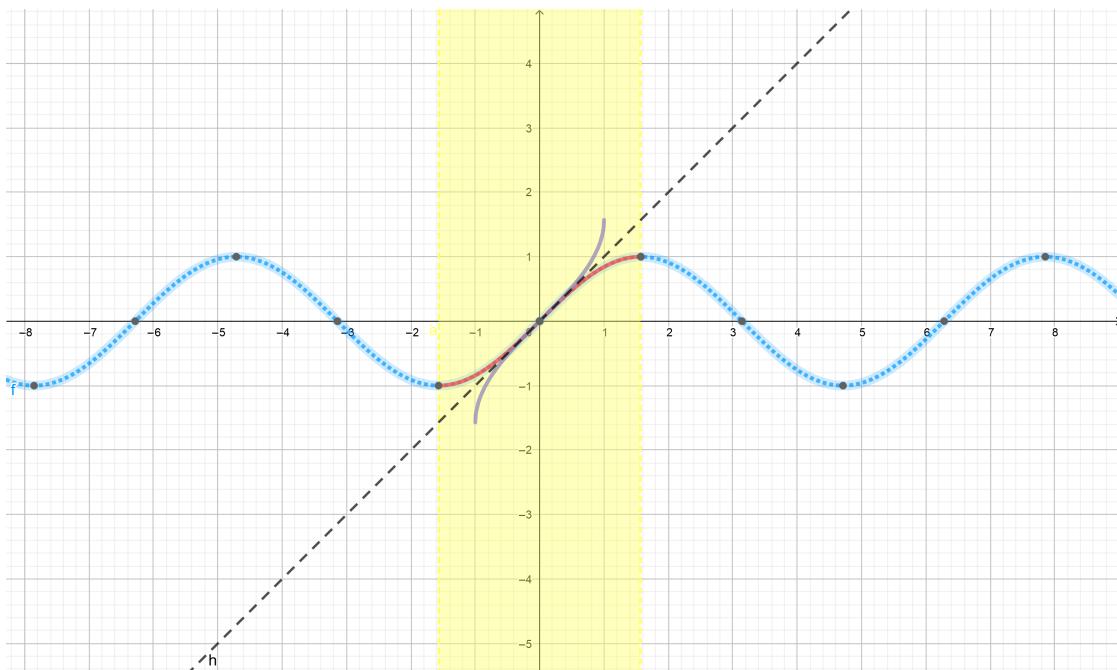


Figura 1.19: Ilustração gráfica do **Corolário 1.4.6**. Para determinarmos graficamente a **inversa da função seno** (gráfico pontilhado a azul ciano), começámos por considerar apenas o gráfico da função ao intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( $1^{\circ}$  e  $4^{\circ}$  quadrantes) de modo a assegurarmos a sua injectividade via a monotonia do gráfico – vide **Corolário 1.3.10**. Para obtermos de seguida o gráfico de  $x \mapsto \arcsin(x)$  (a roxo) fizemos a reflexão do gráfico a magenta relativamente à recta  $y = x$  (gráfico tracejado a preto).

**Desafio 1.58** Para as constantes reais  $\omega$  &  $\phi$  tais que  $\omega > 0$  &  $\phi \neq 0$ , considere a função  $f$  definida por

$$f(x) = \operatorname{cosec}(\omega x + \phi).$$

1. Estude a paridade da função para valores  $\phi = \pi$  &  $\phi = \frac{3\pi}{2}$ .
2. Determine o domínio e o contradomínio.
3. Determine o período de  $f$ .
4. Determine a função inversa de  $f$  termos da função  $x \mapsto \arcsin(x)$ .

### Função Arco Cosseno

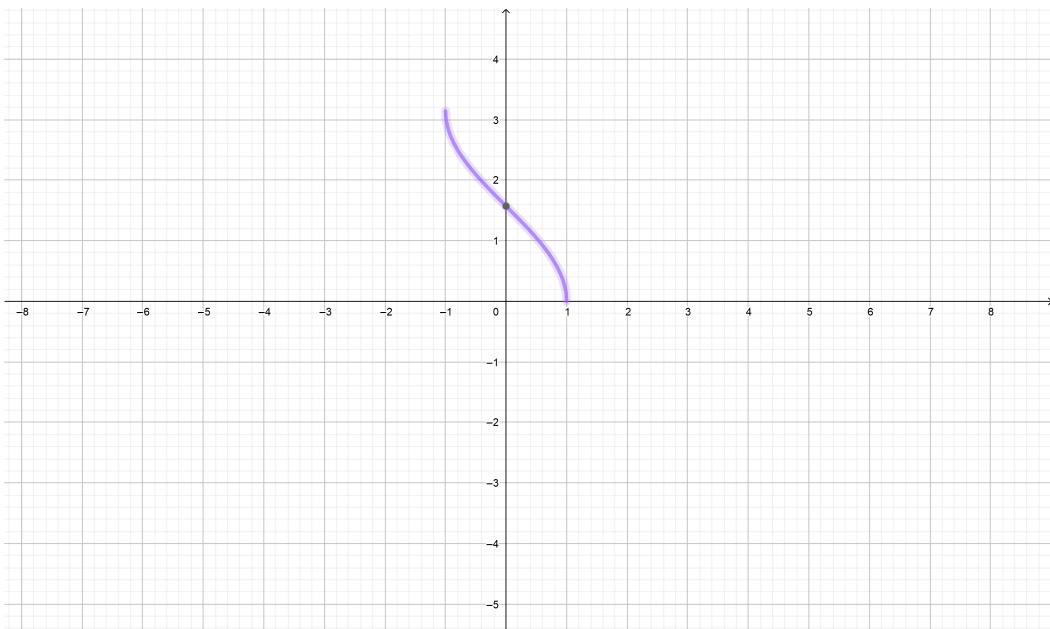
A restrição da função cosseno a  $[0, \pi]$  é injectiva. A sua inversa, designada por função arco cosseno, satisfaz:

$$\arccos(\cos y) = y \quad ; \quad \cos(\arccos x) = x$$

para  $x \in [-1, 1]$  e  $y \in [0, \pi]$ . Logo, obtemos

$$\arccos(\cos y) = y \quad ; \quad \cos(\arccos x) = x$$

A sua representação gráfica é



#### Propriedades:

1.  $D = [-1, 1]$  e  $D' = [0, \pi]$ ; Eis a tabela de para alguns valores da função arco cosseno:

$x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arccos(x)$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

2. Não é ímpar nem par;
3. É não-negativa, isto é,  $\arccos x \geq 0$ ,  $x \in [-1, 1]$
4. ; É limitada pois  $0 \leq \arccos x \leq \pi$ ,  $x \in [-1, 1]$ ;
5. É estritamente decrescente, isto é,

$$x_1 < x_2 \implies \arccos x_1 > \arccos x_2, x_1 \in [-1, 1] \wedge x_2 \in [-1, 1];$$

6. É convexa em  $[-1, 0[$ , mas côncava em  $]0, 1]$ .

**Desafio 1.59** Use a identidade trigonométrica  $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$  para mostrar que

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x), x \in [-1, 1].$$

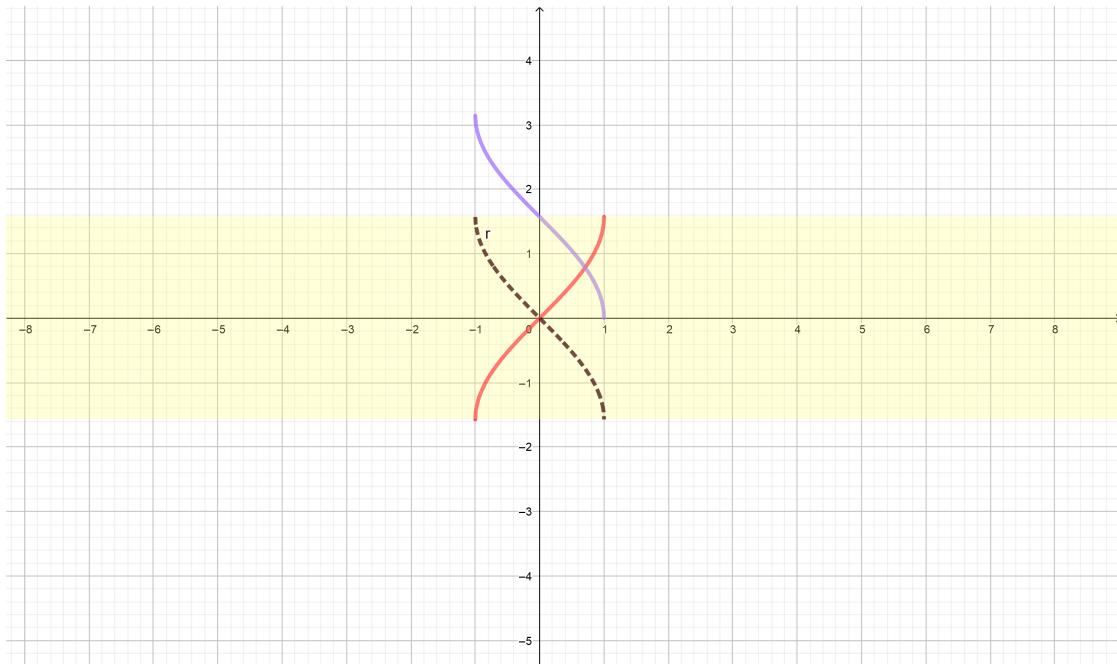


Figura 1.20: Ilustração gráfica da **Definição 1.4.4**. A identidade a demonstrar no **Desafio 1.59** permite-nos obter o gráfico da função arco cosseno (a lilás) a partir do gráfico da função arco seno (a magenta) por transformações gráficas. Na figura, o gráfico tracejado a castanho corresponde simultaneamente: (i) à reflexão do gráfico de  $x \mapsto \arcsin(x)$  na vertical (ii) à translação do gráfico a lilás na vertical.

**Desafio 1.60** Para a funções  $f$  e  $g$  definidas por

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2) \quad \& \quad g(x) = 2 \arcsin(x)$$

1. Determine o domínio e o contradomínio de  $f$  e  $g$ .
2. Estude  $f$  e  $g$  quanto à paridade.
3. Diga, justificando, para que valores de  $x$ , as funções  $f$  e  $g$  coincidem.  
SUGESTÃO: Faça a substituição  $\theta = \arcsin(x)$  nas identidades trigonométricas  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$  &  $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$ .
4. Determine a inversa da função  $f$  em termos da função  $x \mapsto \arcsin(x)$ , indicando o seu domínio e contradomínio.

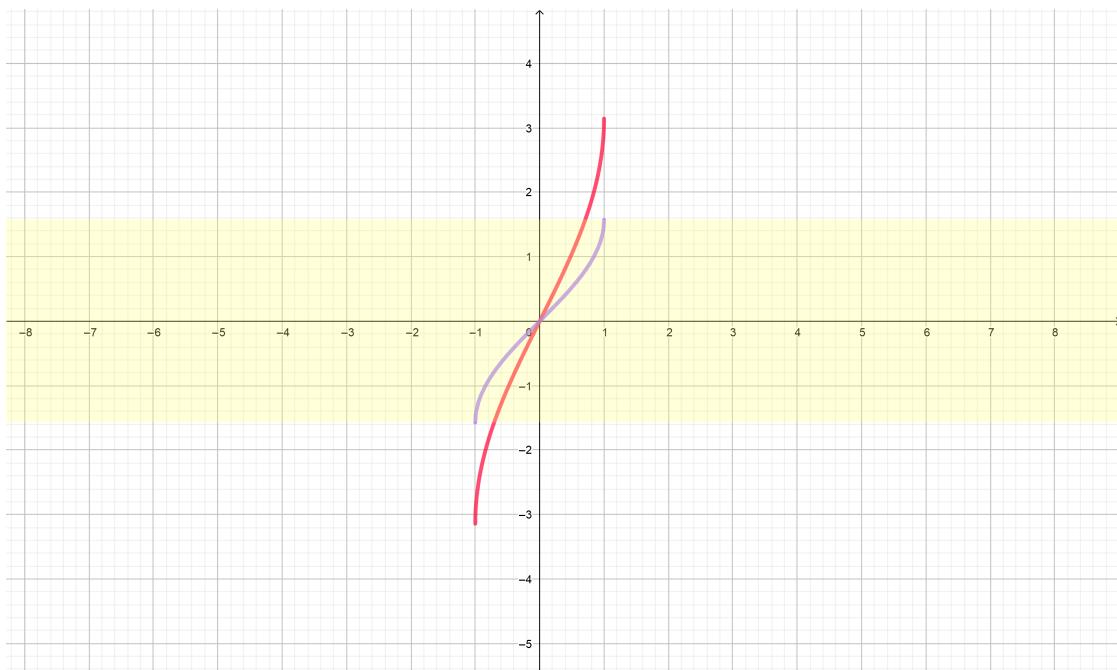


Figura 1.21: Ilustração gráfica da **Definição 1.4.4**. Na figura encontram-se representados os gráficos da função arco seno (a lilás) e o gráfico da função  $g$  do **Desafio 1.60** (a magenta). Esta última corresponde a dilatação (ou homotetia) do gráfico de  $x \mapsto \arcsin(x)$  na vertical. Um bom desafio passa por verificar que o gráfico da função  $f$  é, na verdade, uma reflexão do gráfico da função  $g$  na vertical.

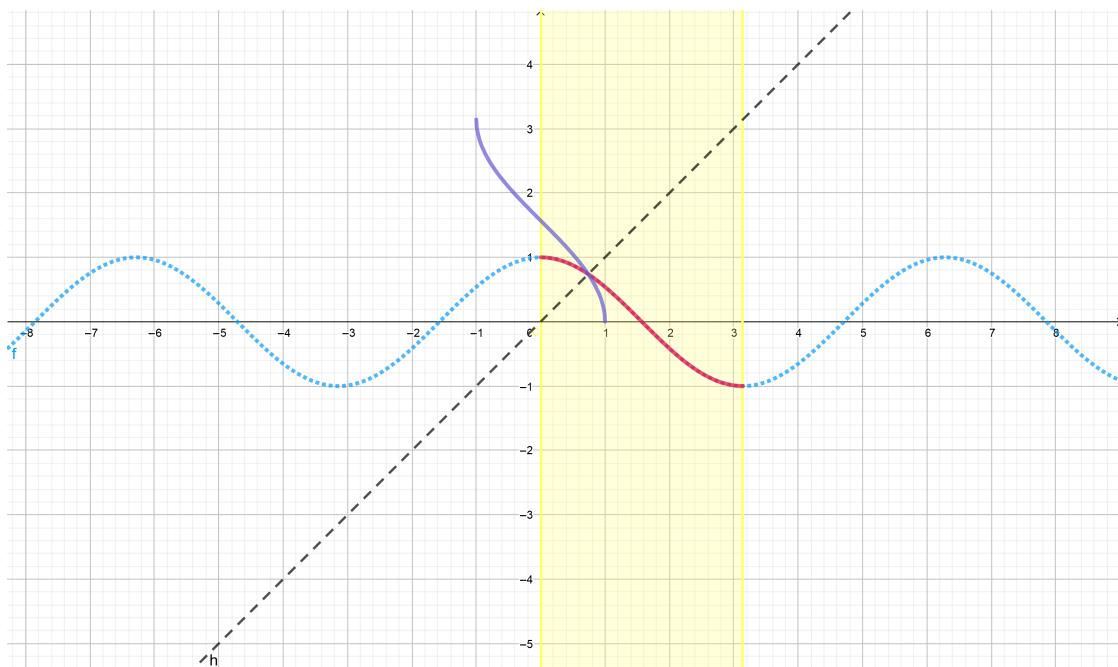


Figura 1.22: Ilustração gráfica do **Corolário 1.4.6**. Para determinarmos graficamente a **inversa da função coseno** (gráfico pontilhado a azul ciano), começámos por considerar apenas o gráfico da função ao intervalo  $[0, \pi]$  ( $1^{\text{o}}$  e  $2^{\text{o}}$  quadrantes) de modo a assegurarmos a sua injectividade via a monotonia do gráfico – vide **Corolário 1.3.10**. Para obtermos de seguida o gráfico de  $x \mapsto \arcsin(x)$  (a roxo) fizémos a reflexão do gráfico a magenta relativamente à recta  $y = x$  (gráfico tracejado a preto).

**Função Arco Tangente**

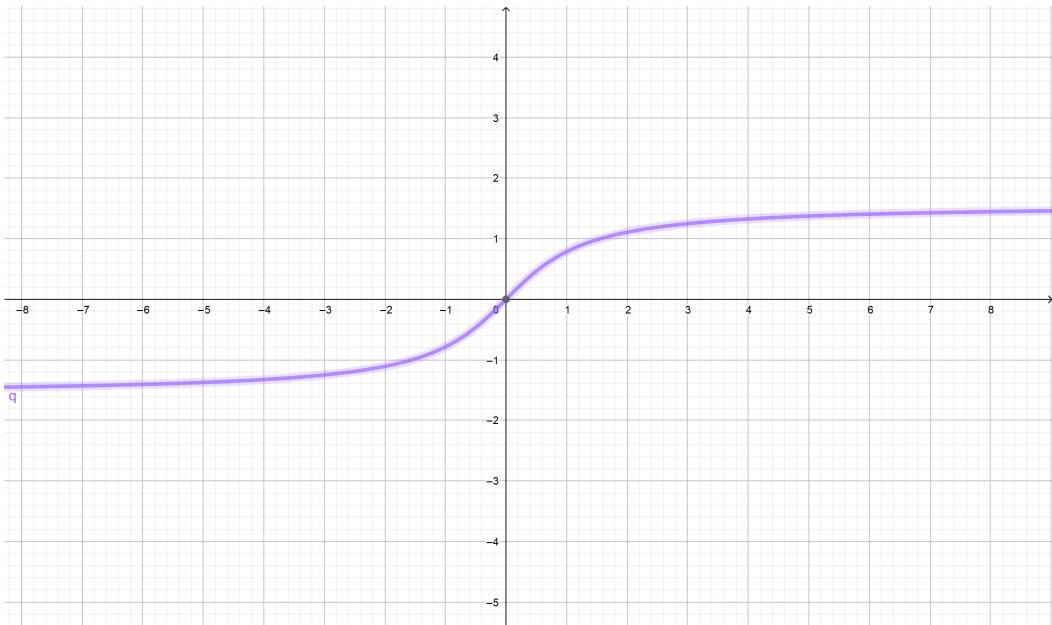
A restrição da função tangente a  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  é injectiva. A sua inversa, designada por função arco tangente, satisfaz:

$$y = \arctg x \iff x = \operatorname{tg} y$$

para  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Logo, obtemos

$$\arctg(\operatorname{tg} x) = x \quad ; \quad \operatorname{tg}(\arctg x) = x$$

A sua representação gráfica é

**Propriedades:**

1.  $D = \mathbb{R}$  e  $D' = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ; Eis a tabela de valores de alguns valores da função arco tangente:

$x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$f(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

2. É ímpar, isto é,  $\arctg(-x) = -\arctg x, x \in \mathbb{R}$ ;

3. Eis o quadro de sinal da função arco tangente:

$x$		0	
$\operatorname{tg} x$	—	0	+

É negativa em  $]-\infty, 0[$ , mas positiva em  $]0, +\infty[$ ;

4. É limitada pois  $|\arctg x| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$ ;

5. É estritamente crescente, isto é,

$$x_1 < x_2 \implies \arctg x_1 < \arctg x_2, x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R};$$

6. É convexa em  $]-\infty, 0[$ , mas côncava em  $]0, +\infty[$ .

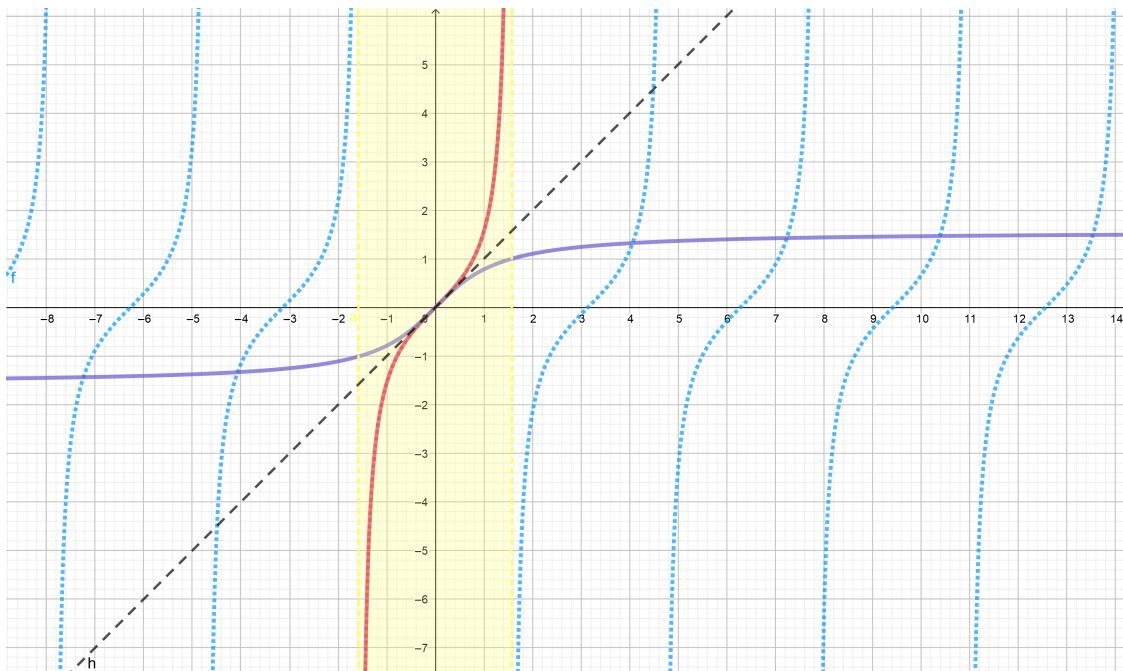


Figura 1.23: Ilustração gráfica do **Corolário 1.4.6**. Para determinarmos graficamente a **inversa da função tangente** (gráfico pontilhado a azul ciano), começámos por considerar apenas o gráfico da função ao intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  ( $1^o$  e  $4^o$  quadrantes com excepção dos pontos  $x = \pm\frac{\pi}{2}$ ) de modo a assegurarmos a sua injectividade via a monotonia do gráfico – vide **Corolário 1.3.10**. Para obtermos de seguida o gráfico de  $x \mapsto \arctan(x)$  (a roxo) fizémos a reflexão do gráfico a magenta relativamente à recta  $y = x$  (gráfico tracejado a preto).

**Desafio 1.61 — Inversa da função cotangente.** Considere a identidade  $\cot(\theta) = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$ .

(i) Esboce o gráfico da função cotangente no intervalo  $]0, \pi[$  a partir do gráfico da função tangente no intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Identifique as transformações de gráficos envolvidas – vide **Definição 1.4.4**.

(ii) Mostre que  $\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$  é a inversa da função cotangente no intervalo  $]0, \pi[$ .

(iii) Use a identidade anterior para determinar o gráfico da função arco cotangente (inversa da função cotangente):

(a) A partir do gráfico da função cotangente no intervalo  $]0, \pi[$ .

(b) A partir do gráfico da função arco tangente.

**Desafio 1.62 — Resolução de inequações.** Resolva as seguintes inequações envolvendo inversas de funções trigonométricas

$$1. \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$2. \frac{\pi}{3} < \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$3. \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > \frac{\pi}{6}.$$

**Desafio 1.63 — Teste os seus conhecimentos sobre funções trigonométricas inversas.**

Complete a tabela abaixo:

$f(x)$	$\arccotg(x)$	$\text{arcsec}(x)$	$\text{arccosec}(x)$
DOMÍNIO		$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	
CONTRADOMÍNIO			
ZEROS			não admite zeros
PARIDADE			
INTERVALO $f$ É POSITIVA [ CONJ. SOL. DE $f(x) > 0$ ]			
INTERVALO $f$ É NEGATIVA [ CONJ. SOL. DE $f(x) < 0$ ]	$\emptyset$		
MONOTONIA	estritamente decrescente		
INTERVALO $f$ É CÔNCAVA			
INTERVALO $f$ É CONVEXA			

## 1.6 Recursos Complementares

- Bibliografia principal: Manual: SILVA, Jaime Carvalho, Princípios de Análise Matemática Aplicada, Lisboa, Editora McGraw-Hill de Portugal, 1994 [BP 517 SIL].  
Link: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexama.html>
- Manual interativo de apoio à unidade curricular de Matemática I da Licenciatura em Gestão da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra - ano letivo 2019/2020.  
Link: <https://www.geogebra.org/m/mhg7ckvx>
- O projeto "ReM@t: Recuperar a Matemática a Distância", coordenado pela Reitoria da Universidade de Coimbra e financiado pela Fundação Calouste Gulbenkian, tem como principal objetivo reforçar competências e conhecimentos matemáticos imprescindíveis à frequência de cursos de Ensino Superior.  
Este projeto deu origem a um curso, coordenado pelo Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva, no qual irás encontrar conteúdos em formato de texto, imagens, animações interativas e pequenos vídeos explicativos. São também propostos, ao longo de cada temática, exercícios de consolidação. O curso é gratuito e decorre em formato online! Para acederes, basta criares uma conta de utilizador e preencher o questionário de avaliação de expectativas.  
Link: <http://www.ucd.uc.pt/remat/>

### 1.7 Exercícios Propostos

1. Represente no plano  $xOy$  as curvas descritas pelos seguintes conjuntos de pontos:
  - $\{(x, y) : |x| + y - 1 = 0\}$
  - $\{(x, y) : |y| + x - 1 = 0\}$
  - $\{(x, y) : x^2 - 4y = 0\}$
  - $\{(x, y) : x - 4y^2 = 0\}$
  - $\{(x, y) : x^2 + x + y^2 = 0\}$
  - $\{(x, y) : |x + y| - 1 = 0\}$
  - $\{(x, y) : x^2 - 4y^2 = 0\}$
  - $\{(x, y) : xy - 1 = 0\}$
2. Das curvas traçadas no exercício anterior indique, justificando, quais correspondem a gráficos de funções.
3. Escreva a expressão analítica da função, cujo gráfico é a semi-circunferência de centro  $C = (0, 1)$  e de raio  $\rho = 3$  situada abaixo da recta  $y = 1$ .
4. Esboce as parábolas, após a determinação dos vértices, que representam os gráficos das funções quadráticas definidas por:
  - $f(x) = x^2 - 4$
  - $f(x) = x^2 - x$
  - $f(x) = -x^2 + 2x$
  - $f(x) = 2x^2 + x$
  - $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$
  - $f(x) = -3x^2 + x - \frac{1}{12}$
5. A partir do gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = \ln x$  represente graficamente as funções definidas por:
  - $g(x) = -f(x)$
  - $h(x) = f(-x)$
  - $j(x) = |f(x)|$
  - $l(x) = f(|x|)$
  - $m(x) = f(x) + 3$
  - $n(x) = f(x + 3)$
6. Considere as funções definidas por
 
$$f(x) = 1 + \sqrt{x+4}, \quad g(x) = 3 - \sqrt{x}.$$
  - Indique os domínios de  $f$  e de  $g$ .
  - Determine os contradomínios de  $f$  e de  $g$ . Diga, justificando, se a função  $g$  é limitada.
  - Diga, justificando, se a função  $f$  é injectiva.
  - Trace os gráficos de  $f$  e de  $g$  tendo por base o gráfico de  $h$  definida por  $h(x) = \sqrt{x}$ .
  - Resolva a equação  $f(x) = g(x)$ .
7. Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt{2-x}$ .
  - Esboce o gráfico de  $f$ .
  - Determine o domínio e a expressão analítica da função simétrica de  $f$ .
  - Reunindo os gráficos de  $f$  e da respectiva função simétrica obtemos uma parábola. Escreva a equação dessa curva.
8. Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ .
  - Indique o domínio de  $f$  e estude o sinal de  $f$ .
  - Mostre que:
 
$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}.$$
  - O que pode dizer quanto à injectividade de  $f$ ?
  - Esboce o gráfico de  $f$  a partir do gráfico de  $g$  definida por  $g(x) = \frac{1}{x}$ .
9. Resolva as seguintes equações, em  $\mathbb{R}$ :

(a)  $x^2 - x = 0$       (b)  $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

(c)  $x^4 - x^2 - 2 = 0$       (d)  $|x + 4| = 3$

(e)  $|x + 4| = |4 - x|$       (f)  $\cos x + \sin(2x) = 0$

(g)  $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$       (h)  $\ln(x + 1) - \ln(x - 1) = 2\ln 2$

10. Resolva as seguintes inequações, em  $\mathbb{R}$ :

(a)  $|-x + 2| \geq 3$       (b)  $|x^2 - 3| \leq 1$

(c)  $x^3 < 8$       (d)  $|\sin x| > 0$

(e)  $1 - \sqrt{x+1} > -1$       (f)  $\frac{x+1}{x} \geq 2$

(g)  $|e^x - 2| > 2$       (h)  $\ln(-x) + \ln(x^2) > 3$

11. Explicite a expressão analítica da função módulo das funções definidas por:

(a)  $f(x) = ax + 2, a < 0$       (b)  $f(x) = (ax)^2 - 9, a > 0$

(c)  $f(x) = x^3 - 1$       (d)  $f(x) = \sin x$

(e)  $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$       (f)  $f(x) = \frac{x+1}{x}$

(g)  $f(x) = \ln x$       (h)  $2 - e^{-x}$

12. Defina as funções  $g \circ f$  e  $f \circ g$ , explicitando os seus domínios e as suas expressões analíticas, sendo

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin x.$$

A composição de funções goza da propriedade comutativa, isto é,  $g \circ f = f \circ g$ ?

13. Indique duas funções  $g$  e  $h$ , tais que  $g \circ h = f_1$  e  $h \circ g = f_2$ , sendo

$$f_1(x) = \operatorname{tg}^2 x, \quad f_2(x) = \operatorname{tg}(x^2).$$

14. Determine o domínio e a expressão analítica de  $g \circ f$ , sendo

(a)  $f(x) = \sin x, g(x) = \sqrt{1-x^2}$       (b)  $f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \sqrt{1+x^2}$

(c)  $f(x) = \sec x, g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$       (d)  $f(x) = \arcsin x, g(x) = \cos x$

15. Indique o domínio das seguintes funções e, caso seja possível, determine analiticamente as respectivas funções inversas:

(a)  $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$       (b)  $f(x) = \sqrt{x} + 2$

(c)  $f(x) = \frac{1}{2-x}$       (d)  $f(x) = \frac{x}{2-x}$

(e)  $f(x) = 1 + \frac{e^{-2x}}{3}$       (f)  $f(x) = 4 \ln x + 1$

(g)  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$       (h)  $f(x) = \sinh x$

16. Considere a restrição da função seno ao intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . A sua função inversa tem como expressão analítica  $f(x) = \arcsin x$ .

(a) Indique o domínio e o contradomínio de  $f$ .

(b) Justifique que  $f$  é injetiva.

(c) Calcule

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(\cos \pi).$$

- (d) Mostre que  $f$  é uma função ímpar.  
 (e) Estude o sinal de  $f$  recorrendo ao seu gráfico.
17. Seja  $g(x) = \arccos x$  a expressão analítica da função inversa da restrição do co-seno ao intervalo  $[0, \pi]$ .  
 (a) Indique o domínio e o contradomínio de  $g$ .  
 (b) Calcule

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), g\left(-\frac{1}{2}\right), g(\cos 0).$$

- (c) Determine os pontos de intersecção do gráfico de  $g$  com os eixos coordenados.  
 (d) Esboce o gráfico de  $g$ .  
 (e) A partir do gráfico de  $g$  esboce o gráfico da função definida por  $f(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$ .
18. A função arco-tangente definida por  $h(x) = \operatorname{arctg} x$  representa a função inversa da restrição da tangente ao intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .  
 (a) Indique o domínio e o contradomínio de  $h$ .  
 (b) Calcule

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), h(-1), h(\sin 0).$$

- (c) Mostre que  $h$  é uma função ímpar.  
 (d) Estude o sinal de  $h$  recorrendo ao seu gráfico.  
 (e) Esboce os gráficos das funções definidas por  $p(x) = |h(x)|$  e  $q(x) = h(|x|)$ .  
 (f) Verifique que  $p(x) = q(x)$ .



## 2. Limites e Continuidade

### 2.1 Limites

#### 2.1.1 Definições e Exemplos

**Definição 2.1.1 — Limite de  $f$  no ponto  $a$ .** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $I$  do tipo  $I = ]c, a[ \cup ]a, b[$  em que  $I \subset D$ . Diz-se que  $f$  tem por limite  $L \in \mathbb{R}$ , quando  $x$  tende para  $a \in \mathbb{R}$ , isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo o  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Note-se que  $|x - a|$  representa a distância entre  $x$  e  $a$  no eixo  $Ox$ .

Por um lado, a desigualdade  $|x - a| < \delta$  — equivalente a termos  $a - \delta < x < a + \delta$  — diz-nos que  $x \in ]a - \delta, a + \delta[$ .

Por outro lado, a desigualdade  $|x - a| > 0$  — equivalente a termos  $x \neq a$  — diz-nos que  $f(x)$  nunca pode tomar o valor  $f(a)$  quando estamos a calcular  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .



Segue naturalmente da definição de limite e das propriedades dos módulos as seguintes equivalências

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0.$$

A definição formal de limite apresentada também se designa por definição *epsilon-delta* ( $\varepsilon-\delta$ ) visto que essas letras gregas têm sido usadas com frequência a partir do momento que se conheceram os trabalhos de Cauchy sobre o assunto.

Suponhamos que a função tem como gráfico uma curva, no sentido vulgar do termo. Geometricamente, diz-se que o limite da função quando  $x$  tende para  $a$  é igual a  $L$  se e só se, para cada intervalo  $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$  traçado no eixo  $Oy$ , pode-se encontrar algum intervalo  $]a - \delta, a + \delta[ \setminus \{a\}$  no eixo  $Ox$ , de modo que todos os transformados de pontos desse intervalo, por meio de  $f$ , pertençam a  $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ . Refira-se ainda que, se assume, que o intervalo  $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$  traçado no eixo  $Oy$  pode ser tão pequeno quanto se deseje.

■ **Exemplo 2.1 — Limites envolvendo a função afim.** Recorrendo à definição de limite, iremos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5.$$

Considere o número  $\varepsilon > 0$  e arbitrário. Como

$$|(2x + 1) - 5| = 2|x - 2|$$

basta escolher  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  para que

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |(2x + 1) - 5| < 2\delta = \varepsilon$$

conforme se queria mostrar. ■

**Definição 2.1.2 — Noção informal de limite.** O limite de  $f$  quando  $x$  tende para  $a$  é igual a  $L$ : Informalmente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

significa que os valores que a função toma em  $x$  se podem aproximar de  $L$  tanto quanto se queira desde que  $x$  esteja suficientemente próximo de  $a$ , mas podendo ser eventualmente diferente de  $a$ . Assinale-se que o real  $L$  não depende de  $f(a)$ .

■ **Exemplo 2.2 — Limites envolvendo funções racionais.** A fração racional  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{9-x^2}{x-3}$  não está definida para  $x = 3$  ( $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ ), mas

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(3+x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-3-x) = -6$$

Observe que a função  $g$  tal que  $g(x) = -x - 3$  difere de  $f$  apenas no ponto  $x = 3$  pois

$$f(x) = g(x), x \neq 3$$

Contudo o valor de  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  coincide com o valor de  $\lim_{x \rightarrow 3} (-x - 3)$ . ■

**Desafio 2.1** Verifique que para as funções  $f$  e  $g$  do **Exemplo 1.36** se tem

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0,$$

embora  $f \neq g$ .

### Limites no infinito e infinitos

Vamos generalizar a definição *epsilon-delta* aos limites no infinito e aos limites infinitos.

**Definição 2.1.3 — Limites no infinito.** Seja  $f$  uma função definida no intervalo aberto  $I = ]c, +\infty[$ . Diz-se que  $f$  tem por limite o número real  $L$ , quando  $x$  tende para  $+\infty$ , escrevendo-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número  $N > 0$  tal que, para todo  $x \in I$

$$\text{se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon \quad (2.1)$$

O símbolo  $+\infty$  não representa um número real, sendo usado para indicar que  $x$  cresce ilimitadamente para além de qualquer número.

Poderia-se definir também o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $-\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

de modo análogo, caso  $f$  esteja definida num intervalo do tipo  $] -\infty, b [$ .

**Definição 2.1.4 — Limites infinitos.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto, contendo o ponto  $a$ , o qual pode não pertencer ao seu domínio  $D$ . Diz-se que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  é mais infinito, escrevendo-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

se para todo  $M > 0$  arbitrariamente grande, existe um  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in D$

$$\text{se } x \text{ verifica } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > M \quad (2.2)$$

Poderia-se definir também o limite de  $f(x)$ , caso seja igual a  $-\infty$ , quando  $x$  tende para  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

de modo análogo.

## 2.1.2 Existência e Unicidade de Limite

No conjunto dos números reais,  $x$  tende para  $a$ , quer por valores superiores a  $a$ , quer por valores inferiores a  $a$ , e por isso, faz sentido falar no conceito de limite lateral.

**Definição 2.1.5 — Limites Laterais.** O limite lateral de  $f$  à direita de  $a$  e o limite lateral de  $f$  à esquerda de  $a$  escrevem-se respectivamente como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &:= \lim_{x \rightarrow a \wedge x > a} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &:= \lim_{x \rightarrow a \wedge x < a} f(x). \end{aligned}$$

### Teorema 2.1.1 — Existência de Limite.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

*Ideia da demonstração.* Esta demonstração decorre naturalmente da definição de limite no ponto e de limites laterais. Para tal, comece por observar que a dupla desigualdade  $0 < |x - a| < \delta$  que aparece na **Definição 2.1.1** pode ser decomposta no seguinte sistema de inequações:

$$0 < x - a < \delta \quad \wedge \quad -\delta < x - a < 0,$$

que por sua vez é equivalente a termos

$$\underbrace{a < x < a + \delta}_{\text{ineq. utilizada para definir } x \rightarrow a^+} \quad \wedge \quad \underbrace{a - \delta < x < a}_{\text{ineq. utilizada para definir } x \rightarrow a^-}.$$

■

**Teorema 2.1.2 — Unicidade de Limite.** O limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , caso exista, é único.

*Ideia da demonstração.* Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$$

Para mostrarmos que o limite é único, isto é, que  $L = M$  vamos recorrer à **desigualdade triangular** já utilizada no **Exemplo 1.30**.

Para tal, note que

$$|M - L| = |(f(x) - L) + (M - f(x))| \leq |f(x) - L| + \underbrace{|M - f(x)|}_{=|f(x)-M|}.$$

Da hipótese –  $L$  e  $M$  são os valores de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  – segue que

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - M| = 0.$$

Finalmente, aplicando limites a ambos os lados das desigualdades acima, resulta que

$$\begin{aligned} |L - M| &= \lim_{x \rightarrow a} |L - M| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| + \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - M| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $|L - M| \leq 0$ . Esta desigualdade permite-nos concluir, de imediato, que

$$L = M,$$

como pretendido.

■



Na demonstração do **Teorema 2.1.2** evitámos fazer o uso da nomenclatura  $\varepsilon - \delta$  – omnipresente em diversos livros de matemática – para que a compreensão da [ideia da] demonstração do resultado ficasse mais legível para não matemáticos.

Vejamos alguns exemplos de não-existência de limite para uma dada função.

■ **Exemplo 2.3 — Limites laterais diferentes.** Para a função sinal do **Exemplo 1.12** é facil de verificar que o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$  não existe, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.4 — Limites laterais infinitos.** Para a função do **Exemplo 1.14** o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  não existe visto que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

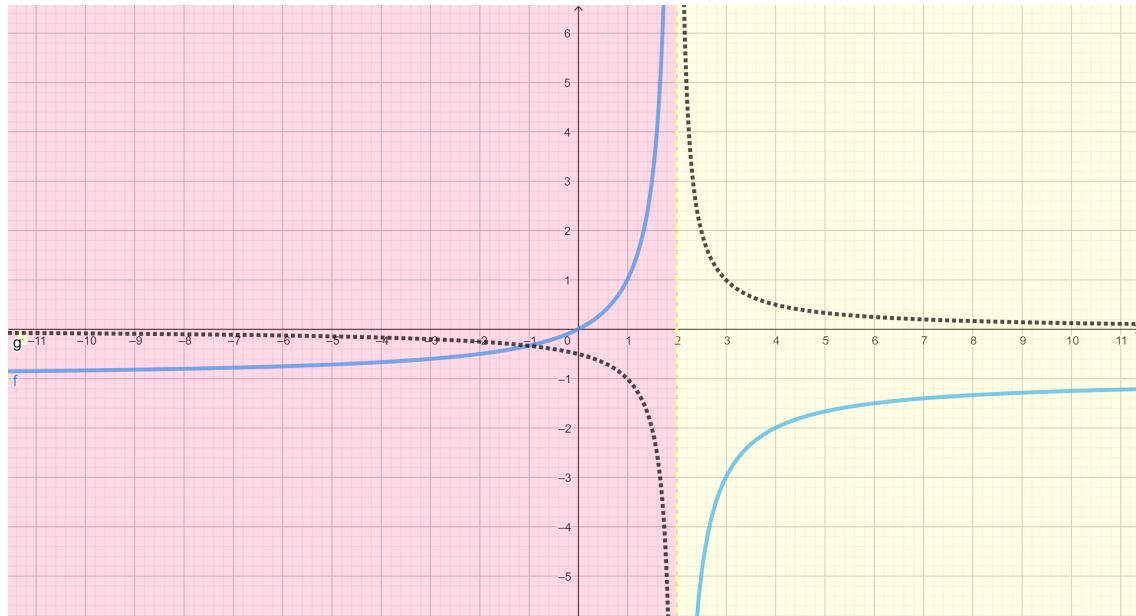
Note-se que a função cresce ou decresce indefinidamente, quando  $x$  tende para 0. Os valores  $f(x)$  divergem quando  $x$  estiver suficientemente próximo de zero. Ou seja, à medida que  $x$  se aproxima de zero, os valores  $f(x)$  crescem indefinidamente se  $x > 0$ , mas decrescem indefinidamente se  $x < 0$ .

■

■ **Exemplo 2.5 — Limites vs. transformações gráficas.** Decorre da divisão de polinómios:

$$\frac{x}{2-x} = -1 - \frac{2}{x-2}$$

que o gráfico da função  $x \mapsto \frac{x}{2-x}$  do **Exemplo 1.16** – representado na figura abaixo a azul ciano – pode ser obtido a partir do gráfico  $x \mapsto \frac{1}{x-2}$  – representado na figura abaixo a pontilhado preto – por reflexões e translações na vertical – vide **Definição 1.4.4**:



Note ainda que o gráfico de  $x \mapsto \frac{1}{x-2}$  corresponde a uma translação na horizontal do gráfico da função do **Exemplo 2.4**.

A interpretação gráfica permite-nos naturalmente verificar que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = +\infty,$$

uma vez que o gráfico da função  $x \mapsto \frac{x}{2-x}$  toma **valores suficientemente grandes positivos**, à medida que nos aproximamos da recta vertical  $x = 2$  por valores à esquerda (região a rosa do gráfico).

De modo análogo

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = -\infty$$

atendendo ao facto do gráfico de  $x \mapsto \frac{x}{2-x}$  tomar **valores suficientemente grandes negativos**, à medida que nos aproximamos da recta vertical  $x = 2$  por valores à direita (região a amarelo do gráfico). ■

**Desafio 2.2** Para a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{|x+1|}$ :

1. Calcule o domínio de  $f$ .
2. Determine, caso existam, os limites abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)|.$$

O próximo resultado permite-nos obter uma correspondência biunívoca entre limites no infinito e limites laterais à esquerda e à direita de 0, tendo como referência a transformação do gráfico de  $f$  pela função  $x \mapsto \frac{1}{x}$  do **Exemplo 2.4**

**Teorema 2.1.3 — Limites no Infinito vs. Limites Laterais.** Para uma função definida num intervalo do tipo  $]0, +\infty[$  ou  $]-\infty, 0[$ , valem as seguintes regras para cálculo de limites:

- **Limites em  $+\infty$  vs. Limites em  $0^+$ :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

- **Limites em  $-\infty$  vs. Limites em  $0^-$ :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Saliente-se que os valores  $f(x)$  da função  $f$  também podem divergir, mas por oscilação, quando  $x$  estiver suficientemente próximo de um ponto  $a$ . Este comportamento, embora seja raro, surge associado a funções, cujo o limite não existe, quando  $x$  tende para  $a$ .

■ **Exemplo 2.6 — Não-Existência de Limite.** O limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  não existe.

Note que a função  $f$  tal que  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  é limitada, isto é,

$$-1 \leq f(x) \leq 1, \quad \text{para todos os } x \neq 0.$$

Além disso, tem uma infinidade de zeros, pertencentes ao intervalo  $[-1/\pi, 1/\pi]$ . Porém, a função oscila entre  $-1$  e  $1$  à medida que  $x$  se aproxima de  $0$ , logo  $f(x)$  não se aproxima de nenhum número real. A função diverge por oscilação num ponto.

Para sermos mais precisos, considere os pontos da forma  $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$  para inteiros  $k > 0$ :

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Em particular, para a escolha  $k = 2m \rightarrow +\infty$ , obtemos<sup>1</sup>

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = 1 \rightarrow 1$$

De modo análogo, se considerarmos  $k = 2m - 1 \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + (2m - 1)\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = -1 \rightarrow -1.$$

Os dois limites obtidos acima para valores de  $k \rightarrow +\infty$  par (resp. ímpar) permitem-nos averiguar, de uma forma intuitiva, que o limite não existe. ■



Essencialmente, a estratégia adoptada no **Exemplo 2.6** passou por mostrar que o limite lateral  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  não existe.

Acrescente-se que a escolha dos pontos da forma  $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$  ( $k > 0$  e  $k \in \mathbb{Z}$ ) teve como referência a identidade  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  obtida a partir do **Teorema 2.1.3**.

<sup>1</sup>Para provarmos que os limites davam  $1$  ou  $-1$ , fizemos uso das igualdades  $\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$  e do facto de seno ser uma função periódica, de período  $2\pi$ .

O próximo teorema corresponde a uma generalização do raciocínio utilizado no **Exemplo 2.6**.

**Teorema 2.1.4 — Limites no infinito envolvendo funções periódicas.** Se  $f$  é uma função periódica, não-constante, então os limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

não existem.

### 2.1.3 Assíntotas

Podemos generalizar a noção de limite, para o caso da variável independente tender para infinito, bem como, para o caso do valor do limite ser infinito. Este tipo de limites dão informações sobre a existência de assíntotas ao gráfico de uma dada função. Caso existam, as assíntotas são rectas verticais, horizontais ou oblíquas.

Ao longo desta subseção iremos recorrer, em várias situações, ao teorema abaixo.

**Teorema 2.1.5** Considere-se o real  $a$  compreendido entre  $b$  e  $c$  com  $b < c$ . Seja  $f$  definida num intervalo do tipo:  $]b, c[$  ou  $]a, c[$  ou  $]b, a[$ . Tem-se

(i)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0^+$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0^-$$



O teorema ainda é válido se substituirmos  $a$  por  $+\infty$  ou por  $-\infty$ .

**Definição 2.1.6 — Assíntotas Verticais.** A recta  $x = a$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$  se

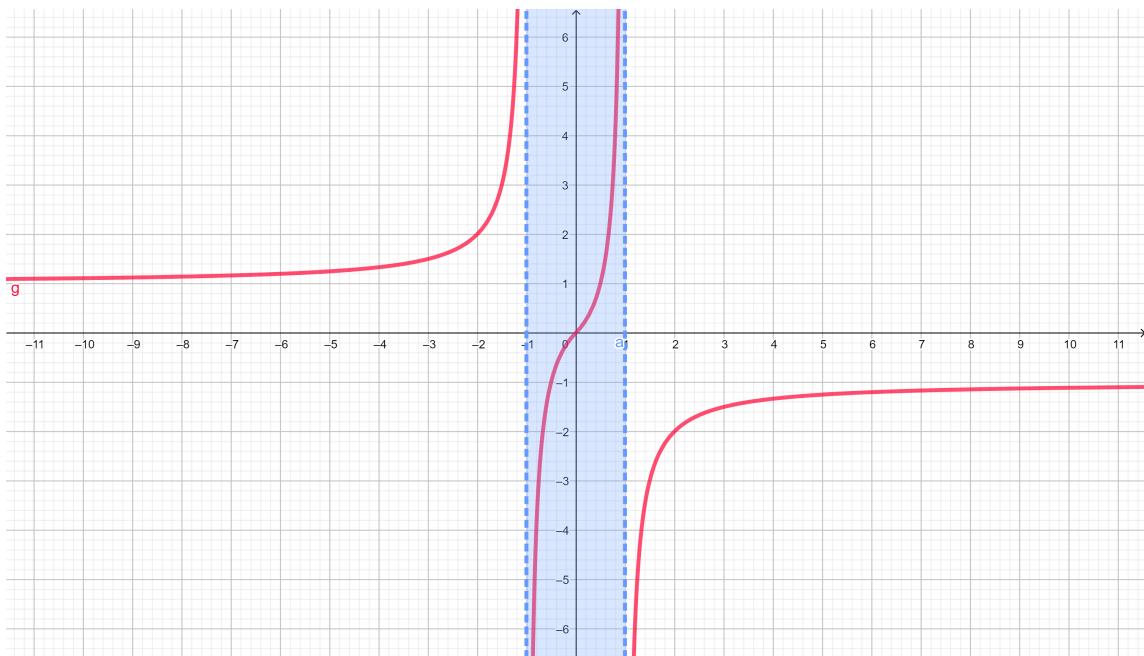
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty (-\infty) \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty (+\infty)$$

Note-se que a função cresce ou decresce indefinidamente, quando  $x$  tende para  $a$ , e por esse motivo, diz-se que a função diverge para valores próximos de  $a$ .



As funções  $x \mapsto \frac{1}{x-2}$  e  $x \mapsto \frac{x}{2-x}$  ilustradas graficamente no **Exemplo 2.5** apresentam  $x = 2$  como assíntota vertical.

■ **Exemplo 2.7** Voltemos à função  $g$  do **Desafio 1.33**, cujo gráfico segue abaixo:



Como pode verificar facilmente pelo gráfico,  $x = -1$  e  $x = 1$  são assíntotas verticais ao gráfico de  $g$ .

Este facto pode ser comprovado analiticamente com base nos cálculos de limites realizado abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1 - |x|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1 - |x|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1 - |x|} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1 + x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1 - |x|} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1 + x} = +\infty$$

Observe ainda que no caso de restringirmos a função  $g$  ao intervalo  $]-1, 1[$  (parte do gráfico delimitado pela região a azul), obtemos que esta coincide com a inversa  $f^{-1} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  da função  $f$  do **Exemplo 1.44**.

Para este caso em particular, podemos ainda concluir o seguinte:

- $x = -1$  e  $x = 1$  são também assíntotas horizontais ao gráfico do  $f^{-1}$ , uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$$

- Os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x) \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f^{-1}(x)$$

nenhum existem.

**Desafio 2.3** Verifique se as assíntotas verticais das funções  $f$  e  $g$  do **Exemplo 1.36** coincidem.

**Definição 2.1.7 — Assímpotas Não-Verticais.** A recta  $y = mx + b$  é assímpota ao gráfico de  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b$$

ou se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = b$$

Observe-se que: Se  $m \neq 0$  e  $b \in \mathbb{R}$  então temos uma assímpota oblíqua. Mas se  $m = 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ , trata-se de uma assímpota horizontal de equação  $y = b$ .

A assímpota  $y = mx + b$  é uma recta que se aproxima do gráfico de  $f$  quando a variável  $x$  tende para  $+\infty$  ou para  $-\infty$ . O sinal de  $f(x) - mx - b$  determina o modo como se faz essa aproximação, isto é, se  $f(x) - mx - b < 0$  a recta está situada acima do gráfico, mas se  $f(x) - mx - b > 0$  a recta já está situada abaixo do gráfico. Contudo, esclareça-se que nem sempre isso acontece, pois o sinal de  $f(x) - mx - b$  pode alternar para valores de  $x$  suficientemente grandes, em valor absoluto.

### Assímpotas de funções racionais

Para estudarmos a existência de assímpotas verticais, tais como as do **Exemplo 2.5** e do **Exemplo 2.7**, os seguintes limites são de importância fulcral:

**Teorema 2.1.6 — Limites no infinito envolvendo funções racionais.** Consideremos os polinómios da forma

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0) \\ q_m(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0) \end{aligned}$$

As seguintes regras envolvendo limites são válidas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} (+\infty) & \text{se } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} (-1)^{n-m} (+\infty) & \text{se } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases} \end{aligned}$$

*Ideia de demonstração.* Note que  $p_n(x)$  e  $q_m(x)$  podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + p_j(x) \\ q_m(x) &= b_m x^m + q_k(x), \end{aligned}$$

onde  $p_j(x)$  e  $q_k(x)$  são polinómios de graus  $j \leq n-1$  e  $k \leq m-1$  respectivamente.

Colocando em evidência  $x^n$  no numerador e  $x^m$  no denominador, segue para valores de  $x \neq 0$

que

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{x^n(a_n + x^{-n}p_j(x))}{x^m(a_m + x^{-m}q_k(x))}$$

Combinando a igualdade anterior com o **Teorema 2.1.3**, segue a sequência de igualdades

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{p_n\left(\frac{1}{x}\right)}{q_m\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-n}(a_n + x^n p_j\left(\frac{1}{x}\right))}{x^{-m}(b_m + x^m q_k\left(\frac{1}{x}\right))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a_n x^{-n}}{b_m x^{-m}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}. \end{aligned}$$

**Deixamos ao cargo do leitor realizar o mesmo tipo de simplificação, envolvendo os limites  $x \rightarrow -\infty$  &  $x \rightarrow 0^-$ .** ■



O **Teorema 2.1.6** diz-nos essencialmente que são os termos de maior grau dos polinómios em numerador e denominador que são utilizados para calcular o limite.

O termo  $(-1)^{n-m}(+\infty)$  que aparece no cálculo do limite

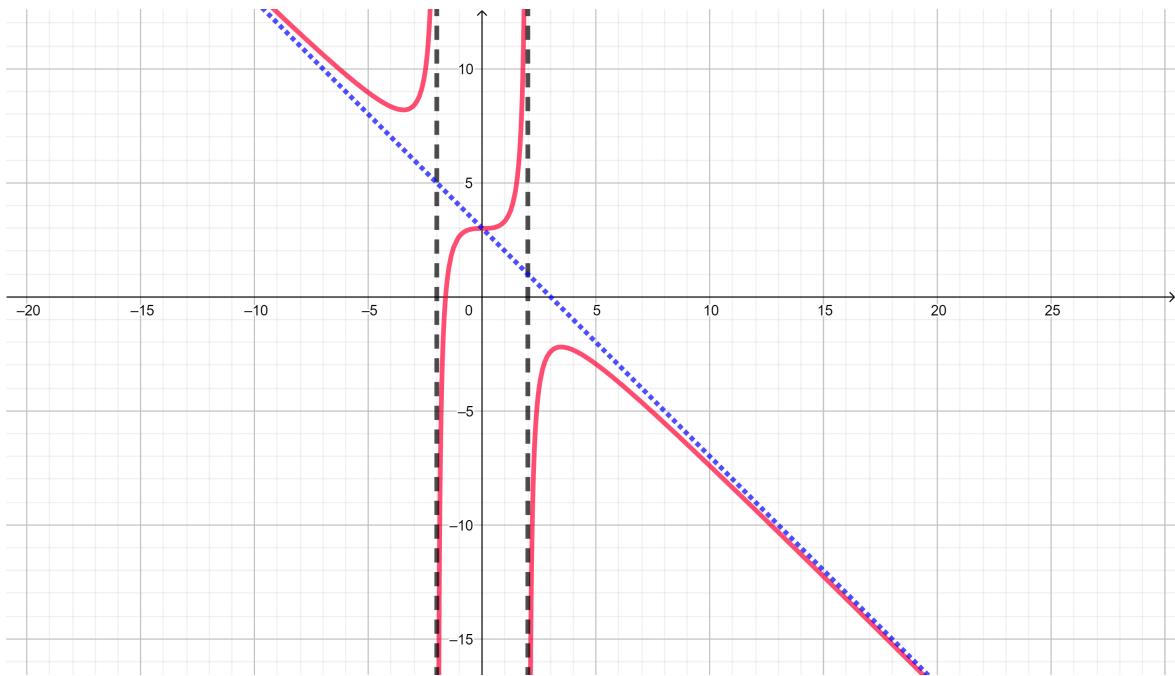
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

diz-nos essencialmente que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{n-m}$  é igual a  $+\infty$  quando  $n - m$  é par, e  $-\infty$  quando  $n - m$  é ímpar – i.e.  $-\infty = -(+\infty)$ .

■ **Exemplo 2.8 — Assíntotas de uma função racional.** A função  $f$  definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4 - x^2}$$

representada na figura abaixo possui duas assíntotas horizontais ( $x = -2$  e  $x = 2$ ) e uma assíntota oblíqua ( $y = -x + 3$ ).



A verificação de que  $x = \pm 2$  são assíntotas verticais segue das igualdades envolvendo limites laterais<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4 - x^2} &= \frac{-8}{0^+} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4 - x^2} &= \frac{-8}{0^-} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4 - x^2} &= \frac{8}{0^-} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4 - x^2} &= \frac{8}{0^+} = +\infty.\end{aligned}$$

Para verificar que  $y = -x + 3$  é uma assíntota oblíqua via a **Definição 2.1.7**, observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4x - x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-x^3} \\ &= \underbrace{-1}_{=m} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4x - x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-x^3} \\ &= \underbrace{-1}_{=m}.\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Para obter  $0^-$  e  $0^+$  em denominador, usámos o facto de  $4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$  &  $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - \underbrace{(-1)x}_{=m} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 4x + 12}{4 - x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{-x^2} \\
 &= \underbrace{3}_{=b}
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( f(x) - \underbrace{(-1)x}_{=m} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 4x + 12}{4 - x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{-x^2} \\
 &= \underbrace{3}_{=b}.
 \end{aligned}$$

■



Repare que no exemplo anterior poderíamos ter feito a divisão de polinómios. Assim,

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4 - x^2} = -x + 3 + \frac{4x}{4 - x^2},$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{4 - x^2} = 0$$

Daí também podemos concluir que  $y = -x + 3$  é assímpota ao gráfico de  $f$ .

Com o próximo desafio pretende-se ilustrar que pode existir funções que possuam mais que uma assímpota oblíqua.

**Desafio 2.4 — Assímpotas Oblíquas.** Verifique que:

1. a função  $x \mapsto x + \frac{1}{x}$  admite uma única assímpota oblíqua;
2. a função  $x \mapsto |x| + \frac{1}{x}$  admite duas assímpotas oblíquas.

### Assímpotas de funções iracionais

O próximo resultado, que pode ser obtido com base no gráfico da função inversa de  $x \mapsto x^n$  para para valores de  $n$  par ( $n = 2k$ ) e  $n$  ímpar ( $n = 2k + 1$ ) será de extrema utilidade para determinar limites como o do **Exemplo 2.14** – a ser abordado mais adiante.

**Corolário 2.1.7** Pode mostrar-se que:

- Para  $k \in \mathbb{N}$ , a função irracional definida por  $g(x) = \sqrt[2k+1]{x}$  tem como domínio  $\mathbb{R}$  e verifica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

mas por outro lado, a função definida por  $h(x) = \sqrt[2k]{x}$  tem por domínio  $[0, +\infty[$  e verifica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

### Assíntotas de funções transcendentes

■ **Exemplo 2.9 — Assíntotas da função exponencial.** Na subseção **1.5.4 Funções Exponenciais** constatámos<sup>3</sup> que a função exponencial  $x \mapsto a^x$  é estritamente decrescente para valores de  $0 < a < 1$ , e estritamente crescente para valores de  $a > 1$ .

Por outro lado, via o crescimento/decrescimento do gráfico é possível concluir:

1.  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $x \mapsto a^x$ , uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \text{se } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \text{se } a > 1.$$

2. A função  $x \mapsto a^x$  não é limitada [inferiormente/superiormente], uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = -\infty, \quad \text{se } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \text{se } a > 1.$$

■

■ **Exemplo 2.10 — Assíntotas da função logaritmo.** Com base no gráfico da função logaritmo ilustrada na subseção **1.5.6 Funções Logarítmicas** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**, segue pelo **Teorema 1.5.2** que o eixo  $Oy$  ( $x = 0$ ) é uma assíntota do gráfico da função  $x \mapsto \log_a(x)$  ( $a > 0$ ), uma vez que<sup>4</sup>

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = -\infty$$

para valores de  $a > 1$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = +\infty.$$

para valores de  $0 < a < 1$ .

■

Na prática, podemos afirmar que no caso da função  $f$  admitir inversa, que o **Corolário 1.4.6** da subseção **1.4.5 Função Inversa e Gráfico** permite-nos estabelecer uma correspondência biunívoca entre as assíntotas horizontais (resp. verticais) do gráfico de  $f$  podem ser identificadas – via a **reflexão do gráfico de  $f$  relativamente à recta  $y = x$**  – como assíntotas verticais (resp. horizontais) ao gráfico de  $f^{-1}$ .

Este tipo de correspondência é muito útil para obter **limites infinitos ou no infinito** envolvendo funções trigonométricas e suas inversas, como iremos ver de seguida.

■ **Exemplo 2.11 — Assíntotas da função tangente e arco tangente.** O gráfico da função tangente,  $x \mapsto \tan x$ , tem uma infinidade de rectas verticais como assíntotas, entre as quais

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

enquanto o gráfico da função  $x \mapsto \arctan x$  admite apenas duas assíntotas, horizontais

$$y = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad y = \frac{\pi}{2}.$$

<sup>3</sup>Esta conclusão poderia ser obtida via o gráfico da função exponencial  $x \mapsto e^x$  (que é estritamente crescente) e a identidade  $a^x = e^{x \ln(a)}$  – vide **Função Exponencial-Potência 1.5.7**.

<sup>4</sup>Note que  $\ln(a) > 0$ , para valores de  $a > 1$  e  $\ln(a) < 0$ , para valores de  $0 < a < 1$ .

A constatação acima segue das igualdades<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) &= -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.12 — Assíntotas da função arco-secante.** No **Desafio 1.63** da subseção **1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** pretende-se que chegue na conclusão de que

$$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[ = \{y \in \mathbb{R} : |y| \geq 1\}$$

é o domínio da função arco-secante, e que

$$x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

corresponde à inversa da restrição da função secante a  $]0, \frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2}, \pi[:$

$$x \mapsto \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Com base nesta relação, e nos limites no infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

poderá concluir<sup>6</sup> que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arccos x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arccos x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

ou seja, que  $y = \frac{\pi}{2}$  é uma assíntota horizontal da função arco-secante.

Note ainda que a função não admite assíntota vertical em  $x = 0$ , por conta dos limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

não existirem<sup>7</sup>.

■

**Desafio 2.5 — Assíntotas verticais de funções trigonométricas.** Com base no estudo gráfico já realizado na subseção **1.5.8 Funções Trigonométricas**, indique para que valores de  $a$ , os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  das funções abaixo dão  $+\infty$  ou  $-\infty$ :

1.  $f(x) = \cotg(x)$
2.  $f(x) = \cosec(x)$ .

**O que pode concluir sobre a existência de assíntotas verticais em cada um dos casos?**

<sup>5</sup>Quando estamos a determinar os limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x)$ ) estamos a determinar para que comprimento de arco  $x$  o declive da reta é indefinido.

<sup>6</sup>Poderia adoptar um raciocínio análogo ao utilizado no **Exemplo 2.11**

<sup>7</sup>Para entender que os limites laterais em 0, basta atender que o gráfico da função arco-cosseno nunca se aproxima de zero. Na verdade, o gráfico da função arco-secante não está definida no intervalo  $]-1, 1[$ .

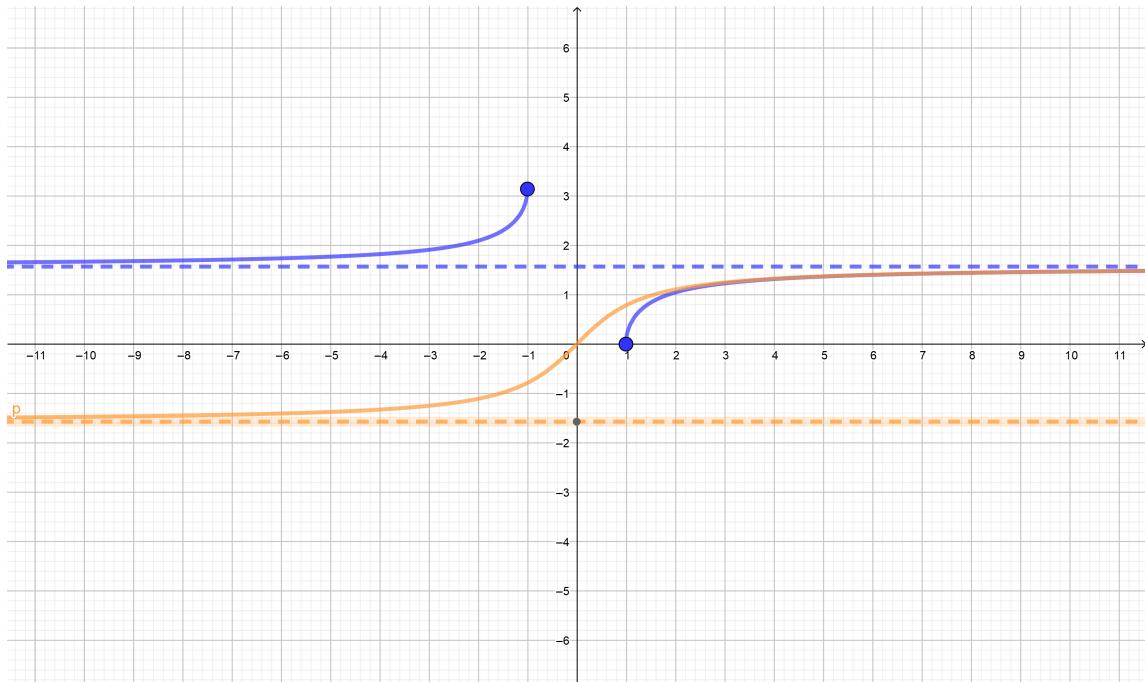


Figura 2.1: Na figura encontram-se representados os gráficos das funções arco-tangente (a laranja) e da função arco-secante (a azul) do **Exemplo 2.11** & do **Exemplo 2.12**, respectivamente. A tracejado azul a assíntota horizontal  $y = \frac{\pi}{2}$  da função arco-secante. Na ilustração gráfica, podemos as retas tracejado nos dão as assíntotas horizontais ( $y = \pm \frac{\pi}{2}$ ) do gráfico da função arco-tangente. Em suma, pode-se concluir-se que a assíntota  $y = \frac{\pi}{2}$  é comum a ambos os gráficos.

**Desafio 2.6 — Assíntotas horizontais de funções trigonométricas.** Faça uso do estudo gráfico realizado na subseção 1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas para determinar os  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  das funções abaixo

1.  $f(x) = \text{arccotg}(x)$
2.  $f(x) = \text{arcsec}(x)$
3.  $f(x) = \text{arccosec}(x)$ .

O que pode concluir sobre a existência de assíntotas horizontais em cada um dos casos?

#### 2.1.4 Propriedades e Resultados

##### Regras envolvendo limites no ponto

É evidente que:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ , isto é, qualquer que seja  $a$ , o limite da função constante quando  $x$  tende para  $a$  é igual à constante;
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ , isto é, qualquer que seja  $a$ , o limite da função identidade quando  $x$  tende para  $a$  é igual a  $a$ .

Enunciamos mais algumas propriedades de limites.

**Teorema 2.1.8** Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

então tem-se

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + M$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = L - M$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$  para todo o real  $c$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$
5. Se  $m$  é um inteiro positivo então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^m = L^m$
6. Se  $M \neq 0$  então  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

**Desafio 2.7** Diga, justificando, se as afirmações abaixo são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**). No caso de **V**, justifique com base nas propriedades ilustradas no **Teorema 2.1.8**. No caso de **F**, dê um contra-exemplo.

1. Se não existem os limites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , então os limites  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$  e  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$  também não existem.
2. Se existem os limites  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ , então o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  também existe.
3. Se os limites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  não existem, o limite  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  também não existe.
4. Se existem os limites  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ , então o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  também existe.

### Regras envolvendo limites infinitos

Diga-se que em vez dos reais  $a$ ,  $L$  e  $M$  também se pode ter os símbolos  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

O limite da soma é a soma dos limites, inclusive nos seguintes casos:

- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$  e  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + b = -\infty$  e  $+\infty + b = +\infty$  para todo o real  $b$ .

O limite do produto é o produto dos limites, inclusive nos seguintes casos:

- $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$  e  $(+\infty)(-\infty) = -\infty$
- $(+\infty)k = (-\infty)(-k) = +\infty$  e  $(+\infty)(-k) = (-\infty)k = -\infty$  para todo o real positivo  $k$ .

Note-se que os resultados expressam que o sinal de limite é permutável com o sinal operatório entre funções, sempre que:

- (a) Os limites em questão existam, podendo ser finitos ou infinitos;
- (b) Não existam símbolos de indeterminação.

No caso de

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \wedge \quad L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$$

então o que é que se pode dizer sobre o limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} ?$$

Substituindo vem  $\frac{L}{0}$  sob o pressuposto (certo ou errado?) que o limite do quociente é igual ao quociente dos limites. Qual será então o significado do símbolo  $\frac{L}{0}$  com  $L \neq 0$ ? Para tentar abordar a questão, estude-se alguns casos particulares:

- (i) Se considerar  $f(x) = 1$  e  $g(x) = x$  então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

não existe já que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$$

(ii) Se considerar  $f(x) = 1$  e  $g(x) = x^2$  então o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

é igual a  $+\infty$  pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Os exemplos acima indicam que a resposta à questão depende dos valores dos limites laterais em torno de  $a$ .

E se

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

então quanto vale o limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} ? \quad (2.3)$$

Justifique.

### Alguns exemplos de limites envolvendo indeterminação

Os símbolos do tipo

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

são conhecidos por símbolos de indeterminação. O valor do limite é desconhecido a priori, quando as regras operatórias de limites conduzirem a um símbolo de indeterminação. Então é preciso recorrer a técnicas de cálculo para o determinar.

■ **Exemplo 2.13 — Indeterminação tipo  $+\infty - \infty$ .** O limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \sqrt{3-x} \right)$$

envolve uma indeterminação do tipo  $+\infty - \infty$ .

Para este caso, aplicando a técnica da multiplicação pelo conjugado, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{3-x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{3-x})(x - \sqrt{3-x})}{x - \sqrt{3-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 3}{-x - \sqrt{3-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.14 — Indeterminações vs. assíntotas oblíquas.** O gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  corresponde à hipérbole de equação

$$y^2 - x^2 = 1$$

situada acima do eixo  $Ox$ . Com base na **Definição 2.1.7** temos que os cálculos envolvendo os limites  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} \\ &= -1. \end{aligned}$$

nos permite concluir que as candidatas a assíntotas oblíquas têm declive  $m = 1$  e  $m = -1$ , respectivamente.

Adicionalmente, os limites

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \overbrace{1}^{=m} \cdot x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \overbrace{(-1)}^{=m} \cdot x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

permitem-nos concluir que ambas as assíntotas passa pela origem ao gráfico de  $f$ .

EM SUMA:  $y = x$  e  $y = -x$  (bissecrizes dos quadrantes pares e ímpares) são assíntotas ao gráfico de  $f$  ■

**Desafio 2.8 — Interpretação geométrica do conceito de assíntota não-vertical.** Determine para que valores de  $a, b$  e  $m$  o limite no infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 - x + a} - mx - b \right)$$

- (i) É igual a zero (0);
- (ii) É igual a 'mais infinito' ( $+\infty$ ).

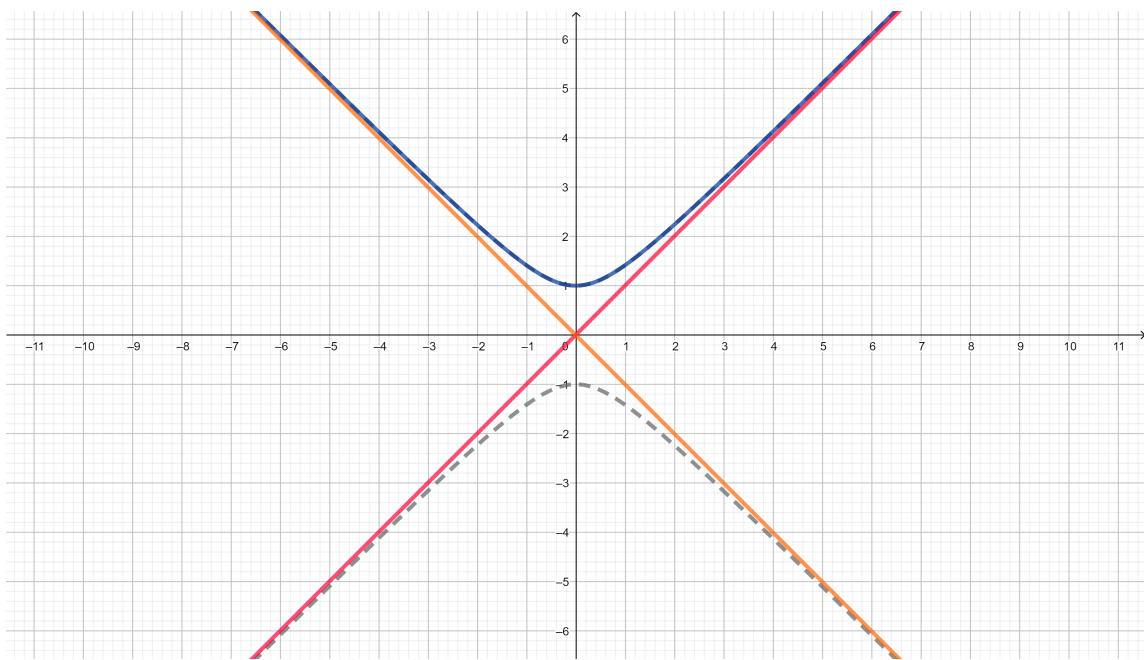


Figura 2.2: Na figura encontram-se representadas as assíntotas oblíquas da função  $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$  (a azul) dadas pelas rectas  $y = x$  (a magenta) e  $y = -x$  (a laranja).

De seguida, use a **Definição 2.1.7** para interpretar o resultado obtido.

■ **Exemplo 2.15 — Indeterminação tipo  $\frac{0}{0}$ .** Para calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

comece por observar que

$$x - 1 = (\sqrt[3]{x})^3 - 1$$

e por considerar o polinómio de grau 3 na variável  $y$ :

$$p_3(y) = y^3 - 1.$$

Como este polinómio admite zero em  $y = 1$ , segue pelo algoritmo da divisão de polinómios – vide **Teorema 1.5.1** da subsecção **1.5.1 Funções Polinomiais** – que

$$y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1).$$

Em particular, para a escolha  $y = \sqrt[3]{x}$  segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.16 — Indeterminação do tipo**  $0 \times \infty$ . Um dos limites do tipo  $0 \times \infty$  que surge muito na literatura envolve as funções exponenciais e logaritmos de base  $a$  abordados nas subseções **1.5.4 Funções Exponenciais** e **1.5.6 1.5.6**, assim como polinómios de grau  $n$ , que iremos denotar por  $p_n(x) = a_n x^n + p_j(x)$ ,  $a_n \neq 0$  e  $j < n$ .

Note que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_n(x) = a_n(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

Adicionalmente, os seguintes limites que poderão ser verificados no **Capítulo 3 Derivação** quando abordar a regra de L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{-x} p_n(x) &= 0 \quad \text{para valores de } a > 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) p_n(x) &= 0 \quad \text{para valores de } a > 1 \end{aligned}$$

envolvem indeterminações do tipo  $0 \times \infty$  que podem ser convertidos em indeterminações do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  (limite envolvendo a função exponencial) e  $\frac{0}{0}$  (limite envolvendo a função logarítmica). ■

### 2.1.5 Teorema do Enquadramento e Aplicações

Nesta subseção iremos introduzir um resultado de extrema utilidade que nos permite determinar, em particular, limites envolvendo as funções transcendentas ilustradas no **1.5 Directório: Funções Algébricas e Funções Transcendentais** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**.

**Teorema 2.1.9 — Teorema do Enquadramento.** Seja  $h$  a função definida, num intervalo  $I$  aberto contendo o ponto  $a$ , eventualmente com exceção de  $a$ . Se existem duas funções  $f$  e  $g$ , para as quais se tem

- $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad x \in I$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

*Ideia da demonstração.* Uma ideia simples para esboçarmos a demonstração imediata do **Teorema 2.1.9** passa por considerarmos a desigualdade auxiliar, envolvendo o módulo de um número real  $a \in \mathbb{R}$ :

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Assumindo que  $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad x \in I$ , segue a sequência de desigualdades<sup>8</sup>

$$-|f(x) - L| \leq f(x) - L \leq h(x) - L \leq g(x) - L \leq |g(x) - L|.$$

Logo

$$-\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| \leq \lim_{x \rightarrow a} (h(x) - L) \leq \lim_{x \rightarrow a} |g(x) - L|.$$

De seguida, da condição  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  obtém-se que

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x) - L| = 0$$

e, por conseguinte, que

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow a} (h(x) - L) \leq 0.$$

<sup>8</sup>Note que para  $a = f(x) - L$  se tem  $f(x) - L \geq -|f(x) - L|$ . Por outro lado, para  $a = g(x) - L$ , podemos concluir que  $g(x) - L \leq |g(x) - L|$ .

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} (h(x) - L) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

■

**Desafio 2.9** Assumindo que a função  $f$  satisfaz a condição

$$x + 2 \arccos(a) \leq f(x) \leq x^2 + \arctan(b)$$

para todo  $x \neq -1$ , determine para que valores de  $a$  e  $b$  se tem

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0.$$

### Limites envolvendo funções limitadas

**Corolário 2.1.10 — Enquadramento envolvendo funções limitadas.** Seja  $f$  a função definida, num intervalo aberto contendo o ponto  $a$ , eventualmente com exceção de  $a$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

e  $g$  uma função limitada no intervalo  $I$ .

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0.$$

*Ideia da Demonstração.* Assumindo que  $g$  é uma função limitada no intervalo  $I$ , segue nas condições da **Definição 1.3.6** que a função  $x \mapsto |f(x)g(x)|$  é limitada inferiormente pelo eixo  $Ox$ , e superiormente pela função

$$x \mapsto M|f(x)|,$$

sendo  $M > 0$  a constante a determinar, i.e.

$$0 \leq \underbrace{|f(x)g(x)|}_{=|h(x)|} \leq M|f(x)|, \quad \text{para todo o } x \in I.$$

Adicionalmente, da condição

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0,$$

segue que a igualdade<sup>9</sup>

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0,$$

é imediata por aplicação directa do **Teorema 2.1.9**. ■

■ **Exemplo 2.17 — Exemplo académico de enquadramento.** Podemos mostrar que o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

ou usando o item 6. do **Teorema 2.1.8** ou **Teorema 2.1.9**.

Para aplicarmos o **Teorema 2.1.9**, observe que a desigualdade

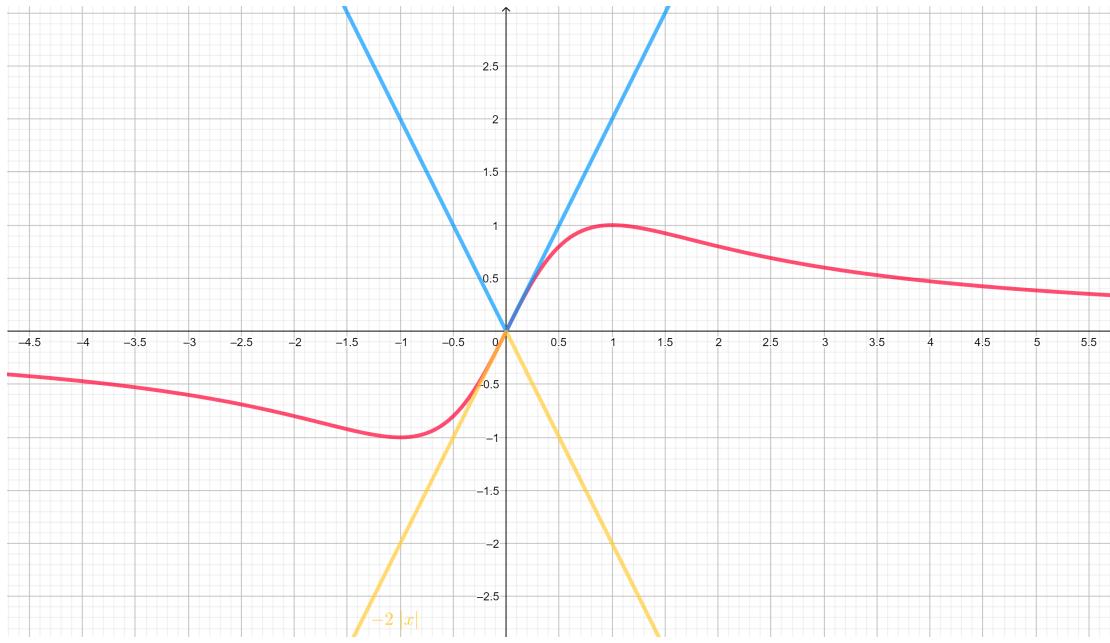
$$1+x^2 \geq 1$$

<sup>9</sup>Observe que  $\lim_{x \rightarrow a} |h(x)| = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ .

nos permite concluir<sup>10</sup> que

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| = \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 2|x| \iff \underbrace{-2|x|}_{=m} \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq \underbrace{2|x|}_{=M}.$$

Mostrámos assim que a função  $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$  é limitada superiormente pela função  $x \mapsto 2|x|$ , e inferiormente pela função  $x \mapsto -2|x|$ , tal como ilustrado na figura abaixo



Adicionalmente, a igualdade

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

permite-nos demonstrar, por enquadramento, que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

■



O gráfico da função  $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$  – vide **Desafio 1.19** – corresponde ao gráfico de uma função limitada. Assim, nas condições do **Corolário 2.1.10** poderíamos verificar para valores de  $a \in \mathbb{R}$  que

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{2x}{1+x^2} f(x) \right) = 0,$$

desde que a função  $f$  escolhida satisfizesse a condição de limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

■ **Exemplo 2.18 — Teorema do Enquadramento envolvendo funções trigonométricas.** Outro tipo de exemplos clássico envolvendo teorema do confronto consiste p.e no estudo de limites da forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \left( \frac{1}{x} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

<sup>10</sup>Observe que a desigualdade  $|a| \leq |b|$  é equivalente a termos  $-|b| \leq a \leq |b|$ .

No nosso caso, considerámos  $a = \frac{2x}{1+x^2}$  e  $b = 2|x|$ .

Neste caso particular, a função  $f$  definida por  $f(x) = x^n$  satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

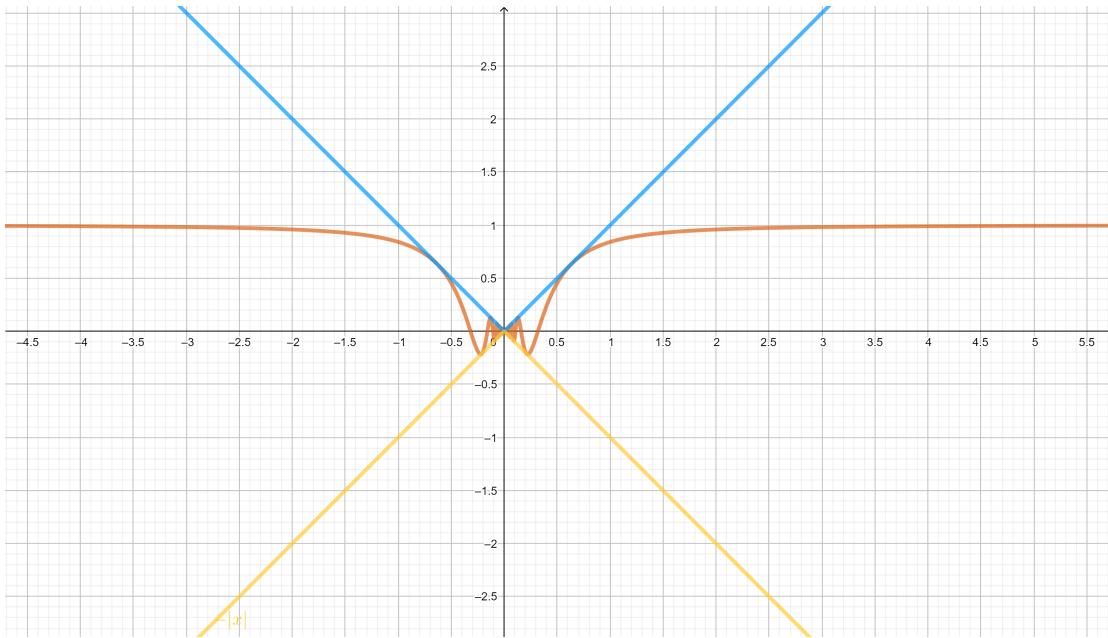
Por outro, a função  $g$  da definida  $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , mesmo não tendo limite em  $x \rightarrow 0$ , é limitada – vide **Exemplo 2.6** – está nas condições do **Corolário 2.1.10** pelo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \text{para todos o } n \in \mathbb{N}.$$

No caso de  $n = 1$ , a prova por enquadramento induzida pela desigualdade

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|, \quad \text{para todo o } x \neq 0$$

tem a seguinte representação gráfica:



■

No próximo exemplo iremos ilustrar a razão pela qual o **Corolário 2.1.10** não pode ser aplicado no caso de termos uma função  $g$  que não é limitada

■ **Exemplo 2.19 — Exemplo em que a função não é limitada.** Suponha que pretendemos calcular limites da forma

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi} \left( \cotg\left(\frac{x}{2}\right) g(x) \right)$$

envolvendo uma função  $g$  **não necessariamente limitada**.

Note que a função

$$x \mapsto \cotg\left(\frac{x}{2}\right)$$

está nas condições do **Corolário 2.1.10**, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3\pi} \cotg\left(\frac{x}{2}\right) &= \cotg\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{0}{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

No entanto, se escolhermos  $x \mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$  como função  $g$ , obtemos<sup>11</sup>

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3\pi} \left( \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right) &= \lim_{x \rightarrow 3\pi} 1 \\ &= 1 \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

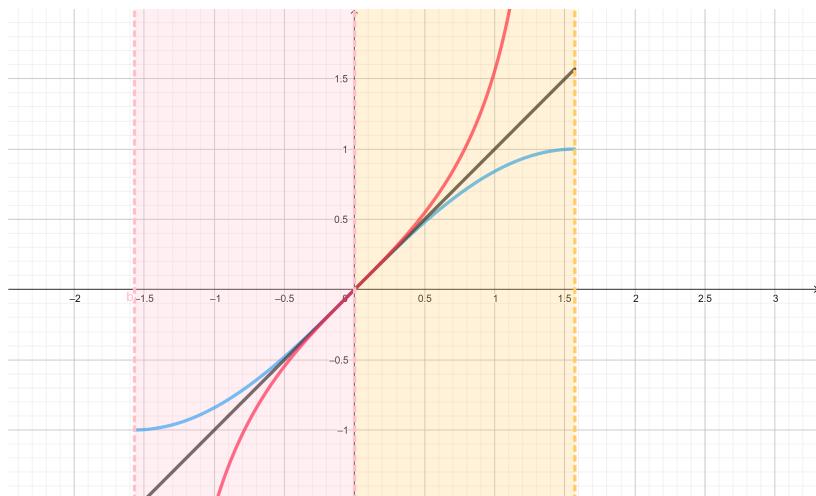
■

**Desafio 2.10 — Vide Exemplo 2.17.** Diga, justificando, em qual dos exemplos abaixo não é possível aplicar o **Corolário 2.1.10**:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + 1} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + 1} \arccos(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + 1} \tan\left(\frac{1}{x}\right)$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + 1} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

### Limites notáveis envolvendo funções trigonométricas

■ **Exemplo 2.20 — Enquadramento utilizando funções seno e tangente.** Na figura abaixo encontram-se representado no intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  os gráficos das funções seno (a azul), tangente (a magenta) e a reta de equação  $y = x$ .



Note que no intervalo  $]\!0, \frac{\pi}{2}[$  (região sombreada a amarelo) o gráfico da função tangente se situa acima da recta  $y = x$ . Por sua vez, o gráfico da função seno se situa abaixo da recta  $y = x$ .

Esta interpretação gráfica permite-nos obter a seguinte desigualdade:

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) \quad \text{para todo o } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

Dividindo<sup>12</sup> por  $\sin(x)$  em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}, \quad \text{para todo o } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

<sup>11</sup>Observe que  $\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$ .

<sup>12</sup> $\sin(x) > 0$  no intervalo  $]\!0, \frac{\pi}{2}[$  &  $\sin(x) < 0$  no intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ .

De modo análogo, para a região sombreada a rosa segue a desigualdade

$$\tan(x) \leq x \leq \sin(x), \quad \text{para todo } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}.$$

e, por conseguinte, a desigualdade

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{para todo } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

após dividirmos ambos os membros da [dupla] desigualdade por  $\sin(x)$ .

Estamos portanto nas condições do **Teorema 2.1.9**, uma vez que as funções  $f, g$  e  $h$  definidas por

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{x}{\sin(x)}$$

satisfazem a desigualdade

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{=\sec(x)} \quad \text{para todo } 0 < x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \setminus \{0\}$$

e têm limites iguais:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sec(x) = \sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1.$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1.$$

■



A conclusão de que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

pode ser obtida, aplicando novamente o **Teorema 2.1.9** às funções resultantes da desigualdade<sup>13</sup>

$$1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \cos(x) \quad \text{para todo } 0 < x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \setminus \{0\}$$

ou alternativamente aplicando à função  $h(x) = \frac{x}{\sin(x)}$  a propriedade envolvendo limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} h(x)}$$

que decorre do **Teorema 2.1.8**.

<sup>13</sup>Note que a equivalência

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \iff 1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \cos(x)$$

é verdadeira para todo  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \setminus \{0\}$ .

**Desafio 2.11 — Limites notáveis envolvendo funções trigonométricas.** Use o resultado obtido no **Exemplo 2.20** verificar os seguintes limites:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1.$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cotg}(x) = 1.$

**Desafio 2.12 — Enquadramento utilizando funções cosseno e cotangente.** Na figura abaixo encontra-se representado os seguintes gráficos no intervalo  $]0, \pi[$ . São eles:

- O gráfico da função  $x \mapsto \cos(x)$  (a azul);
- O gráfico da função  $x \mapsto \operatorname{cotg}(x)$  (a magenta);
- O gráfico da recta de equação  $y = -x + \frac{\pi}{2}$  (a preto).

Adicionalmente, foi representado a rosa (resp. amarelo) os intervalos  $]0, \frac{\pi}{2}[$  (resp.  $\frac{\pi}{2}, \pi[$ ).

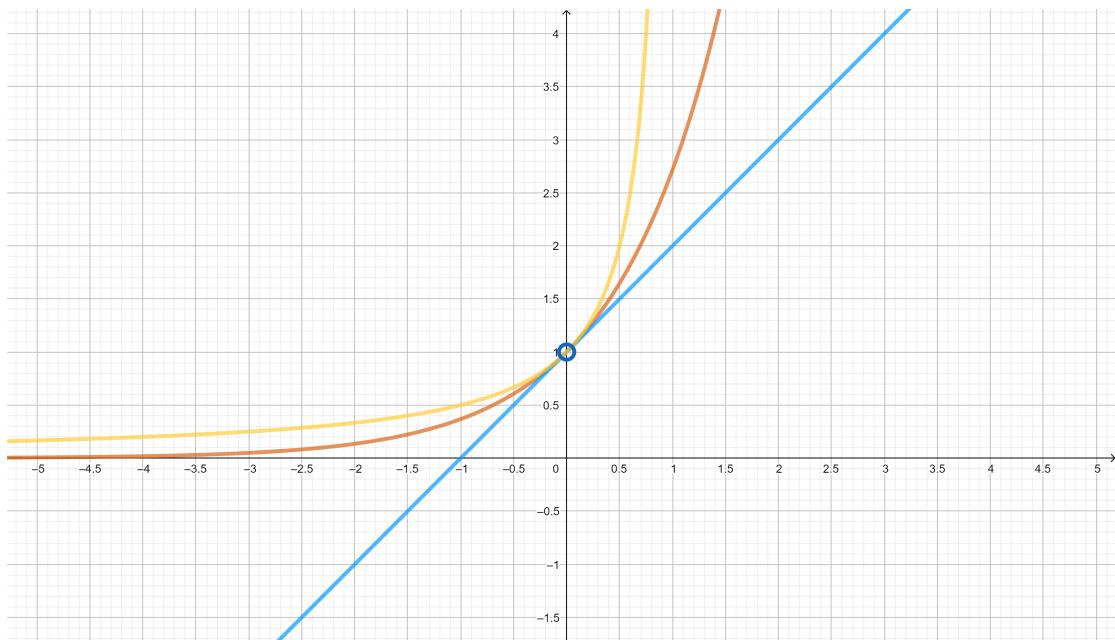


Use o gráfico acima e o **Teorema 2.1.9** para determinar o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2x - \pi}.$$

### Limites notáveis envolvendo exponenciais

■ **Exemplo 2.21** O exemplo da figura abaixo corresponde ao enquadramento da função  $x \mapsto e^x$  (a vermelho) pela recta  $y = x + 1$  (a azul) – que é tangente ao gráfico de  $e^x$  em  $(0, 1)$  – e a função  $g(x) = \frac{1}{1-x}$  (representada a laranja apenas para valores de  $x \leq 1$ ).



A interpretação gráfica conduz-nos à sequência de inequações

$$x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \quad \text{para todo o } x < 1$$

que por sua vez nos permitem obter as seguintes desigualdades:

$$\underbrace{\frac{1}{x}}_{=f(x)} \leq \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{=h(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{=g(x)}, \quad \text{no caso de } 0 < x < 1.$$

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{=f(x)} \leq \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{=h(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{=g(x)}, \quad \text{no caso de } x < 0.$$

Adicionalmente, a verificação das igualdades abaixo envolvendo limites laterais, com recurso ao **Teorema 2.1.9**, é imediata:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}$$

Esta última igualdade permite-nos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Desafio 2.13** Para função  $f$  definida pontualmente por  $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x+1} + 1\right)$ .

1. Determine o domínio de  $f$ .
2. Determine a expressão analítica, o domínio e o contradomínio da função inversa  $f^{-1}$ .
3. Calcule o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} xf^{-1}(x)$ .

## 2.1.6 Cálculo de limites usando substituição

### Limites envolvendo funções trigonométricas

No próximo exemplo vamos fazer uso do limite notável deduzido no **Exemplo 2.20** para calcular o limite abaixo

■ **Exemplo 2.22 — Limite envolvendo os zeros da função seno.** Como teve oportunidade de constatar na **Subseção 1.5.8** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** os zeros da função seno são da forma

$$x = k\pi, \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para este caso, obtemos que o limite

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin(x)}{x - k\pi}$$

corresponde a uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .

Por outro lado, note que nas condições do **Corolário 2.2.4** a função [na variável  $y$ ]  $y \mapsto y + k\pi$  satisfaz

$$\lim_{y \rightarrow 0} (y + k\pi) = k\pi.$$

Assim, fazendo a substituição  $x = y + k\pi$ , obtém-se a igualdade

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin(x)}{x - k\pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + k\pi)}{y}.$$

De seguida, aplicando a identidade abaixo para  $a = x$  e  $b = k\pi$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$

conclui-se ainda que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + k\pi)}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)\cos(k\pi) + \cos(y)\overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)\cos(k\pi)}{y}. \end{aligned}$$

Por fim, fazendo uso do limite notável

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

obtido a partir do **Exemplo 2.20**, concluímos com base no **item 3. do Teorema 2.1.8** que

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin(x)}{x - k\pi} = \cos(k\pi).$$

**A prova de que a constante  $c = \cos(k\pi)$  admite a simplificação**

$$\cos(k\pi) = (-1)^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**fica a cargo do leitor.**

■

■ **Exemplo 2.23 — Limites notáveis envolvendo funções trigonométricas inversas.** Podemos facilmente verificar que, nas condições do **Corolário 2.2.4** que as igualdades abaixo são verdadeiras:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \underset{y = \arcsin(x)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\arcsin(y)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \underset{y = \arctan(x)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\arctan(y)}$$

A prova de que o valor dos limites envolvendo as funções trigonométricas inversas vale um (1) em ambos os casos é uma consequência directa do **Exemplo 2.20** e do **Desafio 2.11**. ■

■ **Exemplo 2.24 — Limites notáveis envolvendo funções logarítmicas.** Podemos facilmente verificar que, nas condições do **Corolário 2.2.4** que a igualdade abaixo é verdadeira:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{y = e^x - 1}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y + 1)}$$

A prova de que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)}$$

é imediata pelo **Exemplo 2.21** e pelo item 6. do **Teorema 2.1.8**. ■

**Desafio 2.14** Suponha que  $g$  é uma função que satisfaz a condição

$$|x^2 g(x) - x \ln(1 + x)| \leq |x|^3, \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Aplique o **Teorema 2.1.9** para calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

**Desafio 2.15** Use a substituição  $x = f^{-1}(y)$  (função inversa) – i.e.  $g = f^{-1}$  no **Teorema 2.2.3** – para calcular os seguintes limites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\arccos(x)}.$$

SUGESTÃO: Faça substituição  $x = \cos(y)$  para valores<sup>14</sup> de  $0 \leq y \leq \pi$ .

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin(e^x - 1)}{e^x - 1} \frac{e^x - 1}{x} \right) = \dots$$

SUGESTÃO: Faça a substituição  $y = e^x - 1$  num dos limites.

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arctan(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1 + \arctan(x))}{\arctan(x)} \frac{\arctan(x)}{x} \right) = \dots$$

SUGESTÃO: Faça a substituição  $y = \arctan(x)$  num dos limites.

<sup>14</sup>A escolha  $0 \leq y \leq \pi$  segue do facto de  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  corresponder à inversa da função  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  – vide subseção **1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas**.

### 2.1.7 Cálculo de limites no infinito

Nesta seção convidamos o leitor a aplicar o **Teorema 2.4** para reformular/calcular alguns dos limites obtidos anteriormente no infinito.

#### Limites envolvendo funções limitadas

**Desafio 2.16** Use o que aprendeu com o estudo de exemplos envolvendo o **Teorema 2.1.10** – em particular, os **Exemplo 2.2 & Exemplo 2.18** – para calcular os limites abaixo no infinito:

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + \sin(x)}{x - 11 \sin(x)};$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2 \tan\left(\frac{1}{x}\right)}.$

**Desafio 2.17** Com base no estudo da função  $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$  no **Exemplo 2.14**, dê um exemplo de uma função  $g$  para a qual se verifica a igualdade

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2}g(x) + xg(x)) = 0.$$

#### Limites envolvendo funções transcendentais

É fácil de verificar, via a substituição  $y = \frac{1}{x}$  as seguintes identidades<sup>15</sup>:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1. \end{aligned}$$

**Desafio 2.18** Use o que aprendeu sobre cálculo de limites envolvendo substituição para verificar as igualdades abaixo:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right) = 0.$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{8} \sinh\left(\frac{9}{x}\right) = \frac{9}{8}.$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \sqrt{\ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) + 1} - x \sqrt{\ln\left(1 + \frac{9}{x}\right) + 1} \right) = -\frac{5}{2}$

**Desafio 2.19** Faça uso do **Desafio 2.11** e do **Teorema 2.1.6** para verificar a igualdade abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + x - 2}{2x^5 - 16x} \cotg\left(\frac{\pi}{3x}\right) = \frac{3}{2\pi}.$$

#### Assíntotas ao gráfico

Para terminar, procure combinar o **Teorema 2.1.3** com o **Corolário 2.1.10** para comprovar o comportamento mencionado no exemplo abaixo:

■ **Exemplo 2.25** O gráfico de  $f$  tal que  $f(x) = e^{-x} \cos x$  admite uma assíntota horizontal de equação  $y = 0$ . Por outro lado, o gráfico de  $f$  intersecta a assíntota um número infinito de vezes pois

$$e^{-x} \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

sendo  $k$  um inteiro. ■

<sup>15</sup>Para  $x \rightarrow -\infty$  vs  $x \rightarrow 0^-$ , o raciocínio é análogo.

## 2.2 Continuidade

### 2.2.1 Definições: Continuidade num ponto

**Definição 2.2.1** Diz-se que a função  $f$  é contínua no ponto  $a$  se

- (i)  $a \in D_f$ ;
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Acrescente-se que, se pelo menos uma das condições referidas não for válida, diz-se ainda que  $a$  é um ponto de descontinuidade de  $f$ , ou seja,  $f$  é descontínua em  $a$ .

 Para as funções  $x \mapsto f(x)$  e  $x \mapsto |f(x)|$  tratadas no **Desafio 2.2** falha a continuidade em  $x = -1$ , uma vez que  $-1 \notin D_f$ .

 Para a função sinal do **Exemplo 1.12** falha a continuidade em  $x = 0 \in D_{\text{sgn}}$ , uma vez que o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x)$  não existe – vide **Exemplo 2.3**.

**Desafio 2.20** Encontre o valor das constantes  $c$  e  $d$  para as quais a função  $h$  é contínua em  $x = -3$ :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{-x^3 - 2x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4}}{x^3 + 27} & , \text{ se } x < -3 \\ c & , \text{ se } x = -3 \\ \frac{dx + 3d}{1 - \sqrt{x+4}} & , \text{ se } x > -3 \end{cases}$$

**SUGESTÃO:** Comece por rever o **Teorema 1.5.1** as técnicas de cálculo adoptadas no **Exemplo 1.45** e no **Exemplo 1.46** da subseção **1.5.1 Funções Polinomiais**.

**Definição 2.2.2** Seja  $a$  uma descontinuidade de  $f$ .

Então

1. O ponto  $a$  é uma descontinuidade removível se existe e é finito o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , mas este ou é diferente de  $f(a)$  ou então  $a$  não pertence a  $D$ ;
2. O ponto  $a$  é um pólo se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

3. O ponto  $a$  é uma descontinuidade de primeira espécie se os dois limites laterais existem e são finitos, mas distintos;
4. O ponto  $a$  é uma descontinuidade de segunda espécie se pelo menos um dos limites laterais não existe ou é infinito.

**Exemplo 2.26** Cada uma das seguintes funções é descontínua em  $x = 0$ . Assim

1.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  tem uma descontinuidade removível
2.  $g(x) = \frac{1}{|x|}$  tem um pólo.
3.  $h(x) = (1 + e^{1/x})^{-1}$  tem uma descontinuidade de primeira espécie.

4.  $j(x) = x^{-1/3}$  tem uma descontinuidade de segunda espécie.



A função sinal do **Exemplo 1.12** exibe uma descontinuidade de primeira espécie em 0 uma vez que os limites laterais são finitos mas distintos – vide **Exemplo 2.3**.



As funções  $g$  e  $f^{-1}$  tratadas no **Exemplo 2.7** exibem em  $x = \pm 1$  **descontinuidades de segunda espécie**.

**Desafio 2.21** Classifique as descontinuidades das funções

$$x \mapsto f(x) \text{ e } x \mapsto |f(x)|$$

tratadas no **Desafio 2.2**.

**Definição 2.2.3 — Prolongamento por continuidade de  $f$  em  $x_0$ .** Sejam  $f : D \rightarrow Y$  uma função e  $x_0$  uma descontinuidade removível de  $f$ .

Então  $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \rightarrow Y$  definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

é contínua em  $x_0$ .

**Desafio 2.22** Determine, caso exista, o prolongamento analítico para as funções

$$x \mapsto f(x) \text{ e } x \mapsto |f(x)|$$

tratadas no **Desafio 2.2**.

**Desafio 2.23** Determine o valor das constantes  $a$  e  $b$  de modo a que a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x^2} \ln(1+x) & , \text{ se } x > 0 \\ \frac{\tan(bx)}{\tan(ax)} & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

satisfça as seguintes condições:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ .
2.  $f$  admite prolongamento analítico em  $x = 0$ .

## 2.2.2 Funções contínuas em intervalos

Vamos apresentar a noção de continuidade de uma função num intervalo: aberto, semi-aberto ou fechado, subconjuntos do seu domínio.

**Definição 2.2.4 — Continuidade em intervalos.** A função  $f : D \rightarrow Y$  diz-se contínua em  $]c, d[ \subset D$  se nesse intervalo aberto não existe nenhum ponto de descontinuidade de  $f$ .

Supondo agora, que o domínio de  $f$  contém o intervalo fechado  $[c, d]$  estabelece-se que  $f$  é contínua em  $[c, d]$  se

- (i)  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$
- (ii)  $f$  é contínua em  $]c, d[$

■ (iii)  $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x) = f(d)$

Acrescente-se que:

- (i) e (iii) significam que  $f$  é contínua à direita de  $c$  e à esquerda de  $d$ , respectivamente. Pode-se então dizer que  $f$  é contínua em  $[c, d]$  se  $f$  é contínua, à direita de  $c$ , em  $]c, d[$  e à esquerda de  $d$ , simultaneamente;
- Se  $f$  verificar apenas (i) e (ii) diz-se que é contínua em  $[c, d[$ ;
- Se verificar somente (ii) e (iii) já se diz que é contínua em  $]c, d]$ .

✓ Note que a inversa  $f^{-1}$  da função  $x \rightarrow \frac{x}{1+|x|}$  tratada no **Desafio 1.33** é contínua no intervalo  $] -1, 1[$  mas descontínua nos intervalos da forma

$$[-1, 1], \quad ] -1, 1], \quad [-1, 1[.$$

Esta conclusão segue do facto de  $x = \pm 1$  serem assímpotas ao gráfico de  $f^{-1}$  – vide **Exemplo 2.7**.

### 2.2.3 Propriedades e Resultados

**Teorema 2.2.1** A função  $f$  é contínua no ponto  $a$  se e só se  $f$  é contínua à direita e à esquerda de  $a$  simultaneamente.

Todas as funções pertencentes ao directório são contínuas no seu domínio. Poderá criar as suas próprias funções, operando essas funções entre si, sem surgirem descontinuidades, como revelam os próximos teoremas.

**Teorema 2.2.2** Se  $f$  e  $g$  são contínuas no ponto  $a$  então as seguintes funções também são contínuas em  $a$ :

- a função soma,  $f + g$
- a função diferença,  $f - g$
- a função produto,  $f \times g$
- a função potência,  $f^n$
- a função quociente,  $\frac{f}{g}$ , desde que  $g(a) \neq 0$
- a função módulo,  $|f|$

**Teorema 2.2.3 — Continuidade da função composta.** Se  $f$  é contínua no ponto  $a$  e  $g$  é contínua no ponto  $L$  com  $L = f(a)$  então  $g \circ f$  é contínua em  $a$

**Corolário 2.2.4** Seja  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Se  $g$  é contínua no ponto  $L$  então

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(L)$$

**Teorema 2.2.5** Seja  $f$  definida num intervalo  $I$  com valores num intervalo  $J$  e invertível. A função  $f$  é contínua em  $I$  se e só se  $f^{-1}$  é contínua em  $J$ .

### 2.2.4 Zeros e extremos de funções contínuas

Esta subseção servirá de pré-requisito para introduzir, mais à frente no Capítulo 3 Derivação, o estudo de extremos (máximos ou mínimos) de funções.

## Localização de zeros em funções contínuas

**Teorema 2.2.6 — Teorema de Bolzano-Cauchy.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua num intervalo  $[c, d] \subseteq D$ . Se  $x_1$  e  $x_2$  são dois pontos do intervalo e  $k$  um valor compreendido entre  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  então existe, pelo menos, um valor  $x_0$  em  $[c, d]$ , para o qual  $f(x_0) = k$ .



Embora a demonstração do **Teorema 2.2.6** seja meramente técnica, a sua interpretação gráfica decorre da interpretação gráfica do conceito de continuidade de uma função.

Este resultado garante que toda a função contínua num intervalo fechado para passar de um valor a outro tem obrigatoriamente que passar por todos os valores intermédios. Fazendo  $k = 0$  no teorema anterior tem-se

**Corolário 2.2.7** Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[c, d] \subseteq D$ . Se  $f(c)f(d) < 0$  então a função  $f$  tem, no mínimo, um zero.



No caso do gráfico de  $f$  ser estritamente monótono – vide subseção **1.3.5 Monotonia e Concavidades** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** – o zero da função obtido pelo **Corolário 2.2.7** é único.

■ **Exemplo 2.27 — Função cosseno hiperbólico.** Observe que para funções pares, como é o caso da função  $f$  definida por  $f(x) = \cosh(x) - 1$  – vide subseção **1.5.5 Funções Hiperbólicas** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** – não é possível aplicar o **Corolário 2.2.7** para localizar os zeros em intervalos simétricos da forma  $[-d, d]$  ( $d > 0$ ), uma vez que

$$f(-d) = \underbrace{\frac{e^{-d} + e^{-(-d)}}{2}}_{=\cosh(-d)} - 1 = \underbrace{\frac{e^{-d} + e^d}{2}}_{=\cosh(d)} - 1 = f(d) \implies f(-d)f(d) = f(d)^2 > 0.$$

No entanto, a igualdade

$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$$

permite-nos verificar que  $0 \in [-d, d]$  é um zero de  $f$ . ■

Com o próximo desafio pretende-se que aplique o conceito de paridade, abordado na subseção **1.3.3 Paridade e Simetria** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** à localização de zeros em intervalos simétricos.

**Desafio 2.24** Suponha que  $f$  é uma contínua no intervalo  $[-d, d] \subseteq D_f$  ( $d > 0$ ).

1. Mostre que se  $f$  é ímpar, então  $f$  admite pelo menos um zero no intervalo  $[-d, d]$ .
2. No caso de  $f$  ser ímpar e injectiva, o que pode afirmar sobre o ponto  $0 \in [-d, d]$ ? – vide **Corolário 1.3.4**.

O próximo resultado, conhecido por teorema do ponto fixo de Brouwer, permite-nos mostrar a existência de certas situações de equilíbrio em Economia, via o estudo da existência de *pontos fixos*<sup>16</sup>.

<sup>16</sup>Dizemos que  $x \in D_f$  é um ponto fixo de  $f$  se, e só se, é solução da equação  $x = f(x)$

**Teorema 2.2.8 — Teorema do ponto fixo de Brouwer.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[c, d]$ , satisfazendo

$$c \leq f(x) \leq d, \text{ para todo } x \in [c, d].$$

Então, a equação de ponto fixo  $x = f(x)$  possui pelo menos uma solução  $x \in [c, d]$ .

O Teorema do ponto fixo de Brouwer enunciado acima admite várias demonstrações. No contexto da presente seção, iremos recorrer ao **Corolário 2.2.7** do teorema de Bolzano-Cauchy (**Teorema 2.2.6**) para ilustrar como o problema de localização de zeros de uma função contínua está correlacionado com o estudo de pontos fixos.

*Ideia da demonstração.* Se  $f(c) = c$  ou  $f(d) = d$  então a existência de pelo menos uma solução para a equação  $f(x) = x$  em  $[c, d]$  está assegurada. Caso contrário – i.e.  $f(c) \neq c$  e  $f(d) \neq d$  basta verificar que a condição

$$c \leq f(x) \leq d \text{ para todo } x \in [c, d].$$

nos assegura, em particular, que  $f(c) > c$  e  $f(d) < d$ . Logo, a função auxiliar  $g$  definida por  $g(x) = f(x) - x$  está nas condições do **Corolário 2.2.7**, uma vez que é contínua e satisfaz  $g(c)g(d) < 0$ .

Esta última condição é deduzida a partir de

$$\begin{aligned} g(c) &= f(c) - c > 0 \\ g(d) &= f(d) - d < 0. \end{aligned}$$

Assim, prova-se que  $g$  tem pelo menos um zero em  $[c, d]$ , ou equivalentemente, que a equação

$$x = f(x)$$

tem pelo menos uma solução em  $[c, d]$ . ■

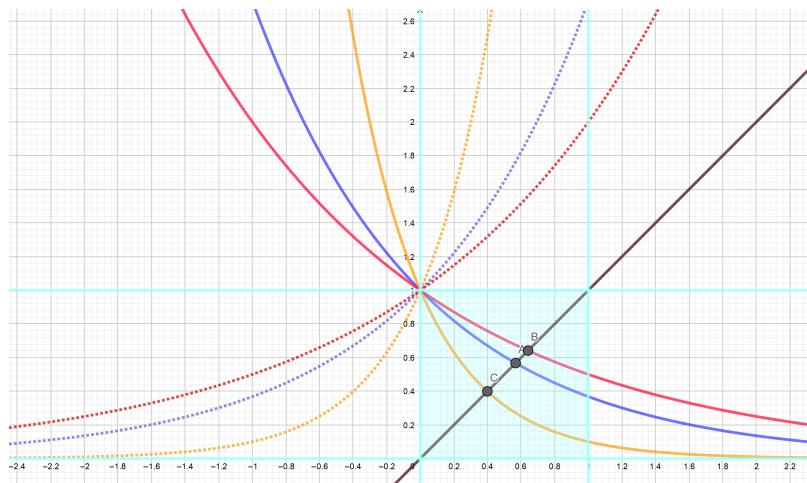


Graficamente, uma função contínua  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz o **Teorema 2.2.8** se, e só se, o gráfico da função  $f$  está contido do quadrado de lado  $d - c$ :

$$[c, d] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d \wedge c \leq y \leq d\}.$$

■ **Exemplo 2.28 — Pontos fixos envolvendo a função exponencial.** Na figura abaixo representámos a pontilhado os gráficos das funções  $x \rightarrow 2^x$ ,  $x \mapsto e^x$  &  $x \mapsto 10^x$ , já ilustrados na subseção **1.5.7 Função Exponencial-Potência** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**, e a cheio [com a mesma cor] a reflexão de cada um dos gráficos relativamente ao eixo  $Oy$  – vide **Definição 1.4.4**.

Adicionalmente, incluímos a reta  $y = x$  (a castanho) para ilustrar os pontos fixos das funções  $x \mapsto 2^{-x}$  (a magenta),  $x \mapsto e^{-x}$  (a azul) &  $x \mapsto 10^{-x}$  (a laranja).



Para o caso dos gráficos a pontilhado, estes situam-se sempre acima da recta  $y = x$ , donde se conclui que estas não admitem pontos fixos.

No entanto, para as funções da forma  $x \rightarrow a^{-x}$  ( $a > 1$ ) – vide subseção **1.5.4 Funções Exponenciais** – admitem pontos fixos, com base nas desigualdades abaixo:

$$0 < a^{-x} \leq 1, \quad \text{para todo o } x \geq 0$$

que seguem do facto do gráfico de  $x \mapsto a^{-x}$  ser estritamente decrescente em  $\mathbb{R}$ .

A desigualdade acima garante-nos, em particular, que a restrição do gráfico de funções da forma  $x \mapsto a^{-x}$  ( $a > 1$ ) ao intervalo  $[0, 1]$  está sempre contido no quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  (representado na figura a azul mais claro), o que nos permite aplicar o **Teorema 2.2.8**.

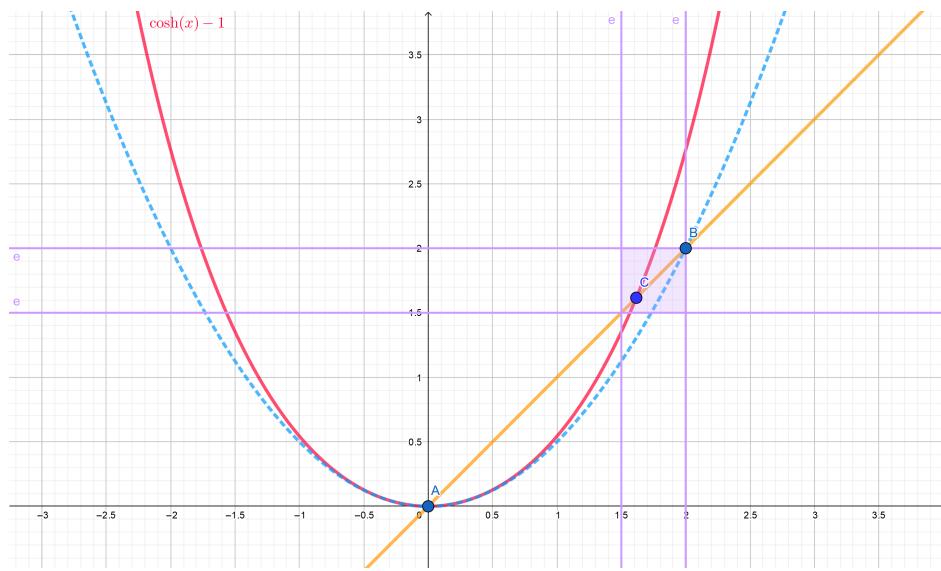
**Deixamos para o leitor a verificação de que a função  $f$  definida por  $f(x) = a^{-x} - x$  está nas condições do Corolário 2.2.7 no intervalo  $[0, 1]$ , assim como justificar a razão pela qual  $f$  admite um único zero e, por conseguinte,  $x \mapsto a^{-x}$  um único ponto fixo.** ■

No próximo exemplo iremos ilustrar a aplicabilidade do **Teorema 2.2.8** para localizar um dos pontos fixos de uma função hiperbólica. Estas já foram abordadas graficamente na subseção **1.5.5 Funções Hiperbólicas** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**

■ **Exemplo 2.29 — Pontos fixos envolvendo funções hiperbólicas.** Na figura abaixo ilustrámos graficamente a determinação dos pontos fixos das equações

$$x = \frac{x^2}{2} \quad \& \quad x = \cosh(x) - 1$$

representando a tracejado azul o gráfico da parábola de equação  $y = \frac{x^2}{2}$ , a magenta o gráfico da função hiperbólica  $x \mapsto \cosh(x) - 1$ , e a laranja a recta  $y = x$ .



No caso da parábola, a determinação dos pontos fixos –  $x = 0$  e  $x = 2$  – é imediata pela fórmula resolvente – vide **Exemplo 1.41** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**.

No caso da função apenas nos é possível verificar algebricamente que  $x = 0$  é um dos pontos fixos de  $x \mapsto \cosh(x) - 1$  – vide **Exemplo 2.27**.

Graficamente, fixando o intervalo  $I = [\frac{3}{2}, 2]$  é possível verificar que estamos nas condições do **Teorema 2.2.8**, uma vez que o ponto  $C = (x_0, x_0)$  da nossa figura – que nos dá a solução pretendida, está contido no quadrado  $I \times I$  (representado graficamente pela região a lilás).

Alternativamente, poderíamos verificar que a função auxiliar  $g$ , definida por

$$g(x) = \cosh(x) - 1 - x$$

está nas condições do **Corolário 2.2.7** no no intervalo  $I = [\frac{3}{2}, 2]$  – i.e.  $g(\frac{3}{2}) g(2) < 0$  – uma vez que

$$\cosh\left(\frac{3}{2}\right) - 1 < \frac{3}{2} \quad \& \quad \cosh(2) - 1 > 2,$$

pelo que a existência de  $\frac{3}{2} < x_0 < 2$  satisfazendo a equação  $x_0 = \cosh(x_0) - 1$  é automaticamente garantida. ■

### Existência de máximos e mínimos absolutos de funções contínuas

**Teorema 2.2.9 — Teorema de Weierstrass.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua num intervalo fechado  $[c, d] \subseteq D$ . Então a função é limitada em  $[c, d]$  e por conseguinte tem um máximo e um mínimo absolutos.

Embora o teorema não forneça indicações para a identificação dos extremos num problema de optimização condicionada, é indispensável na medida em que garante a sua existência sempre que a função seja contínua num intervalo fechado.



Com base nas representações gráficas ilustradas no **Exemplo 2.28 & Exemplo 2.29**, é fácil de verificar que:

- A função  $x \mapsto a^{-x}$  admite máximo e mínimo no intervalo  $[0, 1]$ ;
- A função  $x \mapsto \cosh(x) - 1$  admite máximo e mínimo no intervalo  $[0, 2]$ .



Com base no estudo realizado ao longo deste capítulo – em particular, a **2.2.4** & a **Definição 2.2.3** – é fácil de constatar que no caso de

$$x = c \text{ ou } x = d$$

ser(em) assímpota(s) vertical/verticais ao gráfico de  $f$ , então é impossível obter uma extensão de continuidade de  $f$  em intervalos da forma  $[c, d]$ , de forma a poder aplicar o **Teorema 2.2.9**.

### 2.3 Exercícios Propostos

19. Calcule os seguintes limites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow a^2} \frac{\sqrt{x} - a}{x - a^2}$ ,  $a > 0$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x/3)}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sec x - 1) \sin x}{x^2}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^{-1/2} - 2^{-1}}{x - 4}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}$

20. Utilizando o teorema do limite das funções enquadradadas, mostre que:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x \cos(1/x) = 0$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$

21. Estude a continuidade das seguintes funções definidas por:

(a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(b)  $f(x) = \begin{cases} \ln|x-2| & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(c)  $f(x) = \begin{cases} \arctg(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{2x}}{\sinh x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(e)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-|x|} & \text{se } x \neq 1 \wedge x \neq -1 \\ -2 & \text{se } x = 1 \vee x = -1 \end{cases}$

(f)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln|x-1|}{|x|-1} & \text{se } x \neq 1 \wedge x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ 1/2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$

22. Defina o prolongamento por continuidade, caso exista, das funções do exercício anterior.

23. Determine as assíntotas aos gráficos das seguintes funções.

(a)  $f(x) = \frac{\cos x}{x} + 2x$

(b)  $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 1}$

(c)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

(d)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x}$

(e)  $f(x) = \ln(\arctan x)$

(f)  $f(x) = \exp(-x^2)$

(g)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

(h)  $f(x) = \frac{|x-4|+x}{(x-2)^2}$

24. Mostre que as equações apresentadas têm pelo menos uma raíz no intervalo  $I$  indicado.

(a)  $x^3 - 3x + 1 = 0$ ,  $I = [0, 1]$

(b)  $\cos x = x$ ,  $I = [0, \pi/2]$

(c)  $\tan x = x + 1$ ,  $I = [0, \pi/2[$

25. Mostre que as seguintes equações têm pelo menos uma solução:

(a)  $x^3 = \cos x$

(b)  $1/x = \sin x$

(c)  $e^x = \tan x$





## 3. Derivadas e Aplicações

### 3.1 A derivada da função no ponto e interpretação geométrica

Para compreender a interpretação geométrica da derivada da função  $f$  no ponto  $x_0$  é preciso saber responder à seguinte questão:

*Como traçar a recta tangente ao gráfico de  $f : ]a, b[ \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  em  $P = (x_0, y_0)$ , sendo  $x_0 \in ]a, b[$ ?*

A estratégia consiste em aproximar a recta tangente por outras rectas, as chamadas retas secantes ao gráfico de  $f$ . Consideremos então  $\Delta x = x - x_0$  e  $\Delta y = f(x) - y_0$  os acréscimos nas variáveis  $x$  e  $y$  a partir de  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente. Assim, temos  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  dois pontos pertencentes ao gráfico de  $f$ . Se imaginarmos o ponto  $Q$  a deslocar-se sobre o gráfico de  $f$  em direcção ao ponto  $P$ , as sucessivas rectas secantes vão-se aproximando de uma posição limite que é a da tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P$ . Por um lado, se  $\Delta x > 0$  e aproximar-se de zero, o ponto  $Q$  está à direita de  $P$ , logo as secantes aproximam-se de uma semi-recta  $t_d$ , a que se chama semi-tangente à direita no ponto  $P$ . Por outro lado, se  $\Delta x < 0$  e aproximar-se de zero, o ponto  $Q$  está à esquerda de  $P$ , logo as secantes aproximam-se de uma semi-recta  $t_e$  chamada semi-tangente à esquerda no ponto  $P$ . Esta abordagem dinâmica permite-nos averiguar a existência da recta tangente ao gráfico de  $f$  em  $P$ . Então concluímos que se as semi-tangentes  $t_d$  e  $t_e$  estão no prolongamento uma da outra então dão origem a uma recta  $t$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P$ . Porém, se as semi-tangentes não coincidirem então não podemos traçar a recta tangente ao gráfico no ponto  $P$ .

#### 3.1.1 Existência de derivada vs. diferenciabilidade

Formalizamos, em primeiro lugar, o conceito de derivada de uma função num ponto.

**Definição 3.1.1 — Derivada de  $f$  em  $x_0$ .** Sejam  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in ]a, b[$ . Se existir, ao limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

chama-se derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  e representa-se por  $f'(x_0)$ .

A expressão  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  designa-se por razão incremental de  $f$  relativamente a  $x_0$ .

■ **Exemplo 3.1 — Derivada finita.** Para a função  $f$  definida pontualmente por  $f(x) = x^2$ , podemos verificar via a **Definição 3.1.1** que, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixo, se tem que  $f'(x_0)$  é finita, uma vez que  $f'(x_0) = 2x_0 \in \mathbb{R}$ . De facto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) \\ &= 2x_0.\end{aligned}$$

■ **Exemplo 3.2 — Derivada infinita.** A função  $f$  tal que  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  admite derivada em  $x_0 = 0$ . Porém,  $f'(0) = +\infty$ , uma vez que

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Esta constatação poderia ser facilmente obtida, com base no estudo dos limites laterais da função  $g$ , definida pontualmente por  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ , em  $x_0 = 0$  – vide **Definição 2.1.5** do **Capítulo 2** **Limites e Continuidade**.

Formalizemos de seguida o conceito de função diferenciável num ponto.

**Definição 3.1.2 — Diferenciabilidade de  $f$  em  $x_0$ .** Nas condições da **Definição 3.1.1**, dizemos que a função  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $x_0 \in ]a, b[$  se o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

for finito, i.e. se  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ .



Ao contrário da **Definição 3.1.2 (função diferenciável num ponto)**, a **Definição 3.1.1 (derivada de uma função num ponto)** contempla os casos em que o limite, denotado por  $f'(x_0)$ , é finito ou infinito.

■ **Exemplo 3.3 — Existência de derivada vs. diferenciabilidade.** Para o caso da função  $f$  definida pontualmente por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , verificámos no **Exemplo 3.2** que  $f'(0) = +\infty$ . Por outro lado, os cálculos realizados no **Exemplo 2.15** permitem-nos concluir que

$$f'(1) = \frac{1}{3}.$$

Em geral, a substituição  $x = y^3$ , a continuidade de  $f$  e a igualdade

$$y^3 - y_0^3 = (y - y_0)(y^2 + y_0y + y_0^2)$$

permite-nos concluir, por definição, que para valores de  $x_0 \neq 0$  se tem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} &= \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{x_0}} \frac{y - \sqrt[3]{x_0}}{y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3} \\ &= \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{x_0}} \frac{y - \sqrt[3]{x_0}}{(y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + \sqrt[3]{x_0}y + (\sqrt[3]{x_0})^2)} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} \text{ [após algumas simplificações].} \end{aligned}$$

Em suma: A função  $f$  definida pontualmente por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ :

- Admite derivada em todo o  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;
- Não é diferenciável em  $x_0 = 0$ , uma vez que  $f'(0) = +\infty$ ;
- É diferenciável para todo o  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , uma vez que  $f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} \in \mathbb{R}$ .

■

### 3.1.2 Derivadas laterais

A aproximação a  $x_0$  na reta real pode ser feita por dois sentidos, quer por valores de  $x$  superiores a  $x_0$  quer por valores de  $x$  inferiores a  $x_0$ .

**Definição 3.1.3 — Derivadas Laterais de  $f$  em  $x_0$ .** Sejam  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in ]a, b[$ . Caso existam, os limites:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{resp.} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

■ representam a derivada à direita de  $f$  em  $x_0$  e a derivada à esquerda de  $f$  em  $x_0$ , respectivamente.

**Teorema 3.1.1 — Existência de derivada.** A função  $f$  tem derivada em  $x_0$ ,  $f'(x_0)$ , se e só se existem ambas as derivadas laterais de  $f$  em  $x_0$  e são iguais, isto é,

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

*Ideia de demonstração.* Atendendo a que as derivadas laterais envolvem a noção de derivadas laterais, segue que esta demonstração é análoga à demonstração do **Teorema 2.1.1** do capítulo **2 Limites e Continuidade**. ■

Esta condição necessária e suficiente para a existência de derivada de uma função num ponto é muito útil. Quando uma das duas derivadas laterais não existe ou existindo ambas são diferentes, concluímos que a função não tem derivada no ponto.

Suponhamos agora que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 = a$  ou  $x_0 = b$ . Nestes casos particulares, introduzimos a seguinte definição de derivada de  $f$  nesses pontos:

**Definição 3.1.4 — Derivação em intervalos fechados.** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 = a$  ou  $x_0 = b$ . Se existirem os limites,

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ f'_-(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x} \end{aligned}$$

temos  $f'(a) = f'_+(a)$  e  $f'(b) = f'_-(b)$ .

■ **Exemplo 3.4 — Derivadas laterais finitas e diferentes.** A função definida por  $f(x) = |x - 4|$  não tem derivada em  $x_0 = 4$  porque as derivadas laterais são diferentes:

$$f'_+(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{|x - 4|}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4}{x - 4} = 1; \quad (3.1)$$

$$f'_-(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|x - 4|}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-(x - 4)}{x - 4} = -1. \quad (3.2)$$

■ **Exemplo 3.5 — Derivadas laterais finitas ou infinitas.** A função  $f$ , estudada em detalhe no **Exemplo 3.2 & Exemplo 3.3**, não é diferenciável em  $x_0 = 0$  apesar de ter derivada nesse ponto ( $f'(0) = +\infty$ ). Porém, a igualdade

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

é sempre satisfeita, para todo o  $x_0 \in \mathbb{R}$ . ■

No próximo desafio pretende-se que consolide o aprendeu nesta subsecção e, em paralelo, que reveja alguns dos conceitos estudados na subseção **2.1.3 Assíntotas** do capítulo **2 Limites e Continuidade**.

**Desafio 3.1 — Existência de Derivada vs. Assíntotas verticais.** Para a funções  $f$  e  $g$  definidas por

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \text{ e } g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}},$$

respectivamente, classifique as afirmações abaixo de verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), justificando sucintamente:

1.  $f$  e  $g$  são contínuas em  $x_0 = -1$ ;
2.  $x_0 = -1$  é uma assíntota vertical de  $g$ ;
3.  $f'_-(-1) = -\infty$ ;
4.  $f'(-1) = -\infty$ .

### 3.1.3 Diferenciabilidade vs. Continuidade

**Teorema 3.1.2 — Diferenciabilidade implica continuidade.** Se  $f$  é diferenciável em  $x_0$  então  $f$  é contínua em  $x_0$ .

*Ideia de demonstração.* Assumindo que  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ , segue pelas propriedades envolvendo limites que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= f'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

como pretendido. ■



O **Teorema 3.1.2** é equivalente a se afirmar que **toda a função descontínua num ponto não é diferenciável nesse ponto**.

■ **Exemplo 3.6 — Descontinuidade implica não-diferenciabilidade.** A função

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) & \text{se } x \neq -\sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{6} & \text{se } x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

é descontínua num ponto.

Observe que temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \overbrace{\arctan(x)}^{\text{é contínua}} \\ &= \arctan(-\sqrt{3}) \\ &= -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{e } f(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}.$$

Deste modo podemos imediatamente concluir que  $f$  não é diferenciável em  $x_0 = -\sqrt{3}$ . ■

**Desafio 3.2 — Vide Exemplo 2.12.** Determine para que valores de  $L$  a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsec}(x) & \text{se } x \neq -2 \\ L & \text{se } x = -2 \end{cases}$$

não é diferenciável em  $x_0 = -2$ .



Ressalvamos ainda, com base no **Exemplo 3.4** e no **Exemplo 3.5**, que **uma função pode ser contínua mas não ser diferenciável no mesmo ponto**.

Outros exemplos análogos podem ser construídos p.e. com recurso a translações e transformações modulares de funções exponenciais e logarítmico.

■ **Exemplo 3.7 — Continuidade não implica diferenciabilidade.** Consideremos  $a \in \mathbb{R}$  e  $f$  e  $g$  tais que  $f(x) = e^{-|x-a|}$  e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 & \text{se } x \leq a \\ (x-a) \ln(x-a) & \text{se } x > a \end{cases}$$

É fácil de verificar  $f$  é contínua em  $x_0 = a$  mas não diferenciável em  $x_0 = a$ .

Esta última conclusão decorre facilmente do limite notável ilustrado no **Exemplo 2.21** do capítulo 2 **Limites e Continuidade** de que as derivadas laterais em  $x_0 = a$  existem mas não coincidem.

De facto, fazendo a substituição  $h = x - a$ , obtemos

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1, \quad f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{-h} = -1.$$

Por outro lado, a função  $g$  é contínua em  $x_0 = a$  mas não diferenciável em  $x_0 = a$ .

A conclusão da continuidade segue da sequência de igualdades

$$g(a) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} (x^2 - a^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a) \ln(x-a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para o cálculo do último limite lateral ( $x \rightarrow a^+$ ), podemos aplicar o **Corolário 2.1.10** do Teorema do Enquadramento – vide **Teorema 2.1.9** do capítulo 2 **Limites e Continuidade** – com base na desigualdade<sup>1</sup>

$$0 < (x-a) \ln(x-a) \leq (x-a)^2, \quad \text{para todo o } x > a,$$

ou alternativamente a regra de L'Hôpital – como iremos ver mais adiante.

Para verificar que  $f$  não é diferenciável em  $x_0 = a$ , bastaria verificar, com recurso ao gráfico da função  $x \mapsto \ln(x)$  – vide **Exemplo 2.10** do capítulo 2 **Limites e Continuidade** – que  $g'(a)$  não pode ser determinada, uma vez que o gráfico de  $x \mapsto g'(x)$  exibe uma assíntota vertical de equação  $x = a$ . Esta conclusão segue do cálculo de  $g'_+(a)$ :

$$\begin{aligned} g'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a) \ln(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

■

<sup>1</sup>É fácil de verificar graficamente que o gráfico de  $y = \ln(x)$  se situa sempre abaixo do gráfico de  $y = x^2$ , para valores de  $x > 0$ . Fazendo uma translação na horizontal de ambos os gráficos, obtemos a desigualdade  $\ln(x-a) \leq (x-a)^2$ , para todo o  $x > a$ .

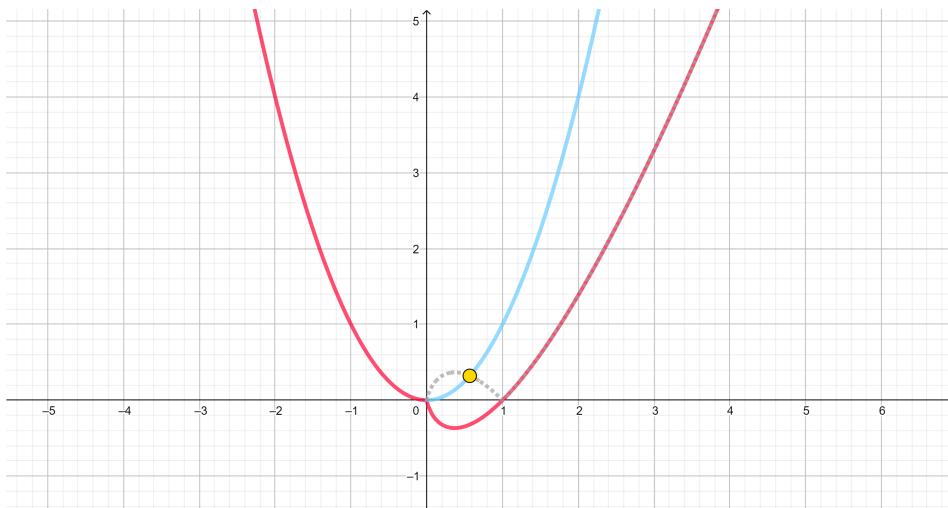


Figura 3.1: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.7** para  $a = 0$ . A magenta encontra-se representado a função  $g$ , e a azul ciano a parábola de equação  $y = x^2$  (apenas para valores de  $x > 0$ ). É fácil de verificar, via a representação gráfica, que  $g(x) \leq x^2$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . No entanto, se considerarmos a função modular  $x \mapsto |g(x)|$ , a desigualdade  $|g(x)| \leq x^2$  apenas é satisfeita para valores de  $x$  em intervalos da forma  $]-\infty, 0] \cup [x_0, +\infty[$ . Na figura,  $x_0$  corresponde à abcissa de  $(x_0, y_0)$  – a laranja – dada interseção entre os gráficos de  $y = |g(x)|$  e  $y = x^2$  ( $x > 0$ ). Adicionalmente, incluímos o gráfico pontilhado a cinza para ilustrar a reflexão modular de  $x \mapsto |g(x)|$  no intervalo  $[0, 1]$ .

**Desafio 3.3 — Revisão dos Teoremas de Bolzano e Weierstrass.** Com base no gráfico ilustrado no **Exemplo 3.7** diga, justificando em qual dos intervalos abaixo:

$$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \text{ ou } [\frac{3}{4}, 1]$$

a equação

$$x^2 = x \ln(x)$$

admite uma solução. De seguida, justifique que a solução é única.

**Desafio 3.4 — Teste os seus conhecimentos sobre derivadas laterais e diferenciabilidade.**

Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando sucintamente:

1. Se  $f'(x_0)$  existe para  $x_0 \in D_f$ , então  $f$  é diferenciável;
2. Se  $x_0 \notin D_f$ , então  $f$  não é diferenciável em  $x_0$ ;
3. Se  $f'_+(x_0) = -\infty$  e  $f'_-(x_0) = -\infty$  para  $x_0 \in D_f$ , então  $f'(x_0)$  existe;
4. Se  $f$  não é contínua em  $x_0 \in D_f$ , então  $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ ;
5. Se  $x = x_0$  é uma assímpota ao gráfico de  $f$ , então  $f$  não é diferenciável em  $x_0$ ;
6. Se para  $x_0 \in D_f$  se tem  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ , então  $f$  é diferenciável em  $x_0$ ;
7. Se para  $x_0 \in D_f$  se tem  $f'_+(x_0) = -\infty$  e  $f'_-(x_0) = +\infty$ , então  $|f'(x_0)| = +\infty$ ;
8. Se para  $x_0 \in D_f$  se tem  $|f'(x_0)| = +\infty$ , então  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$ .

### 3.1.4 Interpretação Geométrica do Conceito de Derivada

#### Diferenciabilidade vs. equação da recta tangente

Para interpretar geometricamente o conceito de derivada de uma função  $f$  num ponto  $x_0$ , começemos por observar a dicotomia entre a noção de diferenciabilidade de  $f$  em  $x_0$  e a equação da recta tangente,

dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Primeiramente, observe que a noção de diferenciabilidade introduzida via **Definição 3.1.1** permite-nos obter a equivalência

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Segue então pela **unicidade do limite** –vide **Teorema 2.1.2** do **Capítulo 2 Limites e Continuidade** – que a recta afim

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

de declive  $m$  e ordenada na origem  $b = y_0 - mx_0$  que satisfaz a condição de limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - y_0 - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

é precisamente a recta de equação

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Adicionalmente, tomando  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$  segue para  $y = f(x)$  que a razão incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  é o declive da recta [secante] ao gráfico de  $f$  que passa pelos pontos  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , pelo que não é surpreendente afirmar que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é precisamente o declive da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P = (x_0, f(x_0))$ . Assim sendo, é fácil escrever a equação dessa recta sabendo que tem declive  $m = f'(x_0)$  e passa pelo ponto de tangência  $P = (x_0, f(x_0))$ .

**Notação 3.1 — Notação de Leibniz para derivada.** É também comum adoptar a notação de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

para descrever  $f'(x)$  como o limite infinitesimal ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) da razão incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

### Derivadas infinitas vs. assímpotas verticais

Note que a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, f(x_0))$  é, por construção, uma **recta não-vertical**. No caso em que as derivadas laterais de  $f$  são infinitas em  $x_0$  então a recta tangente é vertical e tem equação  $x = x_0$ . Esta corresponde essencialmente a uma **assímpota vertical ao gráfico da função derivada**  $x \mapsto f'(x)$ .

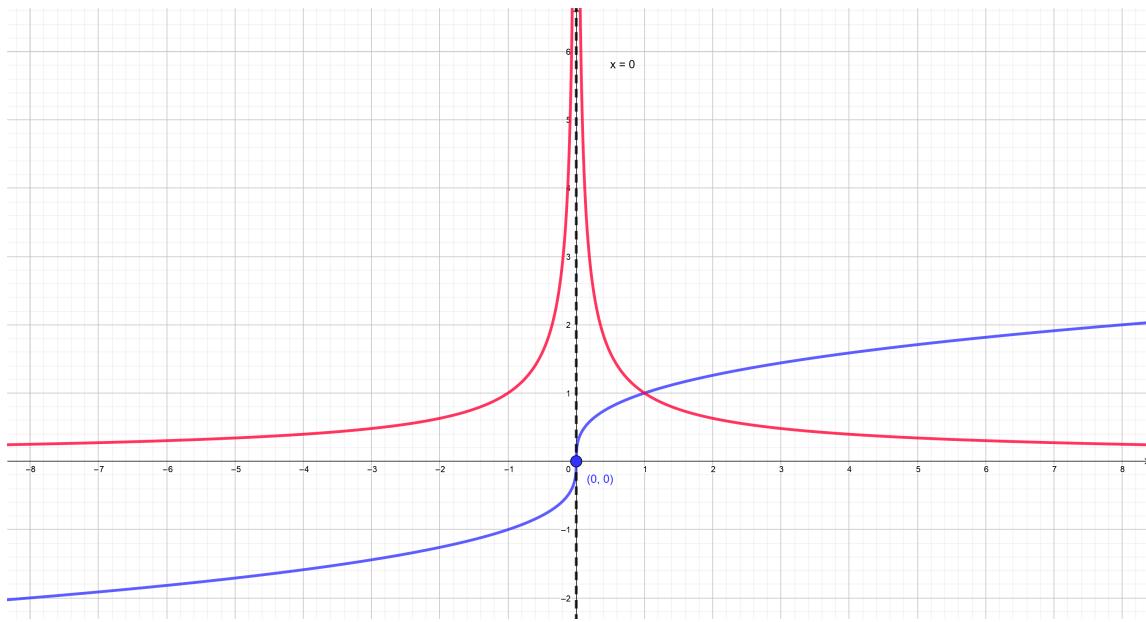


Figura 3.2: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.2**. A azul encontra-se representado o gráfico a função  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , a magenta o gráfico da função  $f'$  definida por  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ , e a tracejado a recta vertical  $x = 0$  (eixo  $Oy$ ).

É fácil de verificar graficamente que  $f'(0) = +\infty$  – declive da recta tangente em  $x_0 = 0$  – decorre do facto do limite da função  $f'$  em  $x_0 = 0$  ser igual a  $+\infty$ .

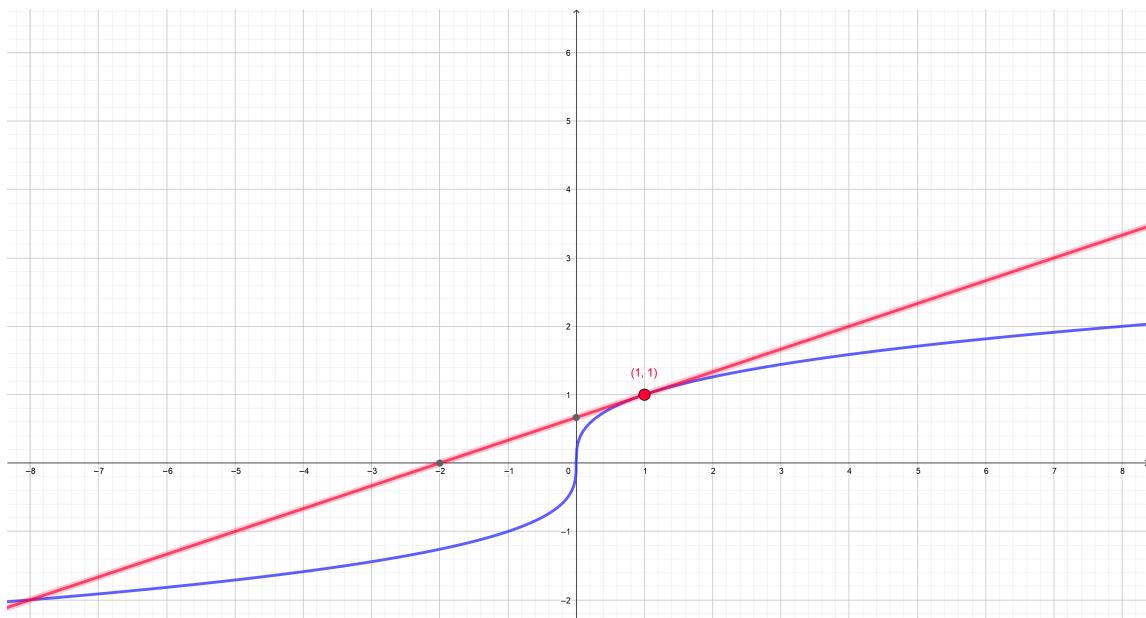


Figura 3.3: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.3**. A azul encontra-se representado o gráfico a função  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , a magenta o gráfico a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1,1)$ .

O facto gráfico da recta tangente supramencionada ser não vertical decorre do facto de  $f'(1) = \frac{1}{3} \neq 0$ .

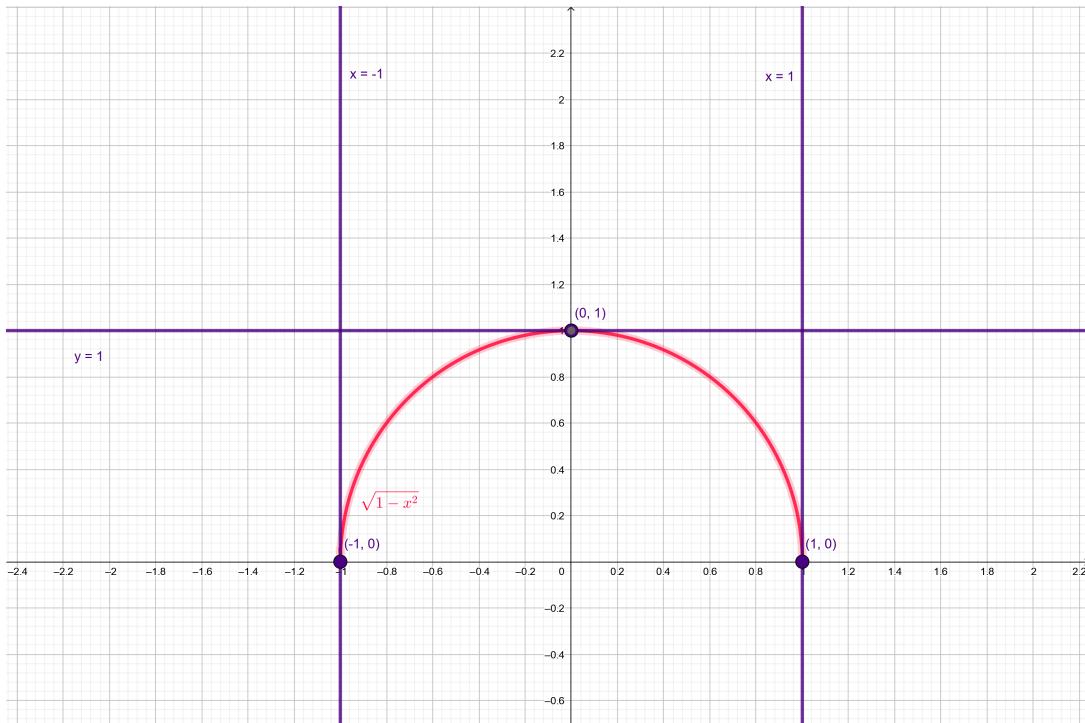


Figura 3.4: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.8**. A magenta encontra-se traçado o gráfico de  $f$ , e a roxo as rectas tangentes ao gráfico de  $f$  nos pontos  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(-1, 0)$ .

É fácil de verificar graficamente que  $f$  não é diferenciável em  $x = \pm 1$ , atendendo a que as rectas tangentes nos pontos da forma  $(\pm 1, 0)$  são verticais.

■ **Exemplo 3.8 — Rectas tangentes horizontais e verticais.** Consideremos a função  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

Com base no gráfico de  $f$ , podemos verificar facilmente que a recta horizontal  $y = 1$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, 1)$ .

De facto, a sequência de igualdades

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - (\Delta x)^2} - 1}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x (\sqrt{1 - (\Delta x)^2} + 1)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\sqrt{1 - (\Delta x)^2} + 1} \\
 &= \frac{0}{2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

permite-nos concluir que a recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, 1)$  tem declive  $m = 0$ .

Adicionalmente, temos que não é diferenciável em  $x = \pm 1$ , dado que<sup>2</sup>

$$f'_+(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - (\Delta x)^2}}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{|\Delta x|} - 1} = +\infty$$

<sup>2</sup>No cálculo dos limites, usámos as igualdades  $|\Delta x| = \Delta x$  ( $\Delta x > 0$ ),  $|\Delta x| = -\Delta x$  ( $\Delta x < 0$ ) &  $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x)^2}$ .

e

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - (\Delta x)^2}}{-|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} -\sqrt{\frac{1}{|\Delta x|} - 1} = -\infty.$$

Para o caso desta função podemos verificar que  $x = \pm 1$  são assíntotas verticais ao gráfico de  $x \mapsto f'(x)$ , de declive  $f'(-1) = +\infty$  e  $f'(1) = -\infty$ , uma vez que  $x_0 = \pm 1$  são pontos extremos do domínio  $D_f = [-1, 1]$  (intervalo fechado) – vide **Definição 3.1.4**. ■

**Desafio 3.5 — Teste os seus conhecimentos sobre interpretação geométrica do conceito de derivada.**

Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando sucintamente:

1.  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  é a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$ , desde que  $f'(x_0)$  exista;
2.  $y = mx + b$  é a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$ , então  $f$  é diferenciável em  $x_0 \in D_f$ ;
3.  $y = mx + b$  é a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ , então  $b = y_0$ ;
4. Se  $f$  não é contínua em  $x_0 \in D_f$ , então o gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  não admite recta tangente;
5. Se  $f$  é contínua em  $x_0 \in D_f$ , então o gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  não admite recta tangente;
6. Se  $x = x_0$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ , então o gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  não admite recta tangente;
7. Se  $D_f = [a, b]$ , então  $f'_+(a)$  é o declive da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ ;
8. Se  $f$  é diferenciável em  $x_0 = b$  e  $D_f = [a, b]$ , então  $f'_-(b)$  é o declive da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(b, f(b))$ .

## 3.2 Derivadas de funções elementares

**Definição 3.2.1 — Função Derivada de ordem 1.** Sejam  $f$  uma função de domínio  $D_f$  e  $A \subseteq D_f$ . Diz-se que  $f$  é diferenciável em  $A$  se tem derivada finita em todos os pontos de  $A$ . Definimos a função primeira derivada através de  $x \mapsto y = f'(x)$ , onde  $A = \{x \in D_f : f'(x) \in \mathbb{R}\}$ .



É evidente que:

- A **derivada da função constante**,  $x \mapsto f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  é a função nula dada por  $f'(x) = 0$ .
- A **derivada da função identidade**,  $x \mapsto i(x) = x$ , é a função constante dada por  $i'(x) = x' = 1$ .

Usando a Definição obtemos respectivamente

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

$$i'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , logo ambas as funções são diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ .

**Notação 3.2 — Diferenciabilidade vs. função derivada.** Sempre que nos referimos à diferenciabilidade de  $f$  em  $x_0$ , iremos recorrer às notações

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

No caso de pretendermos definir a função derivada  $x \mapsto f'(x)$ , iremos recorrer à notação

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

sempre que pretendemos definir a função derivada via o limite da razão incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , sendo

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Este tipo de nomenclatura para a notação de derivada é muito útil para obter, em particular, modelações matemáticas envolvendo quantidades económicas como são o custo marginal e a função de elasticidade, como iremos abordar mais à frente na seção **3.8 Aplicações: Taxas de Variação em Economia**.

### 3.2.1 Operações envolvendo derivadas

**Teorema 3.2.1 — Linearidade da derivada.** Se  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $x$ , então:

- i) **Derivada da Soma:** a função  $f + g$  é diferenciável em  $x$  e

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

- ii) **Derivada do produto duma constante por uma função:** se  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante então a função produto  $kf$  é diferenciável em  $x$  e

$$[kf(x)]' = kf'(x).$$

■ **Exemplo 3.9** Consideremos a função afim  $f, x \mapsto f(x) = mx + b$ , com  $m \in \mathbf{R}$  e  $b \in \mathbf{R}$  constantes. Vejamos que é uma função diferenciável em  $\mathbf{R}$  e

$$f'(x) = (mx + b)' = (mx)' + (b)' = mx' + 0 = m$$

para todo  $x \in \mathbf{R}$ . ■

**Teorema 3.2.2 — Regras de derivação.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções diferenciáveis em  $x$ . Então:

- i) **Derivada do Produto:** a função  $fg$  é diferenciável em  $x$  e

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- ii) **Derivada do Quociente:** se  $g(x) \neq 0$ , a função  $f/g$  é diferenciável em  $x$  e

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$



Em particular, da alínea ii) do **Teorema 3.2.2** segue que a derivada da função recíproca de  $g$  é dada por

$$\left( \frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

■ **Exemplo 3.10 — Derivada da função potência.** Seja  $m \in \mathbb{Z}$  e  $m \neq 0$ . Consideremos a função potência de expoente inteiro definida por  $g_m(x) = x^m$ . Se  $m > 1$ , segue então pela sequência de igualdades obtidas a partir do binómio de Newton:

$$\begin{aligned}(x+h)^m &= \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} x^{m-j} h^j \\ &= x^m + \sum_{j=1}^m \binom{n}{j} x^{m-j} h^j \\ &= x^m + mh x^{m-1} + \frac{m!}{2!(m-2)!} h^2 x^{m-2} + \dots + mh^{m-1} x + h^m\end{aligned}$$

que  $(x^m)' = mx^{m-1}$ , dado que

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( mx^{m-1} + \frac{m!}{2!(m-2)!} h x^{m-2} + \dots + mh^{m-2} x + h^{m-1} \right) \\ &= mx^{m-1}.\end{aligned}$$

No caso de  $m < 0$ , tem-se que  $m = -n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Usando a regra da derivada da função recíproca – vide alínea ii) do **Teorema 3.2.2** – vem

$$(x^{-n})' = \left( \frac{1}{x^n} \right)' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

para  $x \neq 0$ . ■

**Desafio 3.6 — Falha na regra de derivação**  $\left( \frac{f}{g} \right)'$ . A função

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

já abordada no **Exemplo 1.44** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** pode ser expressa como quociente entre funções, sendo que a função em denominador ( $x \mapsto 1+|x|$ ) não é diferenciável em  $x_0 = 0$ . Sendo assim:

1. Averigue se esta é diferenciável em todos os pontos do seu domínio e, em caso afirmativo, calcule a sua derivada.
2. Diga, justificando, o que pode concluir sobre a regra  $\left( \frac{f}{g} \right)'$  no caso de pelo menos menos uma das funções ser diferenciável.

### 3.2.2 Derivadas da função composta e da função inversa

#### Derivada da função composta

**Teorema 3.2.3 — Derivada da Função Composta.** Se  $g$  é diferenciável em  $x \in D_g$  e  $g$  é diferenciável em  $g(x) \in D_f$  então  $f \circ g$  é diferenciável em  $x$  e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

#### Derivada da função inversa

Antes de introduzirmos a derivada da função inversa, consideremos o seguinte problema geométrico, análogo ao estudado no **Exemplo 1.3** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**.

■ **Exemplo 3.11 — Tangente à circunferência.** Para a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$  – vide **Exemplo 1.9** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** – é possível verificar que as curvas de equações  $y = \sqrt{1 - x^2}$  ( $y \geq 0$ ) e  $y = -\sqrt{1 - x^2}$  definem gráficos de funções.

Por outro lado, assumindo que  $y = f(x)$  na equação da circunferência – estamos apenas a assumir que é possível definir  $y$  como função de  $x$  – obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + f(x)^2 = 1 &\implies (x^2 + f(x)^2)' = 0 \\ &\iff 2x + 2f'(x)f(x) = 0. \end{aligned}$$

Desta última equação segue que  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$  é igual a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \text{para } y = f(x),$$

desde que  $y \neq 0$ .

Em particular, podemos concluir que para  $x = \pm 1$  não é possível determinar  $f'(-1)$  e  $f'(1)$  para ambas as funções, indo ao encontro do que já tinha sido verificado no **Exemplo 3.8** via limites laterais.

Em concreto, para  $y = f(x)$ , é possível concluir, com base no cálculo dos limites laterais<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left( -\frac{x}{f(x)} \right) \\ f'_-(a) &= \lim_{x \rightarrow a^-} \left( -\frac{x}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

que  $f'_+(-1)$  e  $f'_-(-1)$  dão infinito. Daqui se retira que

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1$$

definem assímpotas verticais aos gráficos de ambas as funções. ■

**Teorema 3.2.4 — Derivada da Função Inversa.** Suponha que  $f : D \rightarrow D'$  tem inversa, i.e.,

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

para todo  $x \in D'$  e para todo  $y \in D$ .

Se  $f$  é diferenciável em  $y$  e  $f'(y) \neq 0$ , então  $f^{-1}$  é diferenciável em  $x$  e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

*Demonstração usando o Teorema 3.2.3.* Note-se que a função  $g = f^{-1}$  está nas condições do **Teorema 3.2.3**.

Logo,

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x).$$

Por outro lado, substituindo  $g = f^{-1}$  no item **(ii)** da **Definição 1.4.5** – vide subseção **1.4.5** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráfico** – segue que

$$(f \circ f^{-1})(x) = x.$$

<sup>3</sup>Note que embora não seja possível calcular  $f'(-1)$  e  $f'(1)$  com base na fórmula  $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$ , é possível determinar  $f'_+(-1)$  e  $f'_-(-1)$

Desta última igualdade, retiramos que a equação anterior é equivalente a

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x).$$

Finalmente, da hipótese  $f'(y) \neq 0$  conclui-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

como pretendido. ■

Em alternativa, apresentamos outra prova.

*Demonstração usando a notação de Leibniz.* Suponhamos, com base na equivalência

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

que

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

define  $f'(y)$  – derivada de  $f$  em função da variável  $y$ .

Para mostrarmos que  $(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx}$  existe, observe, com base no **Teorema 3.1.2**, que  $y \mapsto f(y)$  é uma função contínua em  $D'$ .

Em particular, para  $\Delta x := f(y + \Delta y) - f(y)$ , obtemos

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(y + \Delta y) = f(y) \iff \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$$

Desta última equivalência segue que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

pode ser reescrito como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Finalmente, com base nas propriedades dos limites enunciadas no **Teorema 2.1.8** do capítulo **2 Limites e Continuidade**, concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

desde que  $f'(y) = \frac{dx}{dy} \neq 0$ . ■



A última demonstração do **Teorema 3.2.4** permite-nos facilmente concluir para o caso da representação da equação  $x = \sqrt{1 - y^2}$  no primeiro quadrante de  $xOy$ , com exceção do ponto  $(1, 0)$  que

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Portanto, para  $y = \sqrt{1 - x^2}$  obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

é a derivada da função  $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , para  $0 \leq x < 1$ .

■ **Exemplo 3.12 — Função cúbica do Exemplo 1.45.** A função cúbica  $x \mapsto p_3(x) = x^3 + 27$  admite inversa pois é monótona crescente. É fácil de averiguar que

$$y = 27x + 81$$

nos dá a equação da recta tangente ao gráfico de  $p_3$  no ponto  $(-3, 0)$ .

Adicionalmente, aplicando apenas o **Teorema 3.2.4**, podemos verificar que o declive da recta tangente do gráfico de  $(p_3)^{-1}$  em  $(0, -3)$  é dado pela sequência de igualdades

$$((p_3)^{-1})'(0) = \frac{1}{p_3'(-3)} = \frac{1}{27}.$$

Portanto,  $y = -3 + \frac{1}{27}x$  dá-nos a equação da recta tangente ao gráfico de  $(p_3)^{-1}$  em  $(0, -3)$ . ■

Na prática, recorremos ao seguinte resultado para determinar a equação da recta tangente ao gráfico de  $f^{-1}$ .

**Corolário 3.2.5 — Equação da recta tangente ao gráfico de  $f^{-1}$ .** Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto do gráfico de  $f$ , e  $f$  uma função invertível e diferenciável que satisfaz a condição  $f'(x_0) \neq 0$ . Então

$$y = x_0 + \frac{1}{f'(x_0)}(x - y_0)$$

dá-nos a equação da recta tangente ao gráfico de  $f^{-1}$  no ponto  $(y_0, x_0)$ .



Já tínhamos visto na subseção 1.4.5 do capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos que se  $(x_0, y_0)$  é ponto do gráfico de  $f$ :

$$(x_0, f(x_0)) = (x_0, y_0)$$

e  $f$  é invertível, então  $(y_0, x_0)$  é um ponto do gráfico de  $f^{-1}$ :

$$(y_0, f^{-1}(y_0)) = (y_0, x_0).$$

Com o **Corolário 1.4.5** acrescentámos que podemos calcular a recta tangente ao gráfico de  $f^{-1}$ , a partir da equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  – i.e. sem precisar de calcular  $f^{-1}$ .

Adicionalmente, usando o que se aprendeu na subsecção 1.1.2 Rectas: equações de rectas do capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos é ainda possível determinar a recta normal ao gráfico da função  $f$ , e relacionar com a derivada da função inversa.

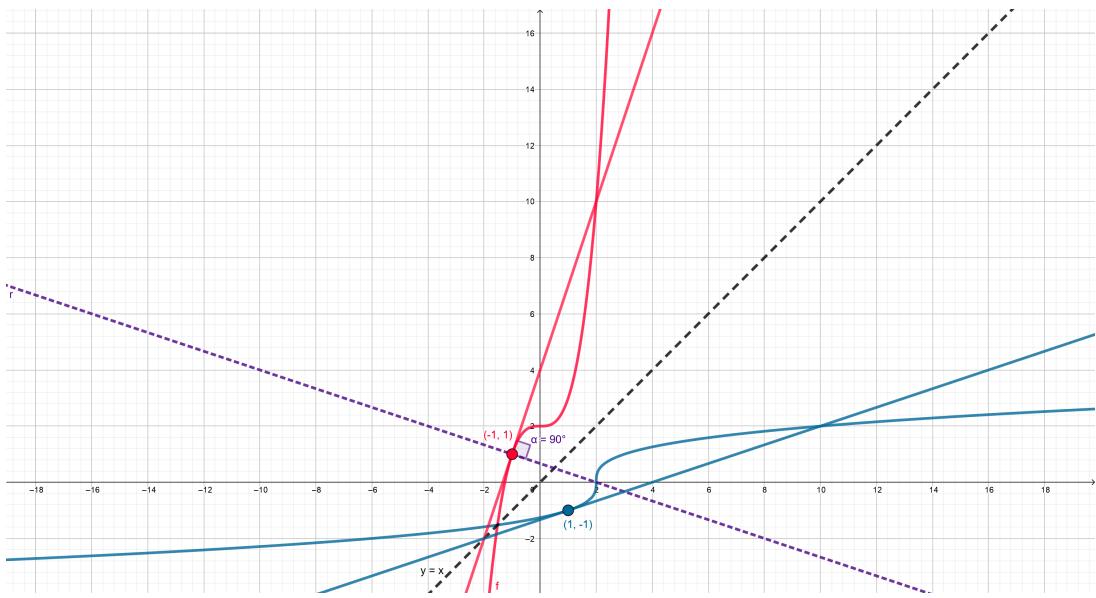


Figura 3.5: Ilustração do **Corolário 3.2.5 & Corolário 3.2.6**. Na figura encontra-se representado o gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = x^3 + 2$  (a magenta) e da sua inversa (a azul), obtida por reflexão do gráfico de  $f$  relativamente ao gráfico.

É fácil de verificar que o **Corolário 3.2.5** permite-nos, de facto, determinar a equação da recta tangente ao gráfico de  $f^{-1}$  em  $(1, -1)$ :

- (i) A partir da equação da recta tangente ao gráfico de  $f$ ;
- (ii) sem conhecer a expressão analítica da função  $f^{-1}$ .

Esta representação gráfica ilustra também a possibilidade de determinar o declive equação do gráfico tangente a  $f$  em  $(x_0, y_0)$  a partir do equação da recta normal ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  – ilustrado com tracejado a roxo – e vice-versa.

**Corolário 3.2.6 — Equação da recta normal ao gráfico de  $f$ .** Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto do gráfico de  $f$ , e

$$y = mx + b$$

a **equação da recta tangente** ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ , com  $m \neq 0$ . Então:

- A **equação da recta normal** ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é dada por

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

- $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{m}$  é o **declive da recta tangente** ao gráfico de  $f^{-1}$  no ponto  $(y_0, x_0)$ .

■ **Exemplo 3.13 — Interpretação geométrica dos conceitos de recta normal e tangente.**

No **Exemplo 1.3** do capítulo 1 **Funções Elementares e Gráficos** verificámos que a recta, de equação  $-3x + 4y = 22$ , é tangente ao gráfico da circunferência definida implicitamente por

$$(x - 1)^2 + y^2 = 25$$

em  $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ .

Assim, sendo  $f(x) = \sqrt{25 - (x - 1)^2}$  a expressão analítica da função  $f$  que define a semicircunferência situada acima do eixo  $Ox$ , e  $(x_0, y_0) = (-2, 4)$  um ponto do gráfico de  $f$ , podemos concluir que com recurso ao **Corolário 3.2.6** o seguinte:

- $y = 4 - \frac{4}{3}(x + 2) \iff 4x + 3y = 4$  é a equação da recta normal ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ , dado que  $m = \frac{3}{4}$  é o declive da recta tangente de  $f$  em  $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ ;
- $y = -2 + \frac{4}{3}(x - 4) \iff -4x + 3y = -22$  é a equação da recta tangente ao gráfico de  $f^{-1}$  no ponto  $(y_0, x_0) = (4, -2)$ .

■

**Desafio 3.7 — Equações das rectas tangente e normal.** Determine a equação das rectas tangente e normal à circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  em pontos da forma

$$(x_0, y_0) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (\pi < \theta < 2\pi).$$

No caso de  $f$  ser implicitamente definida a partir da equação da circunferência, dada acima, o que podemos concluir sobre  $(f^{-1})'(\sin(\theta))$ ?

**Desafio 3.8 — Teste os seus conhecimentos sobre derivação da função inversa.**

Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando sucintamente:

1. Se  $(x_0, y_0)$  é um ponto do gráfico de  $f$  e  $f'(x_0)$  existe, então  $(f^{-1})'(y_0)$  também existe;
2. Se  $(x_0, y_0)$  é um ponto do gráfico de  $f$  e  $f$  é diferenciável em  $x_0$ , então  $f^{-1}$  é diferenciável em  $y_0$ ;
3. Se  $(x_0, y_0)$  é um ponto do gráfico de  $f$  e  $f$  é diferenciável em  $x_0$ , então  $(f^{-1})'(y_0)$  também existe;
4. Se  $(x_0, y_0)$  é um ponto do gráfico de  $f$  e  $f^{-1}$  é diferenciável em  $y_0$ , então  $m = -(f^{-1})'(y_0)$  é o declive da recta normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ ;
5. Se  $y = y_0$  é a equação da recta tangente de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ , então  $(f^{-1})'(y_0)$  não existe  $y_0$ ;
6. Se  $y = y_0$  é a equação da recta tangente de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ , então  $f^{-1}$  não é diferenciável em  $y_0$ ;
7. Se para um ponto  $(x_0, y_0)$  do gráfico de  $f$  se tem  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ , então  $f^{-1}$  é diferenciável em  $y_0$ ;
8. Se  $x = x_0$  é a recta normal ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ , então  $(f^{-1})'(y_0) = 0$ , desde que a derivada  $(f^{-1})'$  exista.

### 3.2.3 Derivadas de potências

■ **Exemplo 3.14 — Função Radical.** Seja  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \neq 1$ . Consideremos a função radical de índice  $n$  definida por  $g_n(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ .

Reparemos que se  $n$  é ímpar então  $D = D' = \mathbb{R}$ , mas se  $n$  é par então  $D = D' = [0, +\infty]$ . Em ambos os casos,  $g_n$  é injetiva, logo tem inversa. A sua inversa,  $(g_n)^{-1}$ , verifica

$$y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n$$

para todo  $x \in D$  e para todo  $y \in D'$ . Aplicando o teorema vem

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

desde que  $x \neq 0$ . De seguida, mostramos que  $g_n$  não é diferenciável em  $x_0 = 0$ . De facto, pela definição obtemos

$$(g_n)'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[n]{\Delta x} - 0}{h\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta x^{1-1/n}} = +\infty \quad ; (g_n)'_-(0) = -\infty.$$

Assim, concluímos que  $g_n$  é diferenciável em  $\mathbb{R} - \{0\}$ . ■

■ **Exemplo 3.15 — Função Potência.** Seja  $n, m \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{mdc}(m, n) = 1$  e  $n \neq 1$ . Consideremos a função potência de expoente racional definida por  $h_{m,n}(x) = x^{m/n}$ .

Observe que  $h_{m,n}$  pode ser escrita na forma de função composta. Tomando  $f_m(x) = x^m$  e  $g_n(x) = x^{1/n}$  temos

$$h_{m,n}(x) = (f_m \circ g_n)(x)$$

Usando o **Teorema 3.2.3** obtemos

$$\begin{aligned} h'_{m,n}(x) &= m(x^{1/n})^{m-1} \frac{1}{n} x^{1/n-1} \\ &= \frac{m}{n} x^{(m-1)/n+1/n-1} \\ &= \frac{m}{n} x^{m/n-1} \end{aligned}$$

■

### 3.2.4 Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

**Teorema 3.2.7 — Derivadas de funções exponenciais.** A função exponencial de base  $a$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , definida por  $f(x) = a^x$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$(a^x)' = (\ln a)a^x.$$

*Demonstração usando limite notável do Exemplo 2.21.* Consideremos  $x \mapsto y = e^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Comecemos por determinar a sua derivada pela definição

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \end{aligned}$$

Usando o **Teorema 3.2.3** vem

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (x \ln a)' e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$$

■

**Desafio 3.9** Para as funções hiperbólicas introduzidas na subseção **1.5.5 Funções Hiperbólicas** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** satisfazem as seguintes regras de derivação:

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad ; \quad (\cosh x)' = \sinh x.$$

De seguida use as regras de derivação acima deduzidas para calcular a derivada das funções

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

usando a 'derivada do quociente' – vide **Teorema 3.2.2**.

**Teorema 3.2.8 — Derivadas de funções logarítmicas.** A função logarítmica de base  $a$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , definida por  $\log_a |x|$  é diferenciável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

*Demonstração.* Por definição, temos

$$y = \ln x \iff x = e^y$$

para todo  $x > 0$  e  $y \in \mathbb{R}$ . Recorrendo ao **Teorema 3.2.4** vem

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

para  $x > 0$ . Utilizando a fórmula de mudança de base

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \left( \frac{1}{\ln a} \right) \ln x$$

obtemos

$$(\log_a x)' = \left( \frac{1}{\ln a} \right) (\ln x)' = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

para  $x > 0$ . A demonstração para  $x < 0$  deixamos a cargo do leitor. ■

**Teorema 3.2.9 — Derivada da função exponencial-potência.** Se  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $x$  e  $f(x) > 0$  então a função exponencial-potência,  $x \mapsto h(x) = [f(x)]^{g(x)}$ , é diferenciável em  $x$  e

$$h'(x) = [g'(x)f(x) \ln(f(x)) + g(x)f'(x)] [f(x)]^{g(x)-1}$$

Com efeito, consideremos

$$\ln(h(x)) = g(x) \ln(f(x))$$

Derivando membro a membro vem

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ou seja, substituindo  $h(x)$  temos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[ g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right] h(x) \\ &= [g'(x)f(x) \ln(f(x)) + g(x)f'(x)] [f(x)]^{g(x)-1} \end{aligned}$$



A regra de derivação acima diz-nos essencialmente que, escrevendo a função exponencial potência  $f(x)^{g(x)}$  na forma

$$f(x)^{g(x)} = e^{u(x)}, \quad \text{com} \quad u(x) = g(x) \ln(f(x))$$

então

$$(f(x)^{g(x)})' = u'(x)f(x)^{g(x)}.$$

**Notação 3.3 — Derivada logarítmica.** À derivada  $\frac{h'(x)}{h(x)}$  associada à logaritmização da função potência:

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)} \xrightarrow{u(x)=\ln(h(x))} u(x) = g(x) \ln(f(x))$$

designamos por derivada logarítmica. O nome desta derivada advém da regra de derivação

$$(\ln|h(x)|)' = \frac{h'(x)}{h(x)}.$$

**Desafio 3.10 — Aplicabilidade da derivada logarítmica.** Calcule a derivada de  $\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2 + 1}$  usando as seguintes regras de derivação:

1. Via 'derivada do quociente';
2. Via derivada logarítmica.

Em qual dos processos o cálculo de derivação lhe pareceu mais eficiente?

### 3.2.5 Derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas

As derivadas das funções trigonométricas seno e cosseno podem ser deduzidas via a definição de derivada, combinando o limite notável do **Exemplo 2.20** do Capítulo 2 **Limites e Continuidade**:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

com as regras de adição/subtração:

$$\begin{aligned} \sin(x + \Delta x) &= \sin(x) \cos(\Delta x) + \cos(x) \sin(\Delta x) \\ \cos(x + \Delta x) &= \cos(x) \cos(\Delta x) - \sin(x) \sin(\Delta x). \end{aligned}$$

A técnica de demonstração é análoga à técnica de cálculo de limite utilizada no **Exemplo 2.22** do Capítulo 2 **Limites e Continuidade**.

Para as restantes funções trigonométricas, poderemos aplicar directamente a regra de derivção da função quociente – vide **Teorema 3.2.2**.

#### Corolário 3.2.10 — Derivadas de Funções Trigonométricas.

A função seno é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$(\sin x)' = \cos x.$$

- A função cosseno é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

- A função tangente é diferenciável em  $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  e

$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

- A função cotangente é diferenciável em  $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  e

$$(\cot x)' = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

- A função secante é diferenciável em  $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  e

$$(\sec x)' = \sec x \tan x.$$

- A função cossecante é diferenciável em  $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  e

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x.$$

Por seu turno, as derivadas das funções trigonométricas inversas, decorrem naturalmente da combinação do **Teorema 3.2.4** e das fórmulas de trigonometria

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad \text{e} \quad \tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta).$$

**Corolário 3.2.11 — Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas.**

A função arco seno é diferenciável em  $]-1, 1[$  e

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- A função arco cosseno é diferenciável em  $]-1, 1[$  e

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- A função arco tangente é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

*Derivada da função arco seno.* A função arco seno satisfaz

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y$$

para  $x \in [-1, 1]$  e  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Aplicando o teorema da derivada da função inversa vem

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

desde que  $\arcsin x \neq -\frac{\pi}{2}$  e  $\arcsin x \neq \frac{\pi}{2}$ . Tendo em conta o exercício proposto 14 segue que

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

Logo,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

desde que  $x \neq -1$  e  $x \neq 1$ .

■

*Derivada da função arco cosseno.* A função arco cosseno satisfaz

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

para  $x \in [-1, 1]$  e  $y \in [0, \pi]$ . Pelo teorema da derivada da função inversa segue que

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}$$

desde que  $\arccos x \neq 0$  and  $\arccos x \neq \pi$ . Simplificando a função composta obtemos

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Assim,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

desde que  $x \neq -1$  e  $x \neq 1$ . ■

*Derivada da função arco tangente.* A função arco tangente satisfaz

$$y = \arctan x \iff x = \tan y$$

para  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ . Recorrendo ao teorema da derivada da função inversa vem

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}$$

Atendendo a que

$$\sec^2(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2$$

obtemos

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . ■

### 3.2.6 Tabela de derivadas

A tabela de derivadas ilustrada abaixo pode ser facilmente deduzida via a regra de derivação da função composta – vide **Teorema 3.2.3**. Em alguns dos casos, foi combinado a derivação da função composta com a da função inversa – vide **Teorema 3.2.4**.

Tabela 3.1: Regras de Derivação Generalizadas

$f(x)$	$f'(x)$
$[u(x)]^p$	$p[u(x)]^{p-1}u'(x)$
$\log_a   u(x)  $	$\frac{1}{\ln a} \frac{u'(x)}{u(x)}$
$a^{u(x)}$	$u'(x)a^{u(x)} \ln a$
$\sinh(u(x))$	$u'(x) \cosh(u(x))$
$\cosh(u(x))$	$u'(x) \sinh(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x) \cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x) \sin(u(x))$
$\operatorname{tg}(u(x))$	$u'(x) \sec^2(u(x))$
$\operatorname{cotg}(u(x))$	$-u'(x) \operatorname{cosec}^2(u(x))$
$\sec(u(x))$	$u'(x) \sec(u(x)) \operatorname{tg}(u(x))$
$\operatorname{cosec}(u(x))$	$-u'(x) \operatorname{cosec}(u(x)) \operatorname{cotg}(u(x))$
$\arcsin(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arccos(u(x))$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arctg(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

## 3.3 Funções regulares

### 3.3.1 Teoremas de Rolle e Lagrange

**Definição 3.3.1 — Função regular num intervalo fechado.** Diz-se que  $f$  é regular em  $[a, b]$  se

- (i)  $f$  é contínua em  $[a, b]$ ;
- (ii)  $f$  é diferenciável pelo menos em  $]a, b[$ .

**Teorema 3.3.1 — Teorema de Rolle.** Seja  $f$  uma função regular em  $[a, b]$ . Se  $f(a) = f(b)$ , então existe pelo menos um  $x_0 \in ]a, b[$  tal que  $f'(x_0) = 0$ .

Nas condições do teorema de Rolle, a recta  $t$  tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $T = (x_0, f(x_0))$  é horizontal.

**Teorema 3.3.2 — Teorema de Lagrange.** Se  $f$  é uma função regular em  $[a, b]$ , então existe pelo menos um  $x_0 \in ]a, b[$  tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Recordemos que  $m_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  representa o declive da recta  $s$ , secante ao gráfico que passa pelos pontos  $P = (a, f(a))$  e  $Q = (b, f(b))$ . Em consequência da regularidade da função é possível traçar a recta  $t$ , tangente ao gráfico de  $f$  em qualquer ponto de abcissa  $x_0$ ,  $T = (x_0, f(x_0))$ , sendo

o seu declive dado por  $m_2 = f'(x_0)$ . O teorema garante a existência dum ponto  $T$ , para o qual as rectas  $s$  e  $t$  são paralelas, ou seja, os seus declives  $m_1$  e  $m_2$  coincidem, i.e.,  $m_1 = m_2$ .

**Desafio 3.11** Diga, justificando, se posso aplicar o **Teorema 3.3.2** à função  $x \rightarrow \sqrt[3]{x^2}$  nos intervalos  $[0, \frac{1}{2}]$  e  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Os próximos dois resultados serão aplicados recorrentemente no capítulo **4 Primitivação** quando realizarmos o cálculo de primitivas.

**Corolário 3.3.3 — Derivada da função constante.** Seja  $f$  uma função regular em  $[a, b]$ . Se  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in ]a, b[$ , então  $f$  é constante em  $[a, b]$ .

**Corolário 3.3.4 — Derivadas vs Primitivas.** Sejam  $f$  e  $g$  funções regulares em  $[a, b]$ . Se  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x \in ]a, b[$ , então  $f - g$  é constante em  $[a, b]$ .

■ **Exemplo 3.16 — Relação entre arco seno e arco cosseno.** Sabemos que

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)'$$

para todo o  $x \in ]-1, 1[$ . Pelo corolário anterior,  $h$  definida por

$$h(x) = \arcsin x + \arccos x$$

é constante em  $[-1, 1]$ . Calculando, por exemplo,  $h(0) = \frac{\pi}{2}$ , concluímos que

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

para todo o  $x \in [-1, 1]$ . ■

**Corolário 3.3.5** Sejam  $f$  e  $g$  funções regulares em  $[a, b]$ . Se existem os limites  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ , então

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad ; \quad f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

### 3.3.2 Funções monótonas

**Teorema 3.3.6 — Relação entre o sinal da 1<sup>a</sup> derivada e a monotonia da função.** Seja  $f$  uma função regular em  $[a, b]$ .

- i) Se  $f'(x) > 0$  em  $]a, b[$  então  $f$  é estritamente crescente em  $[a, b]$ .
- ii) Se  $f'(x) < 0$  em  $]a, b[$  então  $f$  é estritamente decrescente em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Sejam  $x_1 \in [a, b]$  e  $x_2 \in [a, b]$  tais que  $x_1 < x_2$ , arbitrários. Pelo teorema de Lagrange, existe pelo menos um  $x_0 \in ]x_1, x_2[$  tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Por hipótese, se  $f'(x_0) > 0$ , então  $f(x_2) > f(x_1)$ , ou seja,  $f$  é estritamente crescente em  $[a, b]$ . Caso contrário, se  $f'(x_0) < 0$ , então  $f(x_2) < f(x_1)$ , ou seja,  $f$  é estritamente decrescente em  $[a, b]$ . ■

**Desafio 3.12 — Monotonia de funções exponenciais e logarítmicas.** Verifique que as funções, tais que  $f(x) = a^x$  e  $g(x) = \log_a x$  para  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , são estritamente monótonas.

■ **Exemplo 3.17 — Monotonia de Funções Trigonométricas Inversas.**

- A função arco seno,  $x \mapsto f(x) = \arcsin x$ , é estritamente crescente em  $[-1, 1]$  pois

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

para todo  $x \in ]-1, 1[$  e  $f'_+(-1) = f'_-(1) = +\infty$ .

- A função arco cosseno,  $x \mapsto g(x) = \arccos x$ , é estritamente decrescente em  $[-1, 1]$  pois

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$$

para todo  $x \in ]-1, 1[$  e  $g'_+(-1) = g'_-(1) = -\infty$ .

- A função arco tangente,  $x \mapsto h(x) = \arctan x$ , é estritamente crescente em  $\mathbb{R}$  e

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

■

### 3.3.3 Aproximação linear e diferencial de uma função

#### Diferenciabilidade vs aproximação linear

**Definição 3.3.2 — Aproximação linear de uma função regular.** Sejam  $f$  uma função regular em  $I = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , em que  $\delta > 0$  e  $I \subset D_f$ . Diz-se que a função  $L$  definida por

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

para todo  $x \in I$ , é a aproximação linear de  $f$  em  $x_0$ .

Geometricamente, o gráfico de  $y = L(x)$  corresponde à equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P = (x_0, f(x_0))$ , discutida ao longo da subseção **3.1.4 Interpretação geométrica do conceito de derivada**.

Denotando por  $E(x) = f(x) - L(x)$  o **erro de aproximação linear**, segue pela condição de diferenciabilidade deduzida também na secção supramencionada:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \overbrace{\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}}^{=E(x)} = 0.$$

que toda a função regular  $f$  em  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  pode ser representada na forma

$$f(x) = L(x) + E(x), \quad \text{com} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0.$$

#### Diferencial de uma função

**Definição 3.3.3** Suponhamos que  $f$ , tal que  $y = f(x)$ , é diferenciável em  $x_0$  e o acréscimo de  $x$ ,  $\Delta x$ , é suficientemente pequeno. O diferencial de  $f$  em  $x_0$  relativamente a  $\Delta x$  é definido por

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

O diferencial é a medida da variação da direcção da tangente quando  $x$  sofre um acréscimo desde  $x_0$  até  $x = x_0 + \Delta x$ .

**Notação 3.4 — Diferencial de**  $y = f(x)$ . O diferencial de uma função  $f$  tal que  $y = f(x)$  é denotado por

$$dy = f'(x)dx.$$

Desta forma, o quociente  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  pode ser realmente interpretado como uma derivada, como já tínhamos mencionado anteriormente ao introduzir a **Notação 3.1** e a **Notação 3.2**.

 Essencialmente, para definirmos  $dy$  em  $x_0$ , estamos a assumir que o diferencial de  $y = f(x) = x$  em  $x_0 - dx = \Delta x$  – dá-nos a variação de  $x$  no eixo das abscissas.

■ **Exemplo 3.18 — Diferencial da função potência.** À semelhança do **Exemplo 3.10**, o desenvolvimento em binómio de Newton

$$(x + \Delta x)^m = \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} x^{m-j} (\Delta x)^j$$

permite-nos obter a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} (x + \Delta x)^m - x^m &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} x^{m-j} (\Delta x)^j \\ &= \underbrace{mx^{m-1} \Delta x}_{\text{diferencial } dy=f'(x)\Delta x} + \\ &+ \underbrace{\frac{m!}{2!(m-2)!} x^{m-2} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{m!}{2!(m-2)!} x^2 (\Delta x)^{m-2} + m(\Delta x)^{m-1} x}_{\text{erro de aproximação linear}}. \end{aligned}$$

Desta última fórmula podemos retirar que:

- Para  $f(x) = x^m$ , tem-se  $dy = mx^{m-1}dx$  ( $\Delta x \rightarrow dx$ );
- $(x + \Delta x)^m \approx x^m + mx^{m-1}\Delta x$ .

**Teorema 3.3.7 — Regra de Aproximação Incremental de  $f$  em torno de  $x_0$ .** Suponhamos que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e o acréscimo de  $x$ ,  $\Delta x$ , é suficientemente pequeno. Então

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Note-se que esta regra resulta de

$$\Delta y \approx dy \iff f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

 Podemos dizer agora que **aproximação linear de uma função** consiste em aproximar  $\Delta f(x_0)$  (variação de  $f$  em  $x_0$ ) pela diferencial de  $f$  em  $x_0$  ( $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ ).

### Exemplos de Aproximação Linear

■ **Exemplo 3.19 — vide também Exemplo 2.21 do capítulo 2 Limites e Continuidade.** Seja  $f$  definida por  $f(x) = e^x - 1$ . A equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  em  $P = (0, 0)$  é  $y = x$ , logo  $L(x) = x$ .

Na tabela indicada no exemplo encontra-se representado o cálculo do valor aproximado de  $f$ , usando aproximação linear, para diferentes valores de  $\Delta x$ .

Tabela 3.2: Valores Numéricos

$x_0 + \Delta x$	$\Delta y$	$L(x_0 + \Delta x)$	$\Delta y - L(x_0 + \Delta x)$
1.3	2.6693	1.3	1.3693
1	1.71828	1	0.71828
0.4	0.491825	0.4	0.091825
0.1	0.105171	0.1	0.005171
0.01	0.0100502	0.01	0.0000502
0.001	0.0010005	0.001	0.0000005

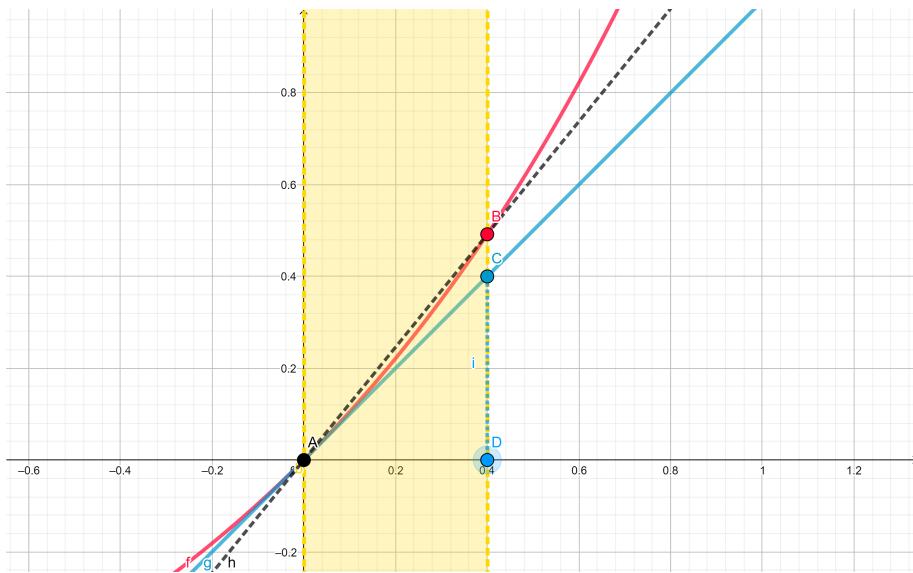


Figura 3.6: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.19** para  $x_0 = 0$  e  $\Delta x = 0.4$ . A magenta encontra-se representado o gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = e^x - 1$ , e a azul ciano a recta tangente ao gráfico em  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  –  $y = x$ . A tracejado foi representado a recta secante, de declive  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , com  $\Delta x = 0.4$  e  $\Delta y = f(0.4) - f(0)$ . Sendo  $f'(0) = 1$  o declive da recta tangente em  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , tem-se que o diferencial de  $f$  em  $x_0 = 0$  –  $dy = f'(x_0)\Delta x$  – corresponde à altura do triângulo rectângulo formado pelos vértices  $A$ ,  $C$  e  $D$  da figura (linha a pontilhado a azul ciano que une os vértices  $C$  e  $D$ ). Por seu turno,  $f(x_0 + \Delta x) - L(x_0) = \Delta y - dy$  – erro de aproximação linear – pode ser medido via o comprimento do segmento de recta que une os vértices  $B$  e  $C$  da figura.

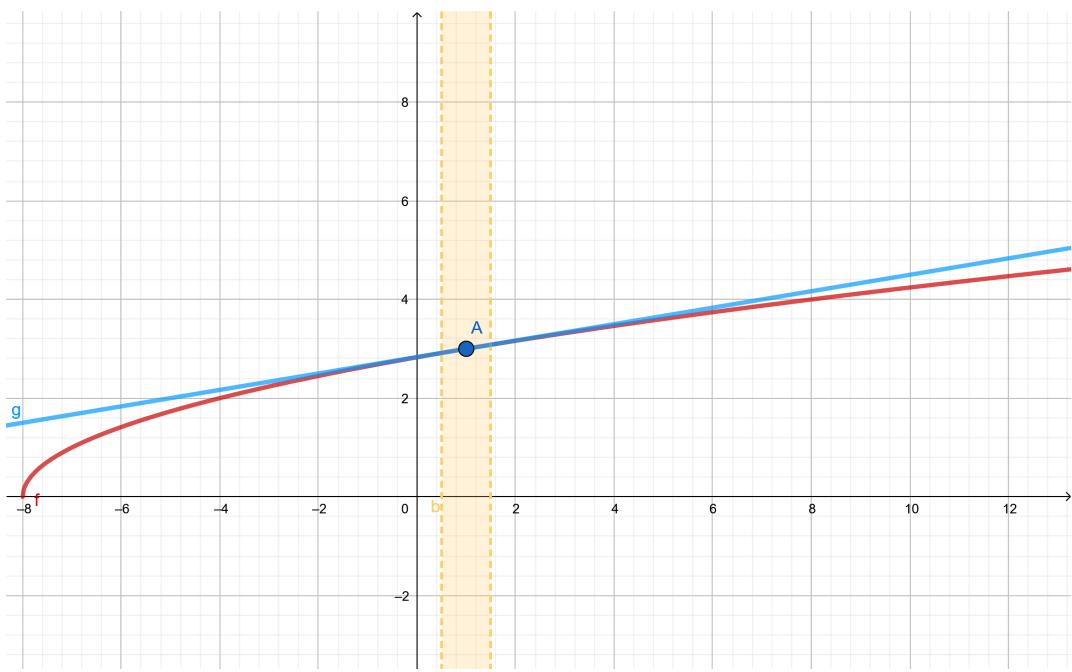


Figura 3.7: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.20** no intervalo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ = ]0.5, 1.5[$  ( $x_0 = 1$  &  $\delta = 0.5$ ). A magenta encontra-se representado o gráfico da função  $x \mapsto \sqrt{x+8}$  e a azul ciano a recta tangente ao gráfico em  $(x_0, y_0) = (1, 3)$ .

■ **Exemplo 3.20 — Aproximação linear de raízes quadradas.** Para a função  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt{x+8}$ , sabemos que o seu gráfico passa pelo ponto  $(1, 3)$ , uma vez que conhecemos o valor exacto de  $f(1)$  [ $\sqrt{9} = 3$ ].

Da derivação de  $f$ :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}}$$

obtemos  $f'(1) = \frac{1}{6}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} f(1 + \Delta x) &\approx f(1) + f'(1)\Delta x \\ &= 3 + \frac{1}{6}(x - 1) \\ &= \frac{17 + x}{6}. \end{aligned}$$

dá-nos uma aproximação de  $f$  para valores de  $x \approx 1$ . ■

**Desafio 3.13 — Cálculo aproximado de raízes quadradas.** Use a função  $x \mapsto \sqrt{x+8}$  para obter um aproximado para raízes quadradas

$$\sqrt{16.16} \quad \& \quad \sqrt{24.88}.$$

**SUGESTÃO:** Para calcular a aproximação linear via determinação da equação da recta tangente, terá de escolher um  $x$  para o qual  $\sqrt{x+8}$  lhe dê uma raiz exacta, que esteja suficientemente próxima das raiz quadrada que pretende calcular.

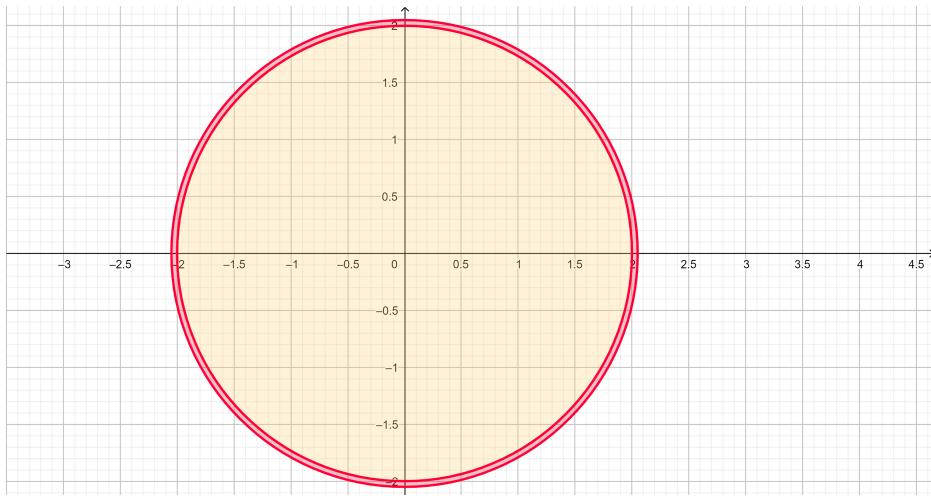


Figura 3.8: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.21** para  $r = 2$  e  $\Delta r = 0.05$ . A amarelo encontra-se a função  $A(r)$  – área da circunferência de raio  $r$ , e a vermelho a área da região anelar, correspondente à área compreendida entre as circunferências de raio  $r$  e  $r + \Delta r$  – variação  $A(r + \Delta r) - A(r)$ . Neste caso podemos usar o diferencial  $dA(r) = A'(r)dr$ , envolvendo a função perímetro  $A'(r) = 2\pi r$ , para determinar uma aproximação para a área da região anelar.

**Desafio 3.14 — Erro relativo.** Para a função  $f$  definida por  $f(x) = \log_2(\sqrt{1-x})$ , determine uma estimativa para erro relativo

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$$

para valores de  $x_0 = 0.75$  e  $\Delta x = 0.001$ , usando aproximação linear.

■ **Exemplo 3.21 — Área vs Perímetro de uma circunferência.** Sendo  $A(r) = \pi r^2$  a função que nos permite calcular a área de uma circunferência de raio  $r > 0$ , segue que

$$\begin{aligned} A(r + \Delta r) - A(r) &= \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 \\ &= 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2. \end{aligned}$$

Da última fórmula concluímos que

$$dA(r) = 2\pi r \Delta r,$$

onde se retira que

$$A'(r) := \frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

Concluímos assim que a função derivada  $A'(r)$  nos dá o perímetro de uma circunferência de raio  $r$ , e que o diferencial

$$dA(r) = A'(r)dr$$

nos permite encontrar uma estimativa para a área delimitada entre as circunferências de raio  $r$  e  $r + \Delta r$ , para valores de  $\Delta r \approx 0$ . ■

### 3.4 Derivadas de 2<sup>a</sup> ordem e Derivadas de ordem superior

**Definição 3.4.1 — Derivadas de ordem superior a 1.** Sejam  $f$  uma função de domínio  $D_f$ ,  $A = \{x \in D_f : f'(x) \in \mathbb{R}\}$  e  $k \in \mathbb{N}$ . A derivada de ordem  $k \geq 2$  no ponto  $x$ ,  $f^{(k)}(x)$ , é definida por recorrência através de

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'(x).$$

Dizemos ainda que  $f$  é de classe  $C^k$  num conjunto  $B \subseteq A$  se  $f$  e as suas derivadas até à ordem  $k$  são contínuas em todos os pontos de  $B$ .

Por simplicidade representamos a segunda derivada de  $f$  usando ainda a notação da linha, ou seja,

$$f^{(2)}(x) = f''(x).$$

Seja  $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  a aproximação linear de  $f$  em  $x_0$ . Então:

- i)  $f$  é convexa em  $I$  se  $f(x) > L(x)$ , para  $x, x_0 \in I$  e  $x \neq x_0$ ;
- ii)  $f$  é côncava em  $I$  se  $f(x) < L(x)$ , para  $x, x_0 \in I$  e  $x \neq x_0$ .

**Teorema 3.4.1** Seja  $f$  uma função de classe  $C^1$  em  $I = ]a, b[$ . Então:

- i)  $f$  é convexa em  $I$  se e só se  $f'$  é crescente;
- ii)  $f$  é côncava em  $I$  se e só se  $f'$  é decrescente.

Assim sendo, o sinal da segunda derivada de  $f$  permite-nos determinar as concavidades do seu gráfico.

**Teorema 3.4.2 — Relação entre o sinal da 2<sup>a</sup> derivada e as concavidades do gráfico.**

Seja  $f'$  uma função regular em  $[a, b]$ .

- i) Se  $f''(x) > 0$  em  $]a, b[$  então  $f$  é convexa em  $[a, b]$ , i.e., o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $[a, b]$ .
- ii) Se  $f''(x) < 0$  em  $]a, b[$  então  $f$  é côncava em  $[a, b]$ , i.e., o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em  $[a, b]$ .

Ressalte-se que, para as funções convexas ou côncavas podem existir valores de  $x$  para os quais a segunda derivada se anule.

■ **Exemplo 3.22** Consideremos a função  $x \mapsto f(x) = x^4$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . As derivadas de primeira e segunda ordens são dadas por  $f'(x) = 4x^3$  e  $f''(x) = 12x^2$ . Assim,  $f''(x) \geq 0$  e

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

Recorrendo ao gráfico, visualizamos que  $f$  é convexa em  $\mathbb{R}$  e satisfaz  $f''(0) = 0$ . ■

**Definição 3.4.2** Sejam  $f$  uma função de classe  $C^2$  em  $I_1 \cup I_2$  com  $I_1 \cap I_2 = \{x_0\}$ . Diz-se que  $P = (x_0, f(x_0))$  é ponto de inflexão do gráfico de  $f$  se  $f$  é convexa em  $I_1$  e côncava em  $I_2$  ou  $f$  é côncava em  $I_1$  e convexa em  $I_2$ .

■ **Exemplo 3.23** Consideremos a função  $x \mapsto f(x) = x^3$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . As derivadas de primeira e segunda ordens são dadas por  $f'(x) = 3x^2$  e  $f''(x) = 6x$ . Assim,

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

Fazendo o quadro de concavidades:

$x$		0	
$f''(x)$	—	0	+
$f(x)$	↑	0	↑

concluímos que  $(0, 0)$  é ponto de inflexão do gráfico de  $f$ . ■

Contudo, o gráfico de uma função  $f$  pode admitir um ponto de inflexão  $P = (x_0, f(x_0))$  e a segunda derivada de  $f$  em  $x_0$  não existir ou mesmo ser infinita.

■ **Exemplo 3.24** Consideremos a função  $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . As derivadas de primeira e segunda ordens são dadas por  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  e  $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$ . Assim,

$$f''(x) \neq 0$$

Fazendo o quadro de concavidades:

$x$		0	
$f''(x)$	+	n.d	-
$f(x)$	↑	0	↓

concluímos que  $(0, 0)$  é ponto de inflexão do gráfico de  $f$  uma vez que  $f$  é convexa em  $]-\infty, 0]$  mas côncava em  $[0, +\infty[$ . ■

**Desafio 3.15 — Exercício de Revisão.** Seja  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável em todos os pontos

do seu domínio, e  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida pontualmente por  $g(x) = f(\arccos(x))$ .

- Determine uma expressão analítica para  $g'$  e  $g''$  em termos de  $f'$  e  $f''$ .
- Se  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{3}$  são pontos estacionários de  $f$ , quais são os pontos estacionários de  $g$ ?
- Supondo que  $\frac{\pi}{4}$  é um máximo local de  $f$  e  $\frac{\pi}{3}$  um mínimo local de  $f$ , determine os extremos locais de  $g$ . Classifique-os quanto à sua natureza (máximo/mínimo local).
- Supondo agora que  $f(0) = f(\pi)$ , mostre pelo *Teorema de Rolle* (**Teorema 3.3.1**) que existe um  $c \in ]-1, 1[$  tal que:
  - $f'(\arccos(c)) = 0$ .
  - $g''(c) = \frac{1}{|1-c^2|} f''(\arccos(c))$ .

### 3.5 Cálculo de limites usando derivadas: a Regra de L' Hôpital

**Teorema 3.5.1 — Regra de L' Hôpital** (Indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Sejam  $f$  e  $g$  diferenciáveis num intervalo aberto  $I$  contendo  $c$  com exceção eventualmente de  $c$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  são ambos nulos ou ambos infinitos então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que exista  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

*Ideia da demonstração.* Segue da sequência de igualdades

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\frac{g(x) - g(c)}{x - c}} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

■



Este resultado ainda é válido se em vez do real  $c$  estiver  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

### 3.5.1 Limites envolvendo indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$

■ **Exemplo 3.25 — Indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .** O limite abaixo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x \ln|x|}$$

envolve uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Porém, recorrendo a propriedades de limites temos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x \ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\ln|x|} = - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\ln|x|}$$

Para aplicar a regra de L'Hôpital, observe que as funções

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \ln|x|$$

satisfazem as regras de derivação

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' - 1' \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Das igualdades

$f'(-1) = -2$  e  $g'(-1) = -1$  segue pelo **Teorema 3.5.1** que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x \ln|x|} &= (-1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)'}{(\ln|x|)'} \\ &= (-1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} \\ &= (-1)2 \\ &= -2. \end{aligned}$$

■

### 3.5.2 Limites envolvendo indeterminações do tipo $\infty - \infty$

■ **Exemplo 3.26 — Indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ .** O limite abaixo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x}{\ln|x|} - \frac{1}{x \ln|x|} \right)$$

envolve uma indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ , uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{\ln|x|} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x \ln|x|} &= -\infty \end{aligned}$$

Aos reescrevermos a função  $\frac{x}{\ln|x|} - \frac{1}{x \ln|x|}$  na forma de fração:

$$\frac{x}{\ln|x|} - \frac{1}{x \ln|x|} = \frac{x^2 - 1}{x \ln|x|}.$$

passamos de uma indeterminação do tipo  $\infty - \infty$  a uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ , que corresponde precisamente ao limite calculado no no **Exemplo 3.25** pela regra de L'Hôpital. Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x}{\ln|x|} - \frac{1}{x \ln|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x \ln|x|} \\ &= -2.\end{aligned}$$

■

**Desafio 3.16 — Indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ .** Calcule o limite da função

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \cot(x) \right)$$

usando a regra de L'Hôpital.

### 3.5.3 Limites envolvendo indeterminações do tipo $0 \times \infty$

■ **Exemplo 3.27 — Indeterminação do tipo  $0 \times \infty$ .** Voltemos novamente a nossa atenção para o cálculo do limite do **Exemplo 3.7**:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) \ln(x - a)$$

Para calcularmos o limite acima pela regra de L'Hôpital, reescrevemos a função  $(x - a) \ln(x - a)$  na forma

$$(x - a) \ln(x - a) = \frac{\ln(x - a)}{\frac{1}{x - a}}$$

para passarmos a uma indeterminação do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Segue então que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) \ln(x - a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\ln(x - a)}{\frac{1}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(\ln(x - a))'}{\left(\frac{1}{x - a}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\frac{1}{x - a}}{-\frac{1}{(x - a)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} -(x - a) \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

### 3.5.4 Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital

■ **Exemplo 3.28 — Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital.** Ao aplicarmos uma vez a regra de L'Hôpital para calcular o limite abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{(x - 1)^2}$$

obtemos, após alguns cálculos auxiliares, a igualdade abaixo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(2\pi x)}{2(x - 1)}$$

que continua a nos dar uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .

Aplicando mais uma vez a regra de L'Hôpital, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(2\pi x)}{2(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2\pi^2 \cos(2\pi x)}{2} \\ &= \pi^2.\end{aligned}$$

Em suma, aplicámos duas vezes a regra de L'Hôpital para concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{(x-1)^2} = \pi^2.$$

■

**Desafio 3.17 — Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital (ii).** Calcule o limite abaixo usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1}{(x-3)^3}$$

**Desafio 3.18 — Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital (iii).** Calcule o limite abaixo

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)^2}{(f(x)-1)^2}$$

sabendo que  $f$  é uma função duas vezes diferenciável em  $x_0 = -3$  que satisfaz as seguintes condições:

$$f(-3) = 1, \quad f'(-3) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \& \quad f''(-3) = \sqrt{3}.$$

**Desafio 3.19 — Para revisão do Corolário 3.2.5.** Seja  $f$  uma função invertível e diferenciável em  $]a, b[$ , e

$$y = c + \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, c)$ .

Determine o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{f^{-1}(x)}.$$

### 3.5.5 Limites envolvendo a função exponencial-potência

Recordemos que a função exponencial-potência  $h$  é definida por

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \ln[f(x)]}.$$

Suponhamos agora que  $h$  é diferenciável num intervalo do tipo  $]a, c[ \cup ]c, b[$ , contido no domínio

$$D_h = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}.$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \lim_{x \rightarrow c} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow c} [g(x) \ln(f(x))]}$$

uma vez que a exponencial é uma função contínua. Assim, no cálculo do limite  $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$  podem surgir três tipos de indeterminações:

$$(0^+)^0 \quad ; \quad 1^{(\pm\infty)} \quad ; \quad (+\infty)^0$$

que resultam das indeterminações associadas ao limite de um produto de funções:  $\lim_{x \rightarrow c} [g(x) \ln(f(x))]$ . Vejamos as três possibilidades:

- Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0^+$  e  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  então  $\lim_{x \rightarrow c} [g(x) \ln(f(x))]$  é uma indeterminação do tipo  $0 \times (-\infty)$ ;
- Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$  então  $\lim_{x \rightarrow c} [g(x) \ln(f(x))]$  é uma indeterminação do tipo  $\pm\infty \times 0$ ;
- Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  então  $\lim_{x \rightarrow c} [g(x) \ln(f(x))]$  é uma indeterminação do tipo  $0 \times (+\infty)$ .

■ **Exemplo 3.29 — Prova de limite notável usando a regra de L'Hôpital.** Mostre-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

para toda a constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  e não-nula.

Observe-se que o domínio é determinado através de

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \quad \wedge \quad 1 + \frac{\alpha}{x} > 0\right\}.$$

Para  $\alpha > 0$  (resp.  $\alpha < 0$ ) obtém-se

$$D = ]-\infty, -\alpha[ \cup ]0, +\infty[ \text{ (resp. } D = ]-\infty, 0[ \cup ]-\alpha, +\infty[).$$

Reescrevendo tem-se

$$\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)}$$

Começando por converter a indeterminação  $(+\infty) \times 0$  em  $\frac{0}{0}$  vem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)}{x^{-1}}$$

Aplicando a regra de L' Hôpital obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-\alpha}{x(x+\alpha)}}{(-1)x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x}{x + \alpha} = \alpha$$

por conseguinte,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)} = e^\alpha.$$

■

**Desafio 3.20 — Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital (iv).** Considere a função exponencial potência definida pontualmente por  $x^{\sin(x)}$ .

- (i) Verifique que  $0 < x^{\sin(x)} \leq x^x$ , para todo o  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . De seguida, use o **Exemplo 3.27** e o **Corolário 2.1.10** para concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} = 1.$$

- (ii) Use sucessivamente a regra de L'Hôpital para calcular o limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}$ . O que conclui?

### 3.6 Extremos Relativos e Absolutos

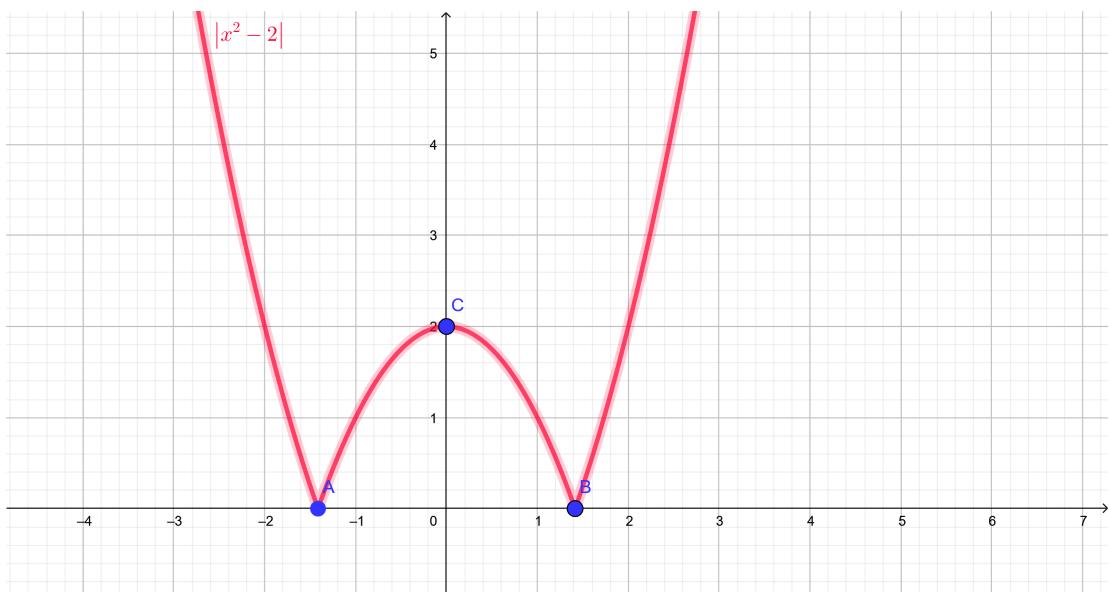


Figura 3.9: Interpretação gráfica do **Exemplo 3.30**. Os pontos singulares são as abscissas de  $A = (-\sqrt{2}, 0)$  e  $B = (\sqrt{2}, 0)$ . O ponto estacionário é a abscissa de  $C = (0, 2)$ .

**Definição 3.6.1 — Máximos e Mínimos Relativos.** Sejam  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $c \in ]a, b[$ . Diz-se que:

- $f$  atinge um máximo relativo (ou local) em  $c$ , de valor  $f(c)$ , se existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo  $x \in ]c - \delta, c + \delta[$

- $f$  atinge um mínimo relativo (ou local) em  $c$ , de valor  $f(c)$ , se  $\delta > 0$  tal que

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo  $x \in ]c - \delta, c + \delta[$  com  $\delta > 0$ .

Aos máximos e aos mínimos relativos de  $f$  chamam-se extremos relativos (ou extremos locais) da função.

### 3.6.1 Estudo de pontos críticos/estacionários

**Definição 3.6.2 — Pontos críticos da função.** Sejam  $f$  uma função de domínio  $D$  e  $c \in D$ . Diz-se que:

- $c$  é ponto estacionário de  $f$  se  $f$  é diferenciável em  $c$  e  $f'(c) = 0$ .
- $c$  é ponto singular de  $f$  se  $f$  não é diferenciável em  $c$ , ou seja, se ou não existe  $f'(c)$  ou  $f'(c) = +\infty(-\infty)$

■ **Exemplo 3.30** Seja  $f$  a função  $x \mapsto f(x) = |x^2 - 2|$ . Esta função é diferenciável em  $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ . Além disso, temos

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Assim,  $f$  tem três pontos críticos. ■

**Teorema 3.6.1 — Condição Necessária para a existência de um extremo.** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $c \in ]a, b[$ . Se  $f$  tem um extremo relativo em  $c$  então  $c$  é um ponto crítico de  $f$ .

**Corolário 3.6.2 — Teorema de Fermat.** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função regular e  $c \in ]a, b[$ . Se  $f$  tem um extremo relativo em  $c$  então  $c$  é um ponto estacionário de  $f$ .

Contudo, uma função regular pode não atingir um extremo num ponto estacionário.

■ **Exemplo 3.31** Consideremos a função cúbica definida por  $f(x) = x^3$ . É claro que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Resolvendo

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0$$

obtemos um único ponto estacionário,  $c = 0$ . Fazendo o quadro de variação:

$x$		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

concluímos que a função é estritamente crescente. ■

### 3.6.2 Determinação e classificação de extremos relativos

Assim, após a determinação de pontos estacionários é necessário classificá-los. Podemos classificar esses pontos recorrendo ao quadro de variação ou então aplicar o teste da derivada de segunda ordem.

■ **Exemplo 3.32** Consideremos a função exponencial por  $f(x) = xe^{-2x^2}$ . Esta é diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Os pontos estacionários são as soluções da seguinte equação:

$$f'(x) = 0 \iff e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-x^2} = 0 \iff 1 - 4x^2 = 0 \iff x = \pm 2^{-1}$$

Do quadro de variação:

$x$		$-1/2$		$1/2$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\searrow$

concluímos que a função tem um máximo relativo de valor  $M = \frac{1}{2\sqrt{e}}$  e um mínimo relativo de valor  $m = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$ . ■

**Teorema 3.6.3 — Teste da Derivada de segunda ordem.** Suponhamos que  $f''$  existe num intervalo aberto contendo  $c$  e que  $f'(c) = 0$ .

1. Se  $f''(c) > 0$  então  $f$  atinge um mínimo relativo em  $c$
2. Se  $f''(c) < 0$  então  $f$  atinge um máximo relativo em  $c$

Contudo o teste é inconclusivo no caso em que  $f''(c) = 0$ .

■ **Exemplo 3.33** Consideremos a função quadrática definida por  $f(x) = x^2$ . É claro que  $f$  é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}$ . Resolvendo

$$f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

obtemos um único ponto estacionário,  $x = 0$ . De seguida, usamos o teste da derivada de ordem 2 para classificá-lo. Assim,

$$f''(x) = 2$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $f''(0) > 0$ , logo  $f$  atinge um mínimo relativo em  $x = 0$  de valor  $f(0) = 0$ . Além disso,  $f(0) = 0$  é mesmo o mínimo absoluto de acordo com a próxima definição pois verifica

$$f(x) \geq 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . ■

**Definição 3.6.3 — Máximos e Mínimos Absolutos.** Sejam  $f$  uma função de domínio  $D$  e  $c \in D$ . Diz-se que:

- $f$  atinge um máximo absoluto em  $c$ , de valor  $f(c)$ , se verifica

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo  $x \in D$ ;

- $f$  atinge um mínimo absoluto em  $c$ , de valor  $f(c)$ , se

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo  $x \in D$ .

Aos máximos e aos mínimos absolutos chamam-se extremos absolutos.

**Teorema 3.6.4** Se  $f$  é uma função convexa (resp. côncava) em  $[a, b]$ , então todo o mínimo (resp. máximo) relativo é mínimo (resp. máximo) absoluto.

**Desafio 3.21** Classifique os pontos críticos da função  $x \mapsto |x^2 - 2|$  do **Exemplo 3.30**.

**Desafio 3.22** Averigue se os extremos relativos da função  $x \mapsto xe^{-2x^2}$  do **Exemplo 3.32** também são absolutos.

**Sugestão:** Determine o contradomínio da função.

### 3.6.3 Determinação de extremos absolutos num intervalo fechado

Toda a função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  tem um máximo absoluto  $M$  e um mínimo absoluto  $m$  pelo teorema de Weierstrass – vide **Teorema 2.2.9** do capítulo 2 **Limites e Continuidade**. Para calcular esses valores é necessário determinar o contradomínio da função. Assim:

- Se  $f$  é estritamente monótona em  $[a, b]$  então temos  $D' = [f(a), f(b)]$  ou  $D' = [f(b), f(a)]$ , logo  $m = f(a)$  e  $M = f(b)$  ou  $M = f(a)$  e  $m = f(b)$ , respectivamente.

No caso em que  $f$  não é monótona, descrevemos o procedimento para obter os extremos absolutos:

**Passo 1:** Determinar os pontos críticos, bem como as suas imagens por  $f$ ;

**Passo 2:** Calcular  $f(a)$  e  $f(b)$ ;

**Passo 3:** De entre as imagens calculadas atrás, o maior valor  $M$  e o menor valor  $m$  representam, respectivamente, o máximo absoluto e o mínimo absoluto de  $f$ .

**Desafio 3.23** Determine os extremos absolutos da função  $f$  definida por  $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x^5}$  no intervalo  $[-1, 2]$ .

### 3.7 Esboço de gráficos baseado no estudo completo de funções

Para fazer um esboço do gráfico duma função é conveniente seguir o seguinte plano:

- Determinar o domínio;
- Analisar a simetria e a periodicidade;
- Calcular os pontos de intersecção com os eixos coordenados;
- Estudar a continuidade e determinar as assíntotas;
- Determinar os intervalos de monotonia, extremos relativos/absolutos e contradomínio;
- Determinar os intervalos de concavidade/convexidade e pontos de inflexão.

### 3.8 Aplicações: Taxas de Variação em Economia

A taxa de variação média de uma função  $f$  num intervalo fechado  $[x, x + \Delta x]$  é igual a

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.3)$$

Quando  $\Delta x$  tende para zero, o limite desse quociente é igual precisamente à derivada de  $f$  no ponto  $x$ , sendo interpretado como a taxa de variação de  $f$  no ponto  $x$ . Por exemplo, quando a variável independente é o tempo é sobejamente conhecido que, a velocidade corresponde à taxa de variação do espaço percorrido e a aceleração corresponde à taxa de variação da velocidade. A utilização das taxas de variação de uma quantidade relativamente a outra quantidade, que não seja necessariamente o tempo, ocorre variadíssimas vezes em diferentes ciências. Em Economia, o custo marginal, a receita marginal e o lucro marginal constituem exemplos de aplicação de taxas de variação.

Representando por  $C(x)$  o custo total em relação à quantidade de unidades produzidas  $x$  então o custo marginal em  $x$  é definido pela função derivada de  $C(x)$ ,  $C'(x)$ . Na prática os economistas estão interessados em saber qual é que é a variação do custo total de produção associado à produção de uma unidade adicional. Em termos matemáticos, isso corresponde a uma taxa de variação média de  $C(x)$  no intervalo  $[x, x + 1]$ . Como se pode relacionar a taxa de variação média de  $C(x)$  com o custo marginal  $C'(x)$ ?

Teoricamente, os economistas definem custo marginal como sendo a taxa de variação do custo total  $C(x)$  em relação à quantidade de unidades produzidas  $x$ . Assim sendo, pode-se afirmar que o custo marginal fornece uma boa estimativa para a taxa de variação média de  $C(x)$  no intervalo  $[x, x + 1]$  porque

$$C(x + 1) - C(x) \approx C'(x)$$

**Desafio 3.24** Suponha que o custo total de produção em unidades monetárias (u.m) é dado por

$$C(x) = 0,1x^3 - 5x^2 + 500x + 200$$

em relação ao número de unidades produzidas  $x$ . Então

- Calcule o acréscimo de custo correspondente a um aumento de produção de 3 para 4 unidades.
- Determine o custo marginal correspondente a 3 unidades de produção.
- Interprete os resultados obtidos.

#### 3.8.1 O Princípio da Minimização do Custo Médio

Uma empresa que produz um único produto pretende minimizar o custo médio para um determinado volume de produção de  $x$  unidades. O custo total no processo de produção é decomposto em duas parcelas: o custo fixo e o custo variável. O primeiro representa a despesa expressa em unidades monetárias, independentemente da quantidade produzida, por exemplo o custo de armazenamento,

o preço do equipamento e outros custos de distribuição e de gestão. O segundo está diretamente relacionado com a produção efectiva, por exemplo, o preço das matérias-primas e o salário dos trabalhadores e dos gestores.

Vamos admitir que o custo total é representado pela expressão  $C(x)$ , onde  $C : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ , isto é, uma função contínua cujas primeira e segunda derivadas são também contínuas em  $[0, +\infty]$ . Enquanto o custo médio é definido por

$$M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

o custo marginal é definido pela derivada do custo total  $C(x)$ ,  $C'(x)$ . Refira-se que o custo marginal  $C'(x)$  é aproximadamente igual ao custo adicional correspondente à produção de mais uma unidade de  $x$ , isto é,

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$$

Suponhamos que os custos de produção satisfazem os seguintes pressupostos económicos:

- (i) O custo fixo é positivo;
  - (ii) O custo total aumenta à medida que a produção aumenta;
  - (iii) Para níveis de produção baixos, o custo marginal diminui à medida que a produção aumenta;
  - (iv) Para níveis de produção altos, o custo marginal aumenta à medida que a produção aumenta.
- Então a empresa age segundo o seguinte princípio económico:
- (v) O custo médio  $M$  tem um mínimo que ocorre no nível de produção para o qual o custo marginal coincide com o custo médio.

Os pressupostos económicos sobre os custos conduzem aos seguintes resultados matemáticos:

- Existe um único ponto estacionário de  $M$ ,  $x = x_*$ , que é solução da equação

$$M'(x) = 0 \iff C'(x) = M(x)$$

Basta notar que

$$M'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x) - M(x)}{x}$$

- A função  $M$  atinge um mínimo absoluto em  $x = x_*$  conforme se pode verificar pelo quadro de variação de  $M$ :

$x$	0		$x_*$	$+\infty$
$M'(x)$	$n.d$	-	0	+
$M(x)$	$n.d$	$\searrow$	$M(x_*)$	$\nearrow$

onde  $M(x_*)$  é o custo médio mínimo. Notemos que

- (i) Para os valores de  $x$  tais que  $x < x_*$  temos

$$M'(x) < 0 \iff C'(x) < M(x)$$

- (ii) Para os valores de  $x$  tais que  $x > x_*$  temos

$$M'(x) > 0 \iff C'(x) > M(x)$$

**Desafio 3.25** Sabendo que  $x_*$  é o único ponto estacionário da função custo médio  $M$ , mostre que

$$M''(x_*) = \frac{C''(x_*)}{x_*}$$

Utilize ainda esse resultado para provar que  $x_*$  é um minimizante de  $M$ .

### 3.8.2 O Princípio da Maximização do Lucro

Consideremos uma empresa que pretende maximizar o lucro para um determinado volume de produção de  $x$  unidades de um produto. O lucro é definido como uma diferença entre receitas e custos.

Por um lado, o custo total no processo de produção é decomposto em duas parcelas: o custo fixo e o custo variável. O primeiro representa a despesa expressa em unidades monetárias, independentemente da quantidade produzida, por exemplo o custo de armazenamento, o preço do equipamento e outros custos de distribuição e de gestão. O segundo está directamente relacionado com a produção efectiva, por exemplo, o preço das matérias-primas e o salário dos trabalhadores e dos gestores. Admitamos que o custo total,  $C(x)$ , é expresso por uma função real de variável real de classe  $C^2$  no intervalo  $[0, +\infty]$ , isto é, uma função contínua cujas primeira e segunda derivadas são também contínuas. Sendo o custo marginal definido pela derivada  $C'(x)$  do custo total  $C(x)$ , supomos então que os custos satisfazem os seguintes pressupostos económicos:

- O custo fixo é positivo
- O custo total aumenta à medida que o volume de produção aumenta
- A níveis de produção baixos, a um aumento do volume de produção corresponde uma diminuição do custo marginal
- A níveis de produção altos, o custo marginal aumenta à medida que o volume de produção aumenta

Por outro lado, se  $p(x)$  indicar o preço unitário de mercado quando se produzem  $x$  unidades de um produto, então a receita total proveniente da venda de  $x$  unidades é dada por

$$R(x) = xp(x)$$

Sendo a função lucro definida por

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

a empresa age segundo o seguinte princípio económico: a função lucro tem um máximo que ocorre no nível de produção para o qual a receita marginal coincide com o custo marginal. Note-se que a receita marginal e o lucro marginal representam a função derivada da receita e do lucro, respectivamente, em relação à quantidade de unidades vendidas.

Os pressupostos económicos conduzem aos seguintes resultados matemáticos:

- Existe um único ponto estacionário de  $L$ ,  $x = x^*$ , que verifica

$$L'(x) = 0 \iff R'(x) = C'(x)$$

Basta notar que

$$L'(x) = R'(x) - C'(x)$$

- A função  $L$  atinge um mínimo absoluto em  $x = x^*$  conforme se pode verificar pelo quadro de variação de  $L$ :

$x$	0	$x^*$	$+\infty$
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$	$\nearrow$	$L(x^*)$	$\searrow$

onde  $L(x^*)$  é o lucro máximo.

### 3.8.3 Elasticidade Preço da Procura

Consideremos a função procura:

$$\begin{aligned} D : I \subseteq ]0, +\infty[ &\longrightarrow ]0, +\infty[ \\ x &\mapsto y = D(x) \end{aligned}$$

onde  $y > 0$  representa a quantidade procurada de um bem por parte dos consumidores ao preço unitário de  $x > 0$  unidades monetárias (u.m.). Em geral, supomos que:

- $D$  é positiva, diferenciável e estritamente decrescente em  $I$ .

A sua representação gráfica, designada por curva de procura, satisfaz

$$y = D(x) \iff x = D^{-1}(y)$$

sendo  $D^{-1}$  a função inversa de  $D$ . A **monotonia de  $D$  resulta do pressuposto económico de que a quantidade procurada de um bem varia no sentido inverso do seu preço**. De facto, à medida que o preço aumenta a quantidade procurada diminui e vice-versa.

Então a elasticidade preço da procura é uma função  $\varepsilon_D : I \rightarrow ]-\infty, 0[$  que toma valores negativos, cuja expressão é definida por

$$\varepsilon_D(x) = \frac{x D'(x)}{D(x)}.$$

O valor da elasticidade preço da procura é o rácio entre a variação relativa (ou percentual) da quantidade procurada e a variação relativa (ou percentual) do preço. É por esta razão que o conceito de elasticidade se tornou tão popular entre os economistas pois desta forma a elasticidade não depende das unidades de medida das respectivas variáveis.

**Desafio 3.26** Verifique que a função receita marginal, definida como a primeira derivada da função receita total  $R$  – vide subseção **3.8.2 O Princípio da Maximização do Lucro** – pode ser expressa como

$$R'(x) = p(x)(1 + \varepsilon_p(x)),$$

onde  $x \mapsto \varepsilon_p(x)$  denota a função de elasticidade associada ao preço de produção unitário.

**Que condição teremos de impor à função de elasticidade de modo a que a receita total aumente com o aumento da produção do número de peças?**

**Desafio 3.27** Assumindo que  $x^*$  é o número óptimo de peças que nos permite maximizar a função lucro  $x \mapsto L(x)$  introduzida na subseção, **3.8.2 O Princípio da Maximização do Lucro**, determine o valor do preço unitário  $p(x^*)$  para produzir  $x^*$  peças em função do custo marginal  $C'(x^*)$  de produção de  $x^*$  peças.

### 3.8.4 Tempo de Retenção Ideal em Compra e Venda de Imóveis

Suponha que possui um imóvel, cujo valor de mercado será de  $V(x)$  euros em  $x$  anos. Supondo que a taxa de juro permanece constante ( $J\%$ ), então o seu valor de mercado ao longo dos anos pode ser calculado pela função

$$W(x) = V(x)e^{-\frac{J}{100}x} \quad (x \geq 0).$$

A teoria económica sugere que o tempo ideal para vender um imóvel corresponde à maximização da função  $x \mapsto W(x)$ .

Das condições de primeira ordem e da igualdade anterior, segue que

$$\begin{aligned} W'(x^*) = 0 &\iff \underbrace{e^{-\frac{J}{100}x^*}}_{>0} \left( V'(x^*) - \frac{J}{100}V(x^*) \right) = 0 \\ &\iff \frac{V'(x^*)}{V(x^*)} = \frac{J}{100} \end{aligned}$$

Das condições de 2<sup>a</sup> ordem, segue que

$$\begin{aligned} W''(x^*) < 0 &\iff e^{-\frac{J}{100}x^*} \left( V''(x^*) - \frac{2J}{100}V'(x^*) + \left( \frac{J}{100} \right)^2 V(x^*) \right) < 0 \\ &\iff \underbrace{e^{-\frac{J}{100}x^*} V(x^*)}_{>0} \left( \frac{V''(x^*)}{V(x^*)} - \left( \frac{J}{100} \right)^2 \right) < 0 \\ &\iff \frac{V''(x^*)}{V(x^*)} < \left( \frac{J}{100} \right)^2. \end{aligned}$$

Finalmente, a sequência de igualdades

$$\frac{V''(x^*)}{V(x^*)} = \frac{V''(x^*)}{V'(x^*)} \frac{V'(x^*)}{V(x^*)} = \frac{J}{100} \frac{V''(x^*)}{V'(x^*)}$$

permite-nos concluir que o **ano ideal para venda do imóvel** está correlacionado com as seguintes condições de primeira e 2<sup>a</sup> ordem, associadas às derivadas logarítmicas de  $V$  e  $V'$ :

$$\frac{V'(x^*)}{V(x^*)} = \frac{J}{100} \quad \text{e} \quad \frac{V''(x^*)}{V'(x^*)} < \frac{J}{100}.$$

**Desafio 3.28 — Maximização do valor de mercado de um imóvel.** Sendo  $V_0$  o preço de compra de um imóvel (em euros) a uma construtora, suponha que o seu valor de mercado, a uma taxa de 6% ao ano, é dado pela função

$$W(x) = V_0 e^{\sqrt[3]{x^2}} e^{-0.06x}.$$

Determine ao fim de quantos anos será atingido o lucro máximo com a venda do imóvel.

### 3.9 Exercícios Propostos

26. Considere  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Indique o ponto de descontinuidade de  $f$  e classifique-o.
- (b) A função  $f$  é diferenciável em  $x = 0$ ? Justifique.
- (c) Mostre que:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ .
- (d) Defina a função derivada de  $f$ , explicitando o domínio e a expressão analítica.
- (e) Determine as assíntotas ao gráfico de  $f$  e estude a monotonia e as concavidades de  $f$ .
- (f) Faça um esboço gráfico de  $f$ .

27. Considere  $f$  e  $g$  definidas por

$$f(x) = \sinh x, \quad g(x) = \ln x.$$

- (a) Mostre que:

$$(g \circ f)(x) = \ln(e^{2x} - 1) - x - \ln 2, \quad x > 0.$$

- (b) Calcule a derivada de  $g \circ f$  em  $x$  de duas formas distintas através de:
  - (i) um produto de derivadas, ou seja,  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ ;
  - (ii) alínea (a).
- 28. Seja  $f$  a função definida por  $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$ .
  - (a) Usando a monotonia, mostre que  $f$  é invertível.
  - (b) Determine  $a$  de modo que  $(4, a)$  pertença ao gráfico de  $f^{-1}$ .
  - (c) Após a determinação de  $a$ , compare os declives das rectas tangentes aos gráficos de  $f$  e de  $f^{-1}$  em  $(a, 4)$  e em  $(4, a)$ , respectivamente.
  - (d) Determine o domínio e a expressão analítica da função inversa de  $f$ ,  $f^{-1}$ .
- 29. Recorrendo à regra de L' Hôpital, calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a^2} \frac{\sqrt{x} - a}{x - a^2}, \quad a > 0 \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x/3)} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\operatorname{tg} x)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) \quad (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) \quad (h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^{-1/2} - 2^{-1}}{x - 4} \quad (j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\cosh x} \quad (l) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\operatorname{arctg}(2x) - \pi) e^x$$

30. Verifique que não pode aplicar a regra de L' Hôpital e calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$$

31. Para um parâmetro real  $a > 0$ , considere a função  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{a+x}{\sqrt{ax}}.$$

- (a) Determine o extremo relativo de  $f$ .  
 (b) Use a alínea anterior para mostrar que a média geométrica de dois reais positivos  $a$  e  $b$  não é superior à respectiva média aritmética, isto é,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

32. Considere a função quadrática  $f$  definida por  $f(x) = x^2$ .

- (a) Se a variável  $x$  sofrer uma variação desde um valor fixo  $a$  até  $x = a + \Delta x$  então qual a correspondente variação de  $f$ :

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) ?$$

- (b) Calcule,  $dy$ , o diferencial de  $f$  em  $x = a$  relativamente ao acréscimo  $\Delta x$ .  
 (c) Mostre que  $\Delta y$  é aproximadamente igual a  $dy$  quando  $\Delta x$  tender para zero.  
 (d) Considerando  $f(a)$  como a área de um quadrado de lado  $a$ , dê uma interpretação geométrica de  $\Delta y$  e de  $dy$ .  
 (e) Calcule um valor aproximado de  $(1.003)^2$ .

33. Seja  $f$  a função irracional definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ .

- (a) Calcule as derivadas laterais de  $f$  em  $x = 0$ .  
 (b) Estude a monotonía e as concavidades de  $f$  tendo em vista o esboço do gráfico de  $f$ .  
 (c) Calcule o diferencial de  $f$  no ponto  $a = 1$  relativamente ao acréscimo  $\Delta x$ .  
 (d) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1.  
 (e) Mostre que

$$\sqrt[3]{(1 + \Delta x)^2} \approx 1 + \frac{2}{3}\Delta x$$

sempre que  $\Delta x$  esteja suficientemente próximo de 0. A este resultado chama-se regra de aproximação incremental de  $f$  em torno de  $x = 0$ .

(f) Use o resultado anterior para o cálculo aproximado dos valores  $\sqrt[3]{1.0201}$ ,  $\sqrt[3]{1.21}$  e  $\sqrt[3]{0.56}$ .  
 34. Seja  $f$  a função definida por  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

- (a) Indique o domínio de  $f$ .

- (b) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1}.$$

- (c) Estude a monotonía de  $f$  e indique os extremos globais de  $f$ .

- (d) Mostre que:

$$f''(x) = -\frac{1}{f^3(x)}, \quad |x| > 1.$$

- (e) Mostre que:

$$0 \leq f(x) \leq |x|$$

para todo o  $x$  pertencente ao domínio.

- (f) Esboce o gráfico de  $f$ .

35. Sabendo que as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são definidas, respectivamente, por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

para todo o real  $x$ .

- (a) Mostre que:

(i)  $\cosh x + \sinh x = e^x$       (ii)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(iii)  $\cosh x > \sinh x$       (iv)  $\frac{\sinh x}{\cosh x} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$

- (b) Verifique que:  $(\cosh x)' = \sinh x$  e  $(\sinh x)' = \cosh x$ .

- (c) Trace os gráficos dessas funções, após a análise dos seguintes ítems:

- Simetria;
- Pontos de intersecção com os eixos coordenados;
- Assíntotas verticais, horizontais e oblíquas;
- Intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos, contradomínio;
- Concavidades e pontos de inflexão.

36. Considere mais duas funções trigonométricas, designadas por secante e co-secante, respectivamente, definidas por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cosec x = \frac{1}{\sin x}.$$

- (a) Indique os respectivos domínios.

- (b) Justifique que ambas as funções são periódicas de período  $2\pi$ .

- (c) Mostre que:

(i)  $\sec^2 x = 1 + \tg^2 x$       (ii)  $\sec^2 x + \cosec^2 x = \sec^2 x \cosec^2 x$

(iii)  $\sec x \cosec x = \frac{2}{\sin 2x}$       (iv)  $\frac{\sec x}{\cosec x} = \tg x$

- (d) Verifique que:  $(\sec x)' = \sec x \tg x$  e  $(\cosec x)' = -\frac{\cosec x}{\tg x}$ .

- (e) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sec x \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \cosec x.$$

- (f) Estude os ítems referidos no exercício anterior tendo em vista o esboço dos gráficos dessas funções.

- (g) Resolva a equação  $\sec x = \cosec x$ .

37. Suponha que uma empresa para produzir  $x$  unidades de um produto estimou o seguinte custo total, em unidades monetárias (u. m.):

$$C(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 500x + 200.$$

- (a) Qual o acréscimo de custo correspondente a um aumento de produção de 3 para 4 unidades?

- (b) Indique, recorrendo ao cálculo diferencial, um valor aproximado para o acréscimo de custo referido em (a).

- (c) Interprete os resultados obtidos.

38. Suponha que o custo total de produção é dado, em unidades monetárias (u. m.), por

$$C(x) = 0.5x^3 - 9x^2 + 60x + 100$$

sendo  $x$  a quantidade de unidades produzidas de um produto.

- (a) Estude a monotonía e as convavidades da função custo total.  
 (b) Interprete economicamente os resultados obtidos em (a).  
 (c) Calcule o custo médio e o custo marginal correspondente a  $x$  unidades de produção.  
 (d) Determine o número de unidades produzidas que minimiza a função custo médio e indique o valor do custo médio mínimo.  
 (e) Esboce os gráficos das funções custo total, custo marginal e custo médio.
39. Suponha que o custo total de produção de  $x$  unidades de um produto é dado, em unidades monetárias (u. m.), por

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 100.$$

Assumindo que o número total de unidades produzidas é igual à procura de mercado, então na venda de  $x$  unidades pratica-se um preço unitário, em unidades monetárias (u. m.), por

$$p(x) = x^2 - 18x + 108, \quad 0 < x < 9.$$

- (a) Calcule o custo marginal correspondente a  $x$  unidades de produção.  
 (b) Calcule a receita marginal correspondente a  $x$  unidades de produção.  
 (c) Determine o número de unidades que maximiza a função lucro e indique o valor do lucro máximo.
40. Seja  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva e diferenciável. Então a elasticidade de  $f$  em cada ponto  $x$  define-se por

$$\varepsilon_f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}.$$

Mostre que:

- (a) Se  $f$  é crescente então a elasticidade de  $f$  não é negativa em  $\mathbb{R}^+$ ;  
 (b) Se  $f$  é decrescente em então a elasticidade de  $f$  não é positiva em  $\mathbb{R}^+$ ;  
 (c) A elasticidade de  $f$  também pode ser calculada através de

$$\varepsilon_f(x) = \frac{[\ln(f(x))]'}{(\ln x)'},$$

41. Suponha que a procura de  $q$  unidades de um bem relativamente ao seu preço unitário  $p$  em unidades monetárias (u. m.) é descrita por

$$q(p) = 70 - 5p, \quad 0 < p < 14.$$

- (a) Qual a quantidade vendida ao preço de 8 u. m.?  
 (b) Determine a elasticidade da função procura quando o preço é de 8 u. m..  
 (c) Interprete economicamente o resultado obtido na alínea anterior.  
 (d) Para que preço a elasticidade da função procura é igual a - 1?  
 (e) Determine a elasticidade, em valor absoluto, da função procura relativamente ao preço.  
 (f) Esboce o gráfico do módulo da elasticidade da função procura relativamente ao preço.
42. Sendo  $m$  um número racional positivo e diferente de um, considere a função  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^m$ .

Mostre que:

- (a) Se  $m > 1$  então  $f'_+(0) = 0$ ;  
 (b) Se  $m < 1$  então  $f'_+(0) = +\infty$ ;  
 (c) A função  $f$  é estritamente crescente;  
 (d) A elasticidade de  $f$  é constante para todos os valores de  $x > 0$ , sendo sempre igual a  $m$ .



## 4. Primitivização

### 4.1 Definições e propriedades

Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . A introdução do conceito de primitiva – ou de anti-derivada, como conhecido em alguns livros – passa por resolver o seguinte problema matemático, recíproco ao tratado no capítulo 3 **Derivadas e Aplicações**:

*Dada uma função  $f$  definida num intervalo  $I$ , qual é a curva de equação  $y = F(x)$  cuja taxa de variação instantânea é representada por*

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \text{ para todo o } x \in I?$$

✓ Na prática, a formulação geométrica acima permite-nos concluir que a solução do problema dado é equivalente a dizer que pretendemos determinar uma função  $F$  tal que o diferencial de  $F$  é dado por

$$dF(x) = f(x)dx.$$

**Definição 4.1.1 — Primitiva de  $f$ .** Dizemos que a função  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $I \subseteq \mathbb{R}$  se, e só se:

- $F$  é diferenciável em  $I$ ;
- $F$  é solução da equação

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo o } x \in I.$$

✓ Caso exista, a primitiva de  $f$  não é única, como já tínhamos verificado anteriormente no capítulo 3 **Derivadas e Aplicações** – vide **Corolário 3.3.3** e **Corolário 3.3.4**.

De facto, o **Corolário 3.3.4** pode ser reescrito da seguinte forma no contexto de primitivas:

**Corolário 4.1.1 — Primitivas de uma função  $f$ .** Sejam  $F$  e  $G$  duas primitivas de  $f$  em  $I$ . Então existe uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{para todo o } x \in I.$$



**O Corolário 4.1.1** diz-nos essencialmente que quaisquer duas primitivas de uma mesma função  $f$  diferem numa constante, igual para todos os valores de  $x$ .

Graficamente, este facto corresponde a afirmar que **duas funções diferenciáveis  $F$  e  $G$  em  $I$  são primitivas de uma função  $f$  caso o gráfico de  $G$  pode ser obtido a partir do gráfico de  $F$  através de uma translação na vertical, e vice versa.**

■ **Exemplo 4.1 — Primitivas de funções trigonométricas.** As regras de derivação obtidas no **Corolário 3.2.10** do capítulo **3 Derivadas e Aplicações**, assim como relações trigonométricas

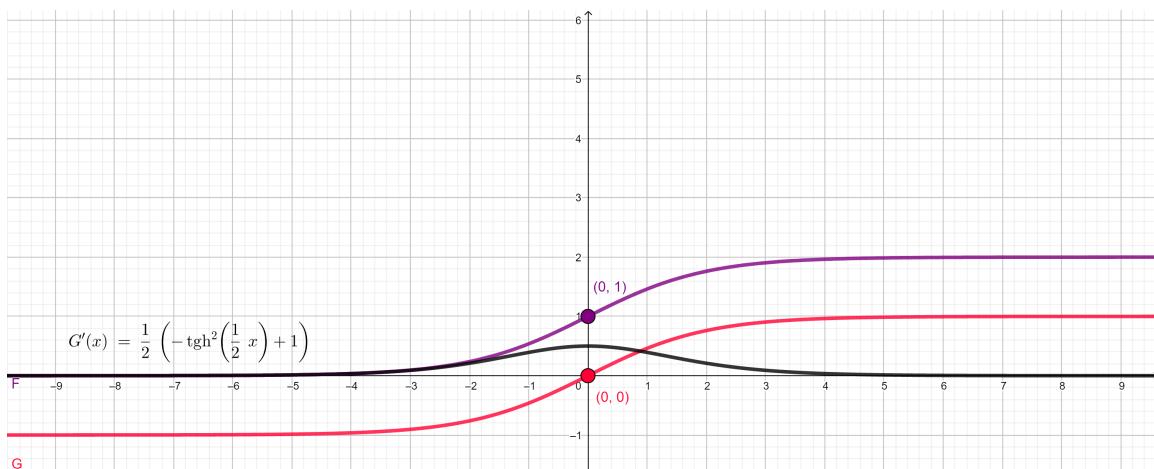
$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \& \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

obtidas no **Exemplo 1.25** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** permitem-nos confirmar que:

- $x \mapsto \sin^2(x)$  e  $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x)$  são primitivas de  $x \mapsto \sin(2x)$  em  $\mathbb{R}$ .
- $x \mapsto \cos^2(x)$  e  $x \mapsto \frac{1}{2} \cos(2x)$  são primitivas de  $x \mapsto -\sin(2x)$  em  $\mathbb{R}$ ;

■ **Exemplo 4.2 — Função logística vs. função tangente hiperbólica.** No gráfico abaixo encontra-se representado:

- o gráfico da função  $F$  definida por  $F(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}$  (a roxo);
- o gráfico da função  $G$  definida por  $G(x) = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$  (a magenta).
- o gráfico da função derivada  $G'$ , dada por  $G'(x) = \frac{1}{2}(1 - \tanh^2\left(\frac{x}{2}\right))$  (a preto).



O gráfico acima corresponde essencialmente ao conjunto de funções ilustradas no **Desafio 1.51** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**.

Em particular, é possível verificar graficamente que  $G(x) = F(x) - 1$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Podemos facilmente retirar pelo gráfico de  $F$  e  $G$  que ambas são funções diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ , assim como ambas são primitivas de  $f = G'$  em  $\mathbb{R}$ .

**Fica ao cargo do leitor verificar analiticamente que a função derivada  $F'$ , dada por**

$$F'(x) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

coincide com  $G'$ . ■

**Desafio 4.1 — Primitivas de funções trigonométricas.** Verifique que as funções

$$x \mapsto \sec^2(x) \text{ e } x \mapsto \operatorname{tg}^2(x)$$

são primitivas de  $x \mapsto 2 \sec^2(x) \operatorname{tg}(x)$  em  $\mathbb{R}$ .

Com o próximo desafio, pretende-se que estabeleça um paralelo entre o **Corolário 4.1.1**, e o que aprendeu na subseção **1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**.

**Desafio 4.2 — Primitivas de funções trigonométricas inversas.** Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), justificando sucintamente:

1. Existe uma constante  $C_1 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\arccos(x) = \arcsin(x) + C_1,$$

para todo o  $x \in [-1, 1]$ .

2. Existe uma constante  $C_2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$2 \arcsin(x) = \arccos(1 - 2x^2) + C_2,$$

para todo o  $x \in [0, 1]$ .

3. Existe uma constante  $C_3 \in \mathbb{R}$  tal que

$$2 \arcsin(x) = \arccos(1 - 2x^2) + C_3,$$

para todo o  $x \in [-1, 1]$ .

4. Existe uma constante  $C_4 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = C_4,$$

para todo o  $x \neq 0$ .

5. Para todo o  $x \neq 0$ , as funções  $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$  e  $\operatorname{arccotg}(x)$  são ambas primitivas de  $-\frac{1}{1+x^2}$ . Adicionalmente

$$\operatorname{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Notação 4.1 — Integral Indefinido.** Sendo  $C$  uma constante real e arbitrária, ao conjunto de todas as primitivas de  $f$  escritas na forma

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

chama-se **integral indefinido** de  $f$  e à função  $f$  chama-se **função integranda**.

O **conceito de integral indefinido** de  $f$  representa uma família de funções, em que o declive das rectas tangentes aos respectivos gráficos em diferentes pontos com abcissa  $x$  é o mesmo.

Ao processo que consiste em determinar uma primitiva e somar-lhe uma constante arbitrária de modo a obter o integral indefinido de uma função chama-se **primitivação**. A constante  $C$  designamos por constante de primitivação.

■ **Exemplo 4.3 — Primitivação da função constante.** O integral indefinido da função constante, definida por  $f(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , é dado por

$$\int a dx = ax + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária, uma vez que  $(ax + C)' = a$ .

Porém, a derivada da função constante é dada por  $f'(x) = 0$  para todo  $x$ , logo  $\int 0 dx = C$ . ■



Reparemos que, após a derivação de  $f(x) = a$ , se primitivarmos podemos não recuperar  $f(x) = a$ .

Deste modo, podemos afirmar que primitivação e derivação são processos inversos a menos de uma constante, ou seja,

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x) \quad \& \quad \int f'(x) dx = f(x) + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  denota uma constante arbitrária.

O cálculo de primitivas pode ainda ser simplificado se recorrermos às seguintes propriedades, análogas às propriedades de derivação estudadas anteriormente – vide **Teorema 3.2.1** do **Capítulo 3 Derivadas e Aplicações**.

**Teorema 4.1.2 — Propriedades envolvendo integrais indefinidos.** Se cada uma das funções  $f$  e  $g$  admite uma primitiva e  $k \in \mathbb{R}$ , então as seguintes propriedades são verdadeiras:

- **Soma de funções:**  $f + g$  também admite primitiva. Adicionalmente,

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- **Função multiplicada por uma constante:**  $kf$  também admite primitiva. Adicionalmente

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

para todo real  $k \neq 0$ .

■ **Exemplo 4.4 — Primitivação da função afim.** A função afim é definida por  $f(x) = ax + b$ , onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$  são constantes fixas. O seu integral indefinido é dado por

$$\int (ax + b) dx = \int ax dx + \int b dx = a \int x dx + \int b dx = a \frac{x^2}{2} + bx + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 4.5 — Declive da recta tangente.** Suponha que o declive da recta tangente ao gráfico de uma certa função  $F$  em cada ponto  $P = (x, F(x))$  é igual ao simétrico da abcissa de  $P$ , ou seja,

$$F'(x) = -x$$

Esta condição é válida para a família de funções quadráticas:

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + C$$

sendo  $C$  uma constante real e arbitrária. Além disso, se fixarmos o ponto  $P = (0, 1)$  então existe uma única função  $F$ , cujo gráfico contém o ponto. Esta está definida por

$$F_1(x) = -\frac{x^2}{2} + 1.$$

■



Admitindo que conhecemos  $f(x)$  e  $F(x)$ , se quisermos mostrar que

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

podemos derivar  $F$  para recuperar a função integranda  $f$ .

■ **Exemplo 4.6 — Primitiva envolvendo função logarítmica.** Sem recorrer à primitivação, vamos verificar a seguinte fórmula de primitivação

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Derivando, obtemos:

$$\begin{aligned} \left( \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \right)' &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1+x(1+x^2)^{-1/2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Atendendo a que a primitivação é o processo inverso da derivação a menos de uma constante, concluímos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

como pretendido. ■



Note que a primitiva da função  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  é, a menos da constante  $C$ , a inversa da função hiperbólica  $x \mapsto \sinh(x)$ , denotada por

$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

no **Desafio 1.50** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**.

■ **Exemplo 4.7 — Primitiva envolvendo produto de funções exponenciais e trigonométricas.** Decorre das propriedades das primitivas que a função  $f$  que satisfaz a igualdade

$$\int f(x)dx = e^{-2x}(\cos(3x) + \sin(3x)) + C$$

é determinada a partir da seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^{-2x}(\cos(3x) + \sin(3x)) + C)' \\ &= (e^{-2x}(\cos(3x) + \sin(3x)))' + C' \\ &= -2e^{-2x}(\cos(3x) + \sin(3x)) + e^{-2x}(-3\sin(3x) + 3\cos(3x)) \\ &= -e^{-2x}(5\sin(3x) - \cos(3x)). \end{aligned}$$

■

**Desafio 4.3 — Primitivas envolvendo quociente de funções trigonométricas.** Determine a expressão  $f(x)$  que satisfaz a igualdade:

$$\int f(x)dx = -\ln|\cos(x) - \sin(x)| + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  denota uma constante arbitrária.

**Desafio 4.4 — Exame de Recurso, 03/09/2021.** Determine a expressão  $f(x)$  que satisfaz a igualdade:

$$\int \frac{f(x)}{x^2 - 2x + 2}dx = \ln\left(\sqrt{x^2 - 2x + 2}\right) + \arctan(x-1) + C,$$

onde  $C$  denota uma constante arbitrária.

**Desafio 4.5 — Teste os seus conhecimentos sobre derivadas vs. primitivas.** Sendo  $f$  a função logística do **Desafio 1.51** – vide capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos:

$$f(x) = \frac{1}{1+a^{-x}},$$

classifique as afirmações abaixo de verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), justificando sucintamente:

1.  $(f(x) - 1)^2 = \ln(a)a^{-x}f'(x);$
2.  $\frac{4}{\ln(a)}f'(x) = 1 - (f(x) - 1)^2;$
3.  $f''(x) = -\frac{\ln(a)}{2}(f(x) - 1 - (f(x) - 1)^3);$
4.  $\int f'(x)dx = \frac{a^x}{\ln(a)}(f(x) - 1)^2 + C, C \in \mathbb{R};$
5.  $\int (1 - (f(x) - 1)^2)dx = \frac{\ln(a)}{4}f(x) + C, C \in \mathbb{R};$
6.  $\int f''(x)dx = \frac{\ln(a)(1 - (f(x) - 1)^2)}{4} + C, C \in \mathbb{R}.$

## 4.2 Regras de Primitivação Imediata

Começamos por apresentar regras de primitivação imediata para algumas funções elementares. Em primeiro lugar, consideraremos as funções potência de base  $x$  e as funções exponenciais de expoente  $x$ .

### 4.2.1 Exemplos

■ **Exemplo 4.8 — Primitivação da função potência definida por**  $f(x) = x^{-1}$ . Dada  $f(x) = \frac{1}{x}$  procuramos encontrar  $F(x)$  cuja derivada verifique  $F'(x) = \frac{1}{x}$ . Recorrendo ao cálculo de derivadas podemos escolher  $F(x) = \ln|x|$  uma vez que

$$F(x) = \ln|x| \implies F'(x) = \frac{1}{x}.$$

Assim concluímos que

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 4.9 — Primitivação de funções potência definidas por**  $f(x) = x^n$ ,  $n \neq -1$ . Seja  $f(x) = x^n$ ,  $n \neq -1$ . Procuramos  $F(x)$  cuja derivada verifique  $F'(x) = x^n$ . Usando a regra de derivação da potência vem

$$g(x) = x^{n+1} \implies g'(x) = (n+1)x^n.$$

Podemos escolher  $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$  uma vez que

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \implies F'(x) = x^n.$$

Daí resulta

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 4.10 — Primitivação das funções exponenciais definidas por**  $f(x) = a^x$  ( $a \neq 0, 1$ ). Seja  $f(x) = a^x$ ,  $a \in ]0, 1[$  ou  $a \in ]1, +\infty[$ . Procuramos  $F(x)$  cuja derivada verifique  $F'(x) = a^x$ . Recordamos a fórmula de derivação

$$g(x) = a^x \implies g'(x) = a^x \ln a.$$

Vamos escolher  $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$  dado que

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} \implies F'(x) = a^x.$$

Daí resulta

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 4.11 — Distribuição de Poisson.** Neste exemplo iremos ilustrar a aplicabilidade da *distribuição de Poisson*<sup>1</sup> no contexto de primitivas.

Note que esta distribuição corresponde à família de funções  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , definida pontualmente por

$$p_n(x) = \frac{e^{-x} x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<sup>1</sup>Vide o link <https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/poisson-distribution>

Decorre da regra da derivação do produto que  $p_{n+1}$  satisfaz a propriedade

$$p'_{n+1}(x) = p_n(x) - p_{n+1}(x) \quad [\text{verifique!}].$$

Assim, a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$F(x) = p_{n+1}(x)$$

é uma primitiva da função  $p_n - p_{n+1}$  no intervalo  $I = \mathbb{R}$ , e

$$\int (p_n(x) - p_{n+1}(x))dx = p_{n+1}(x) + C,$$

com  $C \in \mathbb{R}$  constante arbitrária, uma família de primitivas da função  $p_{n+1}$ .

**Deixamos ao cargo do leitor verificar ainda que, para valores de  $n > 1$ , a fórmula de primitivação também é satisfeita:**

$$\int (p_{n-1}(x) - 2p_n(x) + p_{n+1}(x))dx = p_n(x) - p_{n+1}(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

**Desafio 4.6 — Análogo ao Exemplo 4.11.** Para cada  $n = 1, 2, \dots$ , determine a derivada da função

$$F_n(x) = \frac{4^x x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De seguida, use a derivada de  $F_n$  para determinar a função  $f$  que satisfaz

$$\int f(x)dx = F_n(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

Consideremos as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico introduzidas e estudadas na subseção 1.5.5 do capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos.

■ **Exemplo 4.12 — Primitivação das funções hiperbólicas.** Recorrendo ao cálculo de derivadas ilustrado no Desafio 3.9 do capítulo 3 Derivadas e Aplicações:

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad \wedge \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

obtemos, respetivamente

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \quad \wedge \quad \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

■

Consideremos agora as funções trigonométricas introduzidas e estudadas na subseção 1.5.8 do capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos.

■ **Exemplo 4.13 — Primitivação das funções trigonométricas usuais.** Recorrendo ao cálculo de derivadas vem

$$(\sin x)' = \cos x \quad \wedge \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Daí obtemos respetivamente

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad \wedge \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. De modo análogo, prova-se que

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg}(x) + C \quad \wedge \quad \int \sec x \operatorname{tg}(x) dx = \sec x + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária, uma vez que

$$(\operatorname{tg}(x))' = \sec^2 x \quad \wedge \quad (\sec x)' = \sec x \operatorname{tg}(x).$$

■

**Desafio 4.7 — Primitivas envolvendo funções cotangente e cosecante.** Determine as funções  $f, g$  e  $h$  para as quais

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \operatorname{cotg}(x) + C_1, \\ \int g(x) dx &= \operatorname{cosec}(x) + C_2, \\ \int h(x) dx &= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cosec}(x) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{cotg}(x) + C_3, \end{aligned}$$

onde  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$  são constantes arbitrárias.

Por fim, consideremos duas funções trigonométricas inversas arcoseno e arcotangente, e um exemplo análogo, envolvendo a derivação de funções hiperbólicas inversas.

■ **Exemplo 4.14 — Primitivação das funções trigonométricas inversas.** Na subseção 3.2.5 **Derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas** do capítulo 3 **Derivadas e Aplicações** verificámos que

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \wedge \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Estas regras de derivação permitem-nos concluir que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad \wedge \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

■

■ **Exemplo 4.15 — Revisão da fórmula de derivação da função inversa.** Suponhamos agora que pretendemos determinar a função  $f$  tal que

$$\int f(x) dx = \cosh^{-1}(x) + C,$$

onde  $\cosh^{-1} : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  denota a inversa da função cosseno hiperbólico.

Primeiramente, observe que o **Teorema 3.2.4** abordado no capítulo 3 **Derivadas e Aplicações** permite-nos escrever

$$(\cosh^{-1})'(x) = \frac{1}{\cosh'(y)}, \quad \text{onde } y = \cosh^{-1}(x).$$

Da equivalência

$$y = \cosh^{-1}(x) \iff x = \cosh(y)$$

e das identidades

$$\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1 \quad \text{e} \quad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

obtemos, para valores de  $x > 1$ , que

$$\begin{aligned}
 (\cosh^{-1})'(x) &= \frac{1}{\cosh'(y)} \\
 &= \frac{1}{\sinh(y)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(y) - 1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

Portanto, a família de funções  $x \mapsto \cosh^{-1}(x) + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) fornece-nos uma família de primitivas para a função  $f$  definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

■



À semelhança do raciocínio adoptado na seção **3.2.5 Derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas** do capítulo **3 Derivadas e Aplicações**, não foi necessário em momento algum determinar uma fórmula explícita de  $\cosh^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow [1, +\infty[$  para calcular a sua derivada. Apenas precisámos de garantir a monotonia do gráfico, via o estudo da primeira derivada de  $x \mapsto \cosh(x)$  – a função  $x \mapsto \sinh(x)$  – e de excluir os pontos  $x = \cosh(y)$ , para os quais  $\sinh(y) \neq 0$ .

Para tal, recorremos exclusivamente aos resultados já abordados no **Desafio 1.48** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**, e no **Desafio 3.9** do capítulo **3 Derivadas e Aplicações**.

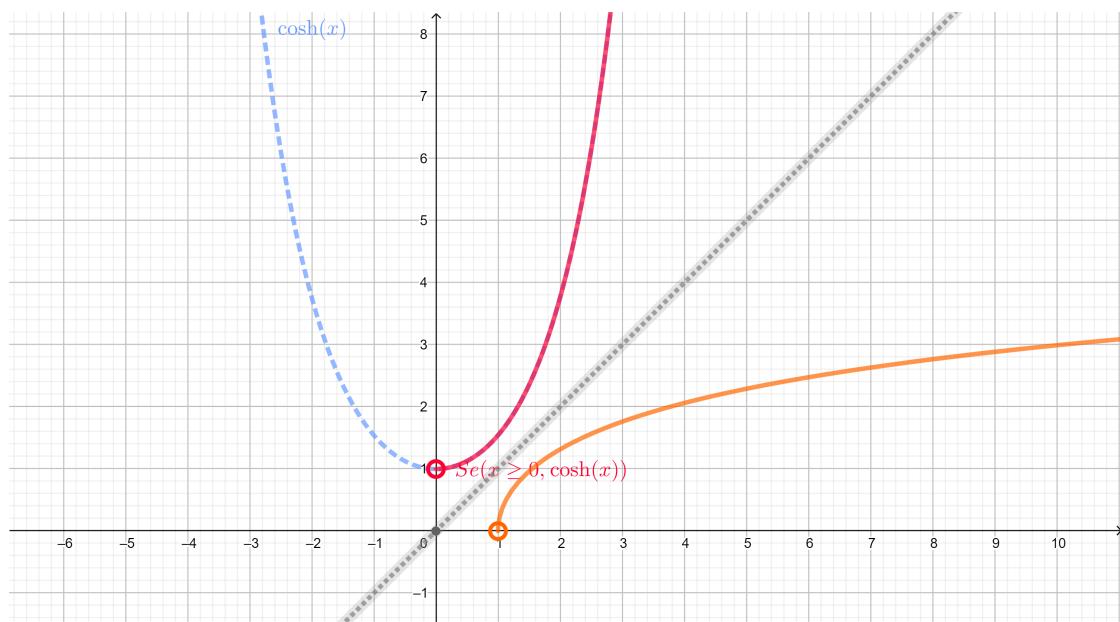


Figura 4.1: Ilustração gráfica do **Exemplo 4.15** com recurso **Corolário 1.4.6**. Para determinar graficamente a **inversa da função cosseno hiperbólico** como sendo o gráfico representado a laranja, obtido por reflexão do gráfico a magenta relativamente à recta  $y = x$  (recta pontilhada a cinza) considerámos apenas os valores de  $x \geq 0$  – que correspondem aos valores em que  $x \mapsto \cosh(x)$  é estritamente crescente (gráfico a magenta), de modo a garantirmos a injectividade. Adicionalmente, para determinarmos a derivada da função inversa, excluímos o ponto  $y$  para o qual  $\sinh(y) = 0$ . Da equação  $x = \cosh(y)$  retirámos que o ponto  $(0, 1) = (0, \cosh(0))$  – ponto aberto aberto a magenta – do gráfico da função cosseno hiperbólico deverá ser excluído no cálculo da derivada da função inversa via **Teorema 3.2.4**. Com esta restrição garantimos automaticamente a exclusão do o ponto  $(1, 0) = (1, \cosh^{-1}(1))$  – ponto aberto aberto a laranja – do cálculo da derivada  $(\cosh^{-1})'(x)$ .

#### 4.2.2 Tabela de Primitivação Imediata

Quando se pretende determinar o integral indefinido de  $f$ , é preciso procurar outra função  $F$  cuja derivada  $F'$  seja igual à função integranda  $f$ . A função encontrada é então igual, a menos de uma constante, ao integral indefinido de  $f$ .

Este procedimento decorre imediatamente da construção de integral indefinido de  $f$ . Assim parece óbvio que a partir de uma tabela com regras de derivação se obtém uma tabela correspondente com regras de primitivação e vice-versa.

A tabela constituída por um conjunto de primitivas e construída dessa forma diz-se tabela de primitivação imediata.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$
$x^p$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\operatorname{tg} x$	$\ln \sec x  + C$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x + C$
$\sec x \operatorname{tg} x$	$\sec x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Tabela 4.1: REGRAS DE PRIMITIVAÇÃO IMEDIATA

### 4.2.3 Regras de Primitivação Imediata Generalizadas

Consideremos agora uma mudança de escala na variável independente.

■ **Exemplo 4.16 — Primitiva envolvendo a função cosseno.** Seja  $f(x) = \cos(\alpha x)$ ,  $\alpha \neq 0$ . Procuramos  $F(x)$  cuja derivada verifique  $F'(x) = \cos(\alpha x)$ . Recorrendo ao cálculo de derivadas vem

$$(\sin(\alpha x))' = \alpha \cos(\alpha x)$$

Daí obtemos

$$\int \alpha \cos(\alpha x) dx = \sin(\alpha x) + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

Reparemos que podemos multiplicar uma expressão por uma constante não nula  $\alpha$  e pelo seu inverso  $1/\alpha$ , isto é,

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \alpha f(x).$$

Então temos

$$\int \cos(\alpha x) dx = \int \frac{1}{\alpha} \alpha \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int \alpha \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) + C.$$

■



De modo análogo, prova-se que

$$\int \sin(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

**Desafio 4.8 — Primitivas envolvendo funções trigonométricas.** Calcule as seguintes primitivas:

$$\int \sin(\alpha x + \beta) dx \quad \& \quad \int \cos(\alpha x + \beta) dx.$$

■ **Exemplo 4.17 — Primitiva envolvendo função arco tangente.** Seja  $f(x) = \frac{1}{\beta^2 + x^2}$ ,  $\beta \neq 0$ . Procuramos  $F(x)$  cuja derivada verifique  $F'(x) = f(x)$ . Recorrendo ao cálculo de derivadas vem

$$\left( \arctan\left(\frac{x}{\beta}\right) \right)' = \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{\beta^2 + x^2}{\beta^2}} = \frac{\beta}{\beta^2 + x^2}$$

Daí obtemos

$$\int \frac{\beta}{\beta^2 + x^2} dx = \arctan\left(\frac{x}{\beta}\right) + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

Reparemos que podemos multiplicar uma expressão por uma constante não nula  $\beta$  e pelo seu inverso  $1/\beta$ , isto é,

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \beta f(x).$$

Então temos

$$\int \frac{1}{\beta^2 + x^2} dx = \int \frac{1}{\beta} \frac{\beta}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x}{\beta}\right) + C.$$

■



De modo análogo, para  $\beta > 0$  prova-se que

$$\int \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{\beta}\right) + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

**Desafio 4.9 — Primitiva envolvendo função arco cosseno.** Para  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta \neq 0$ , determine a função  $f$  tal que

$$\int f(x) dx = \arccos\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right) + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

O que pode concluir acerca da primitiva  $\int f'(x) dx$ ?

### 4.3 Primitivação envolvendo composição de funções

**Teorema 4.3.1** Dada a função integranda  $f$ , suponhamos que existem funções deriváveis  $u$  e  $g$  tais que

$$f(x) = u'(x)g'(u(x)).$$

Então a função composta  $F$ , definida por  $F(x) = g(u(x))$ , é uma primitiva de  $f$  e

$$\int f(x) dx = g(u(x)) + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

*Demonstração.* Com efeito, pela regra da derivação da função composta – vide **Teorema 3.2.3** do Capítulo 3 Derivadas e Aplicações – temos

$$F'(x) = (g \circ u)'(x) = u'(x)g'(u(x)) = f(x).$$

■

Para cada escolha apropriada de  $g$  obtemos uma fórmula de primitivação.

**Corolário 4.3.2 — Primitivação envolvendo a função arco tangente.** Por exemplo, fazendo  $g(x) = \arctan x$  temos

$$f(x) = u'(x) \frac{1}{1 + u^2(x)} = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$$

uma vez que

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Logo

$$\int \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)} dx = \arctan(u(x)) + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

**Desafio 4.10 — Primitiva envolvendo a equação da parábola.** Verifique que

$$\int \frac{1}{a(x-h)^2+k} dx = \frac{1}{\sqrt{ak}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a}{k}}(x-h) \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

desde que as constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  satisfaçam as condições  $a \neq 0$  e  $\frac{a}{k} > 0$ .

De seguida, use a igualdade acima para determinar a primitiva

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx.$$

### 4.3.1 Primitação envolvendo a derivada logarítmica

Suponhamos que pretendemos verificar a fórmula

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

que aparece na subseção 4.2.2 Tabela de Primitação Imediata.

Tendo em conta que

$$\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(-\sin x)}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$$

precisamos de uma fórmula para determinar a primitivação do quociente entre a derivada da função e a própria função.

**Corolário 4.3.3 — Primitivação do quociente entre a derivada e a função.** Seja  $u$  uma função derivável. Então

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

*Demonstração.* Usando o **Teorema 4.3.1** com  $g(x) = \ln |x|$  vem

$$f(x) = u'(x) \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

■ **Exemplo 4.18 — Primitivação da função tangente.** Verificamos que

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Atendendo a que  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  podemos escrever

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec x| + C.$$

■ **Exemplo 4.19 — Primitivação envolvendo funções racionais.** Verificamos que

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante real arbitrária.

**Desafio 4.11 — Primitivas envolvendo funções hiperbólicas.** Determine

$$\int \frac{\cosh(\alpha x + \beta)}{\sinh(\alpha x + \beta) + \alpha + \beta} dx,$$

assumindo que  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

### 4.3.2 Primitivação de funções potência

**Corolário 4.3.4 — Primitivação do produto entre a função e a sua derivada.** Seja  $u$  uma função derivável. Então

$$\int u'(x)u(x) dx = \frac{1}{2}u^2(x) + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

*Demonstração.* Aplicando a regra da derivada do produto  $u \times u$  obtemos

$$\begin{aligned} (u \times u)'(x) = 2u'(x)u(x) &\iff \frac{1}{2}(u \times u)'(x) = u'(x)u(x) \\ &\iff \left(\frac{1}{2}u^2\right)'(x) = u'(x)u(x). \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.20 — Primitivação envolvendo funções hiperbólicas.** As propriedades de derivação das funções hiperbólicas ilustradas no **Desafio 3.9** do **Capítulo 3 Derivadas e Aplicações** permitem-nos obter duas fórmulas distintas de primitivação:

$$\int \sinh x \cosh x dx = \int \sinh x (\sinh x)' dx = \frac{\sinh^2 x}{2} + C_1,$$

$$\int \sinh x \cosh x dx = \int (\cosh x)' \cosh x dx = \frac{\cosh^2 x}{2} + C_2,$$

onde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  são constantes arbitrárias.

Adicionalmente, a propriedade

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

ilustrada no **Desafio 1.48** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**, permite-nos concluir que ambas as primitivas diferem pela constante  $C = \frac{1}{2}$ , uma vez que

$$\frac{\cosh^2 x}{2} = \frac{\sinh^2 x}{2} + \frac{1}{2},$$

o que atesta que ambas as primitivas determinadas satisfazem as condições do **Corolário 3.3.4** do **Capítulo 3 Derivadas e Aplicações**. ■

 Poderia ter também considerado a identidade  $\sinh x \cosh x = \frac{\sinh(2x)}{2}$  para concluir que a função

$$x \mapsto \frac{\cosh(2x)}{4}$$

também é uma primitiva de  $x \mapsto \sinh x \cosh x$  – neste caso, imediata.

■ **Exemplo 4.21 — Primitivas envolvendo funções trigonométricas inversas.** Verificamos que

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin x (\arcsin x)' dx = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

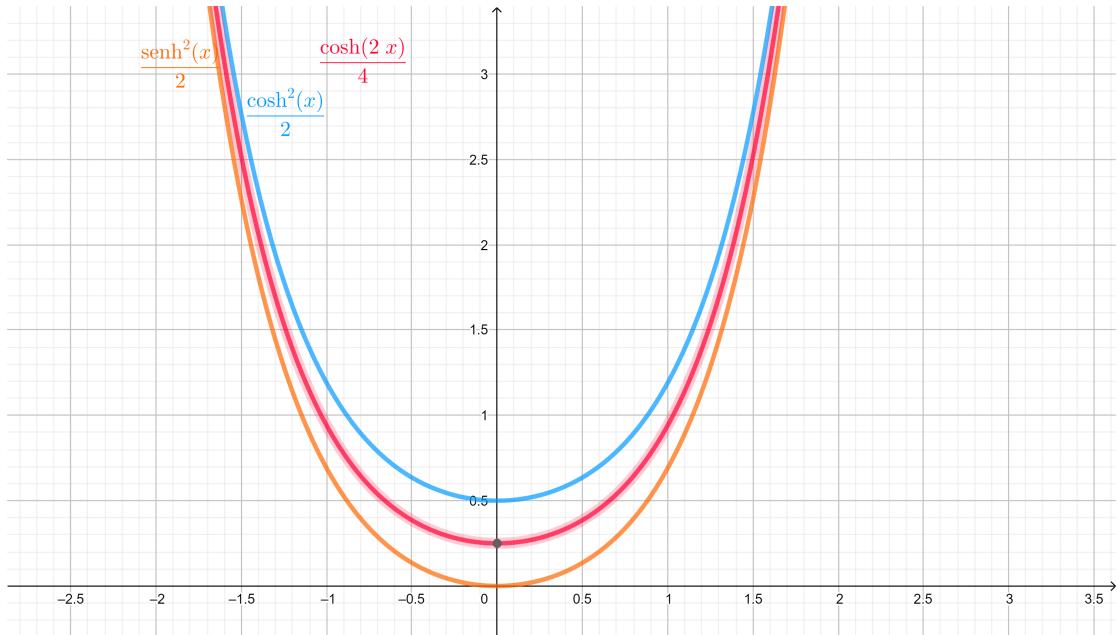


Figura 4.2: Representação gráfica das primitivas obtidas **Exemplo 4.20**, e da primitiva imediata – gráfico a magenta – caso tivéssemos usado a identidade identidade  $\sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh(2x)$ .

A propriedade acima ilustrada pode ser ainda generalizada para funções potência de ordem  $p$ , com  $p \neq -1$ .

**Corolário 4.3.5 — Primitivação de funções potência.** Seja  $u$  uma função derivável. Se  $p \neq -1$  então

$$\int u'(x)u^p(x)dx = \frac{u^{p+1}(x)}{p+1} + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

*Demonstração.* Usando a proposição com  $g(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$  vem

$$f(x) = u'(x) \frac{1}{p+1} (p+1)u^p(x) = u'(x)u^p(x).$$

■

■ **Exemplo 4.22 — Primitivação envolvendo funções potência.** Verificamos que

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{\sqrt{x^3} + 3x + 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx \\ &= \int (x^{3/2} + 3x + 3x^{1/2} + 1) x^{-1/3} dx \\ &= \int x^{7/6} + 3x^{2/3} + 3x^{1/6} + x^{-1/3} dx \\ &= \frac{6}{13}x^{13/6} + \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{18}{7}x^{7/6} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C \\ &= \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C, \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

■

**Desafio 4.12 — Primitivas envolvendo funções trigonométricas.** Calcule as primitivas abaixo:

1.  $\int \operatorname{tg}^2(x) \sec^2(x) dx;$
2.  $\int \operatorname{cotg}^3(x) \operatorname{cosec}^2(x) dx;$
3.  $\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{3 - 2\cos^2(x)}} dx.$

### 4.3.3 Primitivação de funções exponenciais

**Corolário 4.3.6 — Primitivação de funções exponenciais.** Seja  $u$  uma função derivável. Se  $a \in (]0, 1[ \cup ]1, +\infty[)$  então

$$\int u'(x) a^{u(x)} dx = a^{u(x)} + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

*Demonstração.* Usando o **Teorema 4.3.1** com  $g(x) = \frac{a^x}{\ln a}$  vem

$$f(x) = u'(x) \frac{1}{\ln a} a^{u(x)} \ln a = u'(x) \frac{a^{u(x)}}{\ln a}$$

■

**Exemplo 4.23 — Primitivação envolvendo funções exponenciais.** Verificamos que

$$\begin{aligned} \int e^x \cosh x dx &= \int e^x \frac{(e^x + e^{-x})}{2} dx = \frac{1}{2} \int (e^{2x} + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^{2x} dx + \frac{1}{2} \int 1 dx \\ &= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

■

#### 4.3.4 Tabela de Primitivação Generalizada

A tabela abaixo corresponde à tabela de primitivação imediata generalizada, obtida a partir do **Teorema 4.3.1**.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$u'(x)u^p(x)$ , $p \neq -1$	$\frac{u^{p+1}(x)}{p+1} + C$
$\frac{1}{\ln a} \frac{u'(x)}{u(x)}$	$\log_a  u(x)  + C$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\arctg(u(x)) + C$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$\arcsin(u(x)) + C$
$u'(x)a^{u(x)}$	$\frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$
$u'(x) \sinh(u(x))$	$\cosh(u(x)) + C$
$u'(x) \cosh(u(x))$	$\sinh(u(x)) + C$
$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + C$
$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + C$
$u'(x) \operatorname{tg}(u(x))$	$\ln  \sec(u(x))  + C$
$u'(x) \sec^2(u(x))$	$\operatorname{tg}(u(x)) + C$
$u'(x) \sec(u(x)) \operatorname{tg}(u(x))$	$\sec(u(x)) + C$

Tabela 4.2: REGRAS DE PRIMITIVAÇÃO IMEDIATA GENERALIZADAS

## 4.4 Métodos de Primitivação

### 4.4.1 Método de Primitivação por Partes

O integral indefinido de um produto de funções não é igual ao produto dos integrais indefinidos, isto é,

$$\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \int g(x)dx$$

Qual é então o desenvolvimento de

$$\int f(x)g(x)dx?$$

Seja  $g$  uma função derivável e  $f$  uma função que tenha uma primitiva  $F(x)$ . Aplicando a regra de derivação para o produto  $F(x)g(x)$  vem

$$(F(x)g(x))' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

sendo equivalente a

$$\int [F'(x)g(x) + F(x)g'(x)]dx = F(x)g(x)$$

Usando a propriedade da soma, vem ainda

$$\int F'(x)g(x)dx + \int F(x)g'(x)dx = F(x)g(x)$$

Atendendo a  $F'(x) = f(x)$  temos

$$\int f(x)g(x)dx + \int F(x)g'(x)dx = F(x)g(x)$$

Em geral, quando quiser primitivar um produto de duas funções  $f$  e  $g$ , pode aplicar o método de primitivação por partes:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

sendo  $F$  uma primitiva de  $f$ .

Tendo em vista a implementação do método, deve escolher-se de modo mais conveniente a função  $f$  a primitivar. Nesse sentido, vamos estabelecer algumas regras para o cálculo da primitiva do produto por esse método.

1. Quando se conhece a primitiva de apenas uma das funções, inicia-se o processo começando pela primitivação da própria.

#### ■ Exemplo 4.24

$$\begin{aligned} \int x \ln^2 x dx &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \ln x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

2. Registe-se que o método também se desenvolve para obter a primitivação de uma única função. Basta escolher  $f(x) = 1$  para começar a primitivar.

■ **Exemplo 4.25** Usando a fórmula de primitivação por partes, segue que

$$\begin{aligned}
 \int \ln(x^2) dx &= \int 1 \cdot \ln(x^2) dx \\
 &= \int x' \ln(x^2) dx \\
 &= x \ln(x^2) - \int x (\ln(x^2))' dx \\
 &= x \ln(x^2) - \int 2 dx \\
 &= x \ln(x^2) - 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

■



Com base na identidade  $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) podemos também concluir que

$$\int \ln(x^2) dx = 2x(\ln|x| - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■ **Exemplo 4.26**

$$\begin{aligned}
 \int \arcsin x dx &= \int 1 \cdot \arcsin x dx \\
 &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

■

3. Quando ambas as funções têm primitiva, o processo deve arrancar com a primitivação da função que menos se simplifica por derivação.

■ **Exemplo 4.27**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt[4]{(x+1)^3}} dx &= \int x(x+1)^{-3/4} dx \\
 &= 4x(x+1)^{1/4} - \int 4(x+1)^{1/4} dx \\
 &= 4x(x+1)^{1/4} - \frac{16}{5}(x+1)^{5/4} + C \\
 &= 4x\sqrt[4]{x+1} - \frac{16}{5}(x+1)\sqrt[4]{x+1} + C \\
 &= \frac{4}{5}(x-4)\sqrt[4]{x+1} + C
 \end{aligned}$$

■

Agora suponhamos que quer determinar a primitiva de um produto de um polinómio por uma função transcendente. Assim

- (i) Se a derivada da função transcendente ainda é uma função transcendente então deve-se primitivar a própria.

■ **Exemplo 4.28**

$$\begin{aligned}
 \int x \cosh x dx &= x \sinh x - \int \sinh x dx \\
 &= x \sinh x - \cosh x + C
 \end{aligned}$$

- (ii) Se a derivada da função transcendente já não é uma função transcendente então deve-se primitivar o polinómio.

■ **Exemplo 4.29**

$$\begin{aligned}
 \int x \arctan x \, dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{x}{2} + C
 \end{aligned}$$

4. Primitivando por partes duas vezes consecutivas pode acontecer que regresse à primitiva de origem. Nessa situação deve tratar a igualdade como uma equação em que a incógnita é precisamente a primitiva desconhecida. Encontrará a solução se isolar a primitiva num dos membros da equação.

■ **Exemplo 4.30** Primitivando por partes duas vezes obtém-se

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C$$

Começamos por escolher, por exemplo  $f(x) = e^{ax}$ , e desenvolvemos

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

Por outro lado, escolhendo novamente  $f(x) = e^{ax}$ , temos

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \int e^{ax} \cos bx \, dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left( \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx
 \end{aligned}$$

onde

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx$$

ou seja,

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx$$

que é equivalente a,

$$\begin{aligned}
 \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx \right) \\
 &= \frac{1}{a^2 + b^2} (ae^{ax} \cos bx + be^{ax} \sin bx) \\
 &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)
 \end{aligned}$$

■

#### 4.4.2 Método de Primitivação por Substituição

Tem também ao seu dispor um outro método, conhecido por método de primitivação por substituição:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt = F(g(t)) + C = F(x) + C$$

Esclareça-se que este método se desenvolve por diferentes fases:

1. A mudança de variável por meio de  $x = g(t)$
2. A diferenciação da variável  $x$  origina  $dx = g'(t)dt$
3. A substituição de  $x$  e  $dx$  dá origem a uma nova função de  $t$

$$(F \circ g)'(t) = f[g(t)]g'(t)$$

4. O cálculo de uma primitiva de  $(F \circ g)'(t)$  vai originar  $(F \circ g)(t)$
5. O regresso à variável  $x$  por meio de  $x = g(t)$



Este método de primitivação é complementar à primitivação envolvendo a composição de funções – vide **Teorema 4.3.1**.

Em geral é utilizado em casos em que não é imediato obter uma fórmula fechada com base na tabela ilustrada na subseção **4.3.4 Tabela de Primitivação Generalizada**.

#### ■ Exemplo 4.31 — Composição de funções vs. substituição.

A primitiva

$$\int (5x^3 - 4)^7 x^2 dx$$

pode ser calculada de dois modos distintos:

**Via composição de funções.** Observando que

$$(5x^3 - 4)' = 15x^2$$

segue que

$$\begin{aligned}
 \int (5x^3 - 4)^7 x^2 dx &= \frac{1}{15} \int (5x^3 - 4)^7 15x^2 dx \\
 &= \frac{1}{15} \int (5x^3 - 4)^7 (5x^3 - 4)' dx \\
 &= \frac{1}{15} \times \frac{1}{8} \int 8(5x^3 - 4)^{8-1} (5x^3 - 4)' dx \\
 &= \frac{1}{120} (5x^3 - 4)^8 + C,
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

■

**Via substituição.** Tome-se  $t = 5x^3 - 4$ . Segue então que

$$dt = (5x^3 - 4)'dx = 15x^2dx.$$

ou equivalentemente,

$$x^2dx = \frac{1}{15}dt.$$

Logo

$$\int (5x^3 - 4)^7 x^2 dx = \int \frac{1}{15} t^7 dt.$$

Usando agora a tabela da subseção 4.2.2 **Tabela de Primitivação Imediata** concluímos que

$$\int \frac{1}{15} t^7 dt = \frac{1}{120} t^8 + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

Recuperando a mudança de variável  $t = (5x^3 - 4)^7$ , concluímos que

$$\int (5x^3 - 4)^7 x^2 dx = \frac{1}{120} (5x^3 - 4)^8 + C,$$

como pretendido. ■

■

**Desafio 4.13 — Derivação da composta vs. substituição.** Determine

$$\int \frac{e^{3x-1}}{\sqrt{1-e^{6x}}} dx$$

por dois métodos distintos:

1. Via derivação da função composta;
2. Via método da substituição.

■ **Exemplo 4.32 — Por partes vs substituição.** A família de primitivas

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

terá de ser forçosamente calculada por substituição. Começemos por verificar que o método de primitivação por partes não é a melhor escolha neste contexto:

**Usando primitivação por partes.** Primeiramente,

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int F(x)g(x)dx,$$

onde

$$F(x) = e^x \text{ e } g(x) = \frac{e^x}{1+e^x},$$

Segue então que

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx,$$

onde  $G$  é uma primitiva de  $g$ .

Usando agora o facto que  $g$  corresponde à derivada logarítmica de  $x \mapsto e^x + 1$ , i.e.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} \\ &= (\ln(1+e^x))', \end{aligned}$$

segue então, para a escolha  $G(x) = \ln(1+e^x)$  que

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = e^x \ln(1+e^x) - \int e^x \ln(1+e^x) dx.$$

Agora, para continuarmos a calcular

$$\int e^x \ln(1+e^x) dx$$

teríamos que forçosamente considerar a substituição  $t = e^x$  para transformarmos numa primitiva mais fácil de calcular por partes:

$$\begin{aligned} \int e^x \ln(1+e^x) dx &= \int \ln(1+t) dt \\ &= \int t' \ln(1+t) dt \\ &= \dots \\ &= \text{(conclua, como exercício)}. \end{aligned}$$

■

**Por substituição.** Ao começarmos por fazer a mudança de variável  $e^x = t$ , podemos facilmente verificar, após calcularmos o diferencial<sup>2</sup>  $dx$ :

$$dx = \frac{1}{t} dt$$

que

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx &= \int \frac{t^2}{1+t} \frac{1}{t} dt \\ &= \int \frac{t}{1+t} dt \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= t - \ln(1+t) + C \\ &= e^x - \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

■

■

■ **Exemplo 4.33 — Por partes ou por substituição.** Vamos calcular a primitiva

$$\int x \sqrt{3-x} dx$$

---

<sup>2</sup>Note que  $e^x = t$  é equivalente a  $x = \ln(t)$ .

por dois métodos distintos. Deixamos ao cargo do leitor a verificação de que ambas as primitivas ( $C_1 = C_2 = 0$ ), após algumas simplificações coincidem com

$$2(x-3)(x+2) \frac{\sqrt{3-x}}{5}.$$

Para mais detalhes, vide os cálculos simbólicos realizados no GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/calculator/bandxkkm>

**Por partes.**

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{3-x}dx &= \int x(3-x)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= -\frac{2}{3}x(3-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int(3-x)^{\frac{3}{2}}dx \\ &= -\frac{2}{3}x(3-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(3-x)^{\frac{5}{2}} + C_1, \end{aligned}$$

onde  $C_1 \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

**Substituição.** Para a substituição  $x = 3 - t^2$ , o diferencial  $dx$  é dado por

$$dx = -2tdt.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{3-x}dx &= \int (3-t^2) t.(-2tdt) \\ &= \int (-6t^2 + 2t^4)dt \\ &= -2t^3 + \frac{2}{5}t^5 + C_2 \\ &= -2(3-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}} + C_2 \end{aligned}$$

onde  $C_2 \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

**Desafio 4.14 — Substituição.** Use o que aprendeu nos exemplos anteriores para calcular as primitivas abaixo:

1.  $\int \frac{1}{x\sqrt{5+x}}dx;$
2.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{5+x}}dx.$

■ **Exemplo 4.34 — Por partes e por substituição.** À semelhança do **Exemplo 4.26**, podemos também adoptar primitivação por partes para começar a calcular  $\int \arccos(5x - 3)dx$  por partes:

$$\begin{aligned}\int \arccos(5x - 3)dx &= \int x' \arccos(5x - 3)dx \\ &= x \arccos(5x - 3) - \int x \frac{-5}{\sqrt{1 - (5x - 3)^2}} dx \\ &= x \arccos(5x - 3) + \int \frac{5x}{\sqrt{1 - (5x - 3)^2}} dx\end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $t = 5x - 3$ , segue que

$$5x = t + 3 \quad \& \quad dx = \frac{1}{5} dt.$$

Esta substituição conduz-nos à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x}{\sqrt{1 - (5x - 3)^2}} dx &= \int \frac{t + 3}{\sqrt{1 - t^2}} \frac{1}{5} dt \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt + \frac{3}{5} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt\end{aligned}$$

Esta última envolve a soma de duas primitivas [quase] imediatas, se nos lembarmos das seguintes regras de derivação:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} &= (-\arccos(t))', \\ (-\sqrt{1 - t^2})' &= \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}.\end{aligned}$$

Concluímos então, após recuperarmos a mudança de variável  $t = 5x - 3$ , que

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1 - (5x - 3)^2}} dx = -\frac{1}{5} \sqrt{1 - (5x - 3)^2} - \frac{3}{5} \arccos(5x - 3) + C,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

Portanto,

$$\int \arccos(5x - 3)dx = \left( x - \frac{3}{5} \right) \arccos(5x - 3) - \frac{3}{5} \sqrt{1 - (5x - 3)^2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitrária.}$$

■



O início do processo de primitivação poderia-se ter iniciado com a substituição  $t = 5x - 3$ :

$$\int \arccos(5x - 3)dx = \frac{1}{5} \int \arccos(t) dt$$

seguido por primitivação por partes:

$$\frac{1}{5} \int \arccos(t) dt = \frac{t}{5} \arccos(t) + \frac{1}{5} \int \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

**Deixamos ao cargo do leitor a conclusão dos cálculos auxiliares em falta.**

**Desafio 4.15 — Substituição por arco seno.** Use a substituição  $t = \arcsin(x^2)$  para determinar a primitiva abaixo:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4} (25 + \arcsin^2(x^2))} dx$$

**Desafio 4.16 — Por partes ou por substituição.** Determine

$$\int 1 \cdot \arccos^2(x) dx$$

por dois métodos distintos:

1. Usando primitivação por partes;
2. Recorrendo à substituição  $x = \cos(t)$ .

## 4.5 Primitivação de Funções Racionais

### Definição 4.5.1 Funções Racionais

Sejam  $n \geq 0$ ,  $m > 0$  inteiros e  $a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ),  $b_j$  ( $j = 0, \dots, m$ ) números reais tais que  $a_0 \neq 0$  e  $b_0 \neq 0$ .

Diz-se que  $f$  é uma função racional se

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} \end{aligned}$$

onde  $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ .

A função racional diz-se que:

- É própria se  $n < m$ ;
- É imprópria se  $n \geq m$ . Neste caso, podemos efetuar a divisão de polinómios. Assim, obtemos  $s(x)$  e  $r(x)$  tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

onde o grau de  $r$  é inferior ao grau de  $q$  e o grau de  $s$  é  $n - m$ .

### 4.5.1 Frações parciais envolvendo polinómios de grau 1

Suponhamos que temos uma função racional definida por  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , onde  $q$  é um polinómio de grau 1, ou seja  $q(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ . O seu domínio é  $D = \mathbb{R} - \{-\frac{b}{a}\}$ .

Como determinar  $\int \frac{p(x)}{ax+b} dx$ ?

Se  $p$  é constante, isto é,  $p(x) = k \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in D$  então a primitivação é imediata. Temos

$$\int \frac{k}{ax+b} dx = \frac{k}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{k}{a} \ln|ax+b| + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

Caso contrário, o grau de  $p$  é superior ou igual a 1. Assim é necessário efetuar a divisão de  $p$  por  $q$ . Daí resulta um polinómio  $s(x)$  e uma constante  $r$  tais que

$$\frac{p(x)}{ax+b} = s(x) + \frac{r}{ax+b}$$

onde o o grau de  $s$  é  $n - 1$ . Primitivando agora vem

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{ax+b} dx &= \int \left( s(x) + \frac{r}{ax+b} \right) dx \\ &= \int s(x) dx + \int \frac{r}{ax+b} dx \\ &= \int s(x) dx + \frac{r}{a} \ln |ax+b|\end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

#### 4.5.2 Frações parciais envolvendo polinómios de grau 2

Suponhamos agora que temos uma função racional definida por  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , onde  $q$  é um polinómio de grau 2, ou seja  $q(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . O seu domínio é dado por  $D = \{x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c \neq 0\}$ .

Como determinar  $\int \frac{p(x)}{ax^2 + bx + c} dx$ ?

Se  $p$  é um polinómio de grau 1 ou de grau 0, isto é,  $p(x) = cx + d$ , então temos

$$\begin{aligned}\int \frac{cx+d}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{cx}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{d}{ax^2+bx+c} dx \\ &= c \int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx + d \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx\end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Caso contrário, o grau de  $p$  é superior ou igual a 2. Assim é necessário efetuar a divisão de  $p$  por  $q$ . Daí resulta dois polinómios  $s(x)$  e  $r(x)$  tais que

$$\frac{p(x)}{ax^2+bx+c} = s(x) + \frac{r(x)}{ax^2+bx+c}$$

onde o o grau de  $s$  é  $n - 2$  e o grau de  $r$  é inferior a 2. Primitivando vem

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{ax^2+bx+c} dx &= \int \left( s(x) + \frac{r(x)}{ax^2+bx+c} \right) dx \\ &= \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{ax^2+bx+c} dx \\ &= \int s(x) dx + \frac{r}{a} \ln |ax+b| + C\end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

Nos próximas duas proposições mostramos como determinar a primitivação de

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} \quad \text{e} \quad \frac{x}{ax^2+bx+c}.$$

**Teorema 4.5.1** Dado o polinómio de grau 2,  $q(x) = ax^2 + bx + c$ , consideremos  $f(x) = \frac{1}{q(x)}$ .

1. Se  $q$  tiver apenas uma raíz real  $r$  então

$$q(x) = a(x - r)^2$$

Logo

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{a(x-r)^2} dx = \frac{1}{a} \int (x-r)^{-2} dx = -\frac{1}{a(x-r)} + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

2. Se  $q$  admite duas raízes reais distintas  $r$  e  $s$  então

$$q(x) = a(x-r)(x-s)$$

A correspondente fração racional pode decompor-se em dois elementos simples

$$f(x) = \frac{1}{a(x-r)(x-s)} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-s}$$

sendo  $A$  e  $B$  constantes reais a determinar.

Reduzindo ambas as frações ao mesmo denominador comum obtemos

$$\frac{1}{a(x-r)(x-s)} = \frac{aA(x-s) + aB(x-r)}{(x-r)(x-s)}$$

o que implica

$$1 = aA(x-s) + aB(x-r)$$

Fazendo primeiro  $x = r$  e depois  $x = s$  vem

$$A = \frac{1}{a(r-s)} \quad \wedge \quad B = \frac{1}{a(s-r)}$$

respectivamente, logo

$$\frac{1}{a(x-r)(x-s)} = \frac{1}{a(r-s)} \left( \frac{1}{x-r} - \frac{1}{x-s} \right)$$

e por consequência

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a(x-r)(x-s)} dx &= \int \frac{1}{a(r-s)} \left( \frac{1}{x-r} - \frac{1}{x-s} \right) dx \\ &= \frac{1}{a(r-s)} (\ln|x-r| - \ln|x-s|) + C \\ &= \frac{1}{a(r-s)} \ln \left| \frac{x-r}{x-s} \right| + C \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

3. Se  $q$  admite duas raízes complexas conjugadas  $p + qi$  e  $p - qi$  podemos escrever

$$q(x) = a[(x-p)^2 + q^2]$$

A primitiva de  $f$  pode determinar-se fazendo a substituição  $x - p = qt$ .

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{1}{a[(x-p)^2 + q^2]} dx \\ &= \int \frac{q}{a[(qt)^2 + q^2]} dt \\ &= \int \frac{1}{aq(t^2 + 1)} dt \\ &= \frac{1}{aq} \arctan t + C \\ &= \frac{1}{aq} \arctan \left( \frac{x-p}{q} \right) + C\end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

**Teorema 4.5.2** Dado o polinómio de grau 2,  $q(x) = ax^2 + bx + c$ , consideremos  $f(x) = \frac{x}{q(x)}$ .

1. Se  $q$  tiver apenas uma raíz real  $r$  então

$$q(x) = a(x-r)^2$$

Logo

$$\int f(x) dx = \int \frac{x}{a(x-r)^2} dx = \frac{1}{a} \int x(x-r)^{-2} dx$$

Aplicando a fórmula de primitivação por partes vem

$$\int x(x-r)^{-2} dx = -\frac{x}{x-r} - \int -\frac{1}{x-r} dx = -\frac{x}{x-r} + \ln|x-r| + C$$

Por fim, obtemos

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int x(x-r)^{-2} dx = -\frac{x}{a(x-r)} + \frac{\ln|x-r|}{a} + C$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

2. Se  $q$  admite duas raízes reais distintas  $r$  e  $s$  então

$$q(x) = a(x-r)(x-s)$$

A correspondente fração racional pode decompor-se em dois elementos simples

$$f(x) = \frac{x}{a(x-r)(x-s)} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-s}$$

sendo  $A$  e  $B$  constantes reais a determinar.

Reduzindo ambas as frações ao mesmo denominador comum obtemos

$$\frac{x}{a(x-r)(x-s)} = \frac{aA(x-s) + aB(x-r)}{(x-r)(x-s)}$$

o que implica

$$x = aA(x-s) + aB(x-r)$$

Fazendo primeiro  $x = r$  e depois  $x = s$  vem

$$A = \frac{r}{a(r-s)} \quad \wedge \quad B = \frac{s}{a(s-r)}$$

respectivamente, logo

$$\frac{x}{a(x-r)(x-s)} = \frac{1}{a(r-s)} \left( \frac{r}{x-r} - \frac{s}{x-s} \right)$$

e por consequência

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{a(x-r)(x-s)} dx &= \int \frac{1}{a(r-s)} \left( \frac{r}{x-r} - \frac{s}{x-s} \right) dx \\ &= \frac{1}{a(r-s)} (r \ln|x-r| - s \ln|x-s|) + C \end{aligned}$$

3. Se  $q$  admite duas raízes complexas conjugadas  $p + qi$  e  $p - qi$  então

$$q(x) = a[(x-p)^2 + q^2]$$

Fazendo a substituição  $x - p = qt$  obtemos

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x}{a[(x-p)^2 + q^2]} dx \\ &= \int \frac{(qt+p)q}{a[(qt)^2 + q^2]} dt \\ &= \int \frac{q^2 t}{aq^2(t^2 + 1)} dt + \int \frac{pq}{aq^2(t^2 + 1)} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt + \frac{p}{aq} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{2a} \ln(t^2 + 1) + \frac{p}{aq} \arctan t + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{(x-p)^2 + q^2}{q^2} \right) + \frac{p}{aq} \arctan \left( \frac{x-p}{q} \right) + C \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

#### 4.5.3 Exemplos de primitivação envolvendo frações parciais

##### ■ Exemplo 4.35 A fração racional

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3}$$

é própria porque o grau do numerador é inferior ao grau do denominador. O denominador tem uma raiz real,  $x = 2$ , de multiplicidade algébrica três, por isso decompõe-se em três elementos simples

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{(x-2)^3} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-2}.$$

Reduzindo o segundo membro da equação ao mesmo denominador comum e igualando os numeradores das frações obtém-se

$$x^2 - 6x + 3 = A_1 + A_2(x-2) + A_3(x-2)^2$$

Fazendo  $x = 2$  vem  $A_1 = -5$ .

Substituindo  $A_1$  tem-se

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} = \frac{-5}{(x-2)^3} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-2},$$

o que implica que

$$x^2 - 6x + 3 = A_3x^2 + (-4A_3 + A_2)x + (4A_3 - 2A_2 - 5).$$

Da igualdade de polinómios resulta o sistema

$$\begin{cases} A_3 &= 1 \\ -4A_3 + A_2 &= -6 \\ 4A_3 - 2A_2 - 5 &= 3 \end{cases}$$

cuja solução é dada por  $A_2 = -2$  e  $A_3 = 1$ . Portanto

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} = \frac{-5}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Agora a primitivação da fração racional torna-se imediata

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} dx &= \int \left( \frac{-5}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= -5 \int (x-2)^{-3} dx - 2 \int (x-2)^{-2} dx + \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= \frac{5}{2}(x-2)^{-2} + 2(x-2)^{-1} + \ln|x-2| + C \\ &= \frac{5}{2(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.36** A fração racional própria decompõe-se em dois elementos simples

$$\frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A_1x + b_1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{A_2x + b_2}{x^2 + 1}$$

Multiplicando ambos os membros por  $(x^2 + 1)^2$  obtém-se

$$x^3 - 1 = A_1x + b_1 + (x^2 + 1)(A_2x + b_2)$$

e ainda

$$x^3 - 1 = A_2x^3 + b_2x^2 + (A_1 + A_2)x + b_1 + b_2$$

Da igualdade de polinómios resulta o sistema

$$\begin{cases} A_2 &= 1 \\ b_2 &= 0 \\ A_1 + A_2 &= 0 \\ b_1 + b_2 &= -1 \end{cases}$$

cuja solução é dada por  $A_1 = -1$ ,  $A_2 = 1$ ,  $b_1 = -1$  e  $b_2 = 0$ . Logo

$$\frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x - 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \left( \frac{-x - 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \int \frac{-x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= - \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \frac{1}{2} \ln x^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx. \end{aligned}$$

Primitivando a fração própria  $\frac{1}{(x^2 + 1)^2}$  vem

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{-x^2 + 1 + x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int \frac{-x^2}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{x}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \arctan x \\ &= \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{x}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

■ **Exemplo 4.37** A fração racional definida por

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^4}{x^4 - 1}$$

é imprópria porque os polinómios  $p$  e  $q$  têm o mesmo grau. Por isso deve-se efectuar a divisão entre os polinómios obtendo-se

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x^4 - 1}$$

A parte própria da fração racional pode-se decompor em três elementos simples

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{cx + D}{x^2 + 1}$$

Reduzindo ao mesmo denominador comum vem

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A(x^2 + 1)(x + 1) + B(x^2 + 1)(x - 1) + (cx + D)(x^2 - 1)}{x^4 - 1}$$

o que implica que

$$1 = A(x^2 + 1)(x + 1) + B(x^2 + 1)(x - 1) + (cx + D)(x^2 - 1)$$

Fazendo sucessivamente  $x = 1$ ,  $x = -1$  e  $x = i$  vem

$$A = \frac{1}{4} \quad \wedge \quad B = -\frac{1}{4} \quad \wedge \quad c = 0 \quad \wedge \quad D = -\frac{1}{2}$$

Tem-se

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x^4 - 1}\right) dx \\ &= x + \int \frac{1}{x^4 - 1} dx \\ &= x + \int \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} dx \\ &= x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= x + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctan x + C \\ &= x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.38** A fração racional definida por

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 + x^2}$$

é imprópria visto que o grau de  $p$  é superior ao grau de  $q$ . Efectuando a divisão entre os polinómios obtém-se

$$h(x) = x - 2 + \frac{1}{x^4 + x^2}$$

A parte própria da fração racional pode-se decompor em três elementos simples

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$$

Reduzindo ao mesmo denominador comum vem

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1(x^2+1) + A_2(x^2+1)x + (Bx+c)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

o que implica que

$$1 = A_1(x^2+1) + A_2(x^2+1)x + (Bx+c)x^2$$

Fazendo sucessivamente  $x = 0$  e  $x = i$  vem

$$A_1 = 1 \quad \wedge \quad B = 0 \quad \wedge \quad c = -1$$

Substituindo tem-se

$$1 = x^2 + 1 + A_2(x^2 + 1)x - x^2$$

e daí retira-se que necessariamente  $A_2 = 0$ . Logo

$$\frac{1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 + x^2} dx &= \int \left( x - 2 + \frac{1}{x^4 + x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{1}{x^4 + x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{x} - \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

**Desafio 4.17 — Substituição e Primitivação de Funções Racionais.** Calcule a primitiva

$$\int \frac{1 + \operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)} dx$$

usando a substituição  $x = \operatorname{arctg}(t)$ .

Adicionalmente, verifique que esta coincide com a primitiva considerada no **Desafio 4.3**.

## 4.6 Primitivação de Potências de Funções Trigonométricas

Pretendemos ainda primitivar potências de funções trigonométricas.

No caso das potências de seno e cosseno a técnica de primitivação é diferente consoante o expoente  $n$  é par ou ímpar.

### 4.6.1 Primitivas imediatas

■ **Exemplo 4.39** Utilizando as fórmulas trigonométricas

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \quad \wedge \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int 1 dx + \int \cos(2x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int 1 dx - \int \cos(2x) dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.40** Utilizando a fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \int \cos^3 x dx &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\
 &= \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx \\
 &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C, \quad C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int \sin^3 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\
 &= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx \\
 &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

■

#### 4.6.2 Fórmulas de recorrência

Nas potências de expoente  $n$  ímpar,  $n \geq 3$ , começamos por destacar o fator  $\sin x$  e substituímos  $\sin^2 x$  no fator resultante usando a fórmula fundamental, ou seja,

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x$$

onde  $n = 2k + 1$ ,  $k \geq 2$ . Após esta simplificação, a primitivação de  $\int \sin^n x dx$  é imediata.

Sendo o expoente  $n \geq 3$  ímpar, como devemos proceder para determinar  $\int \cos^n x dx$ ?

Porém, para primitivar potências pares de seno e cosseno com expoente  $n \geq 4$  recomendamos a utilização das fórmulas de recorrência enunciadas na próxima proposição.

**Teorema 4.6.1** Se  $n \geq 4$  então

- (i)  $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$
- (ii)  $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$

No caso das potências de tangente a primitivação não depende da paridade do expoente  $n$ .

■ **Exemplo 4.41** Utilizando a fórmula trigonométrica

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

vem

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \sec^2 x dx - \int 1 dx \\ &= \operatorname{tg}(x) - x + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x dx \\ &= \int \operatorname{tg}(x)(\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \operatorname{tg}(x) \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

■

Podemos generalizar para qualquer potência da tangente de expoente  $n$ ,  $n \geq 4$ . Assim, começamos por destacar o fator  $\operatorname{tg}^2 x$  e substituí-lo por  $\sec^2 x - 1$ , ou seja,

$$\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) = \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x - \operatorname{tg}^{n-2} x$$

Após a simplificação vem

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^n x dx &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx \\ &= \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx\end{aligned}$$

Deste modo obtivemos uma fórmula de recorrência.

No caso das potências da secante a primitivação depende da paridade do expoente  $n$ .

■ **Exemplo 4.42** Utilizando a fórmula de primitivação por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \int \sec^2 x \sec x dx \\ &= \operatorname{tg}(x) \sec x - \int \operatorname{tg}(x) \sec x \operatorname{tg}(x) dx \\ &= \operatorname{tg}(x) \sec x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \operatorname{tg}(x) \sec x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ &= \operatorname{tg}(x) \sec x - \int \sec^3 x dx + \log |\sec x + \operatorname{tg}(x)|.\end{aligned}$$

Daí resulta

$$2 \int \sec^3 x dx = \operatorname{tg}(x) \sec x + \log |\sec x + \operatorname{tg}(x)|$$

isto é,

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x) \sec x + \frac{1}{2} \log |\sec x + \operatorname{tg}(x)| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

Nas potências de expoente  $n$  ímpar,  $n \geq 4$ , começamos por destacar o fator  $\sec^2 x$ . Aplicando a técnica de primitivação por partes podemos obter a seguinte fórmula de recorrência

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \operatorname{tg}(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

■ **Exemplo 4.43** Utilizando a fórmula trigonométrica

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

vem

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x dx &= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x dx \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x dx \\ &= \operatorname{tg}(x) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C \end{aligned}$$

■

Nas potências de expoente  $n$  par,  $n \geq 4$ , começamos por destacar o fator  $\sec^2 x$  e substituímos  $\sec^2 x$  no fator resultante, ou seja, fazendo  $n = 2k + 2$ ,  $k \geq 1$  temos

$$\sec^{2k+2} x = \sec^2 x \sec^{2k} x = \sec^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^k$$

■ **Exemplo 4.44**

$$\begin{aligned} \int (\sec x \operatorname{tg}(x))^3 dx &= \int \sec x \operatorname{tg}(x) (\sec x \operatorname{tg}(x))^2 dx \\ &= \int \sec x \operatorname{tg}(x) \sec^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \sec x \operatorname{tg}(x) (\sec^4 x - \sec^2 x) dx \\ &= \int \sec x \operatorname{tg}(x) \sec^4 x dx - \int \sec x \operatorname{tg}(x) \sec^2 x dx \\ &= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

### 4.7 Exercícios Propostos

43. Verifique as seguintes fórmulas de primitivação:

(a)  $\int \frac{1}{1+e^x} dx = -\ln(e^{-x}+1)+C$       (b)  $\int \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} dx = \ln(2x+\sqrt{1+4x^2})+C$

(c)  $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tg x| + C$       (d)  $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx = \arcsin(x/\sqrt{5})+C$

(e)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$       (f)  $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2\arctg(\sqrt{x})+C$

44. Determine a primitiva  $F$  da função  $f$  cujo gráfico contém o ponto  $P$ :

(a)  $f(x) = 2x-2$ ,  $P = (2, 1)$       (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $P = (-e, 1)$

(c)  $f(x) = -x^{-2}$ ,  $P = (1/3, 2)$       (d)  $f(x) = \sin x$ ,  $P = (0, -1)$

45. Calcule, recorrendo à tabela de primitivação imediata, as seguintes primitivas:

(a)  $\int \left(2-x+\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$       (b)  $\int (x-\sqrt{x})^3 dx$       (c)  $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

(d)  $\int \left(e^{3x}+\frac{2}{e^x}-\sqrt{e^x}\right) dx$       (e)  $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$       (f)  $\int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1} dx$

(g)  $\int \frac{\ln|x|}{x} dx$       (h)  $\int \sinh x \cosh x dx$       (i)  $\int \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

(j)  $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$       (k)  $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x} dx$       (l)  $\int \frac{1}{x \ln|x|} dx$

(m)  $\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}} dx$       (n)  $\int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x} dx$       (o)  $\int \frac{\sinh x}{1+\sinh^2 x} dx$

(p)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}} dx$       (q)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$       (r)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(s)  $\int \frac{1}{1-\sin^2 x} dx$       (t)  $\int \frac{1}{\tg x} dx$       (u)  $\int (e^{\tg x} \tg^2 x + e^{\tg x}) dx$

46. Use as identidades trigonométricas

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \sin(2x)$$

e  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$  para calcular as primitivas abaixo:

(a)  $\int \sin^2 x dx$       (b)  $\int \cos^2 x dx$

(c)  $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$       (d)  $\int (\sin x \cos x)^2 dx$

47. Sabendo que  $\int \sec^2 x dx = \tg x + C$ , calcule:

(a)  $\int \tg^2 x dx$       (b)  $\int \tg^3 x dx$

48. Calcule as seguintes primitivas de funções racionais:

(a)  $\int \frac{2x+3}{3x+2} dx$

(b)  $\int \frac{3x-4}{x^2+1} dx$

(c)  $\int \frac{(x-1)^3}{x^2+4} dx$

(d)  $\int \frac{1}{(x-2)^2} dx$

(e)  $\int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx$

(f)  $\int \frac{1}{x^2-4} dx$

(g)  $\int \frac{1}{x^2+x} dx$

(h)  $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$

(i)  $\int \frac{1}{x^3-1} dx$

(j)  $\int \frac{x}{x^4-1} dx$

(k)  $\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)} dx$

(l)  $\int \frac{2x+1}{x(x+1)^2} dx$

49. Calcule, usando a fórmula de primitivação por partes, as seguintes primitivas:

(a)  $\int x \ln|x| dx$

(b)  $\int x e^{-x} dx$

(c)  $\int x^3 e^{x^2} dx$

(d)  $\int x^2 \sinh x dx$

(e)  $\int \frac{\ln|x|}{x^2} dx$

(f)  $\int \sin x e^{-x} dx$

(g)  $\int \sin x \cos(2x) dx$

(h)  $\int \frac{\ln(x^2-1)}{x^3} dx$

(i)  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$

50. Usando a regra da primitivação da função inversa, calcule:

(a)  $\int \ln x dx$

(b)  $\int \arcsin x dx$

(c)  $\int \operatorname{arctg}(1/x) dx$

(d)  $\int \arccos(3x+1) dx$

(e)  $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

(f)  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

51. Utilizando a fórmula de primitivação por substituição, calcule:

(a)  $\int \sqrt{4-x^2} dx$

(b)  $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$

(c)  $\int \frac{1}{\sinh x} dx$

(d)  $\int \frac{2 \ln x}{x(1-\ln^2 x)} dx$

(e)  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

(f)  $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$

52. Calcule:

(a)  $\int e^x \sinh x dx$

(b)  $\int x \sqrt{x-1} dx$

(c)  $\int \frac{1+x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(d)  $\int \sec^3 x dx$

(e)  $\int \ln^2 x dx$

(f)  $\int \frac{x-\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

53. Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{2 \cosh x}$ .

(a) Verifique que  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$  para todo o real  $x$ .

(b) Mostre que  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + C$ .

(c) Fazendo a mudança de variável  $x = -\ln t$ , mostre que

$$\int f(x) dx = -\operatorname{arctg}(e^{-x}) + C.$$

(d) Esboce o gráfico da função definida por  $g(x) = \operatorname{arctg}(e^x)$ . Diga, justificando, se pode obter o gráfico de  $h$ , definida por  $h(x) = -\operatorname{arctg}(e^{-x})$ , a partir do gráfico de  $g$ .



# Equações Diferenciais de Primeira Ordem

## 5 Tipos de Equações Diferenciais (EDO's) 235

- 5.1 Introdução às EDO's
- 5.2 Equações de Variáveis Separadas e Separáveis
- 5.3 Equação Linear
- 5.4 Equação de Bernoulli
- 5.5 Problema de valor inicial
- 5.6 Exercícios Propostos

## 6 Modelação Matemática Utilizando EDO's 249

- 6.1 Modelos representados por EDO's
- 6.2 Estudo Qualitativo de EDO's
- 6.3 Exercícios Propostos





## 5. Tipos de Equações Diferenciais (EDO's)

### 5.1 Introdução às EDO's

**Definição 5.1.1 — EDO.** Diz-se que uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação constituída por termos que envolvem uma função desconhecida  $y$  de variável independente  $x$ , uma ou mais das suas derivadas, algumas funções de  $x$  e constantes.

**Definição 5.1.2 — Ordem da EDO.** Diz-se que a equação diferencial ordinária (EDO) é de ordem  $n \in \mathbb{N}$  se a enésima derivada de  $y$  relativamente a  $x$  for a derivada de maior ordem que aparece na equação.

■ **Exemplo 5.1** Quanto à ordem, podemos classificar as seguintes EDOs:

- i)  $y' - \frac{x+1}{y} = 0$  é de primeira ordem;
- ii)  $y'' - y = x$  é de segunda ordem;
- iii)  $y' - y^2 = x$  é de primeira ordem.

**Definição 5.1.3 — Solução da EDO.** Seja  $y' = g(x, y)$  uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem. Uma dada função  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é solução da equação diferencial em  $I \subseteq \mathbb{R}$  se  $f$  é diferenciável em  $I$  e se verifica a respectiva equação, isto é, a equação reduz-se a uma identidade ao substituir  $y$  por  $f(x)$  e  $y'$  por  $f'(x)$ .

■ **Exemplo 5.2** Consideremos a EDO de primeira ordem:  $xy' = y - b$ , sendo  $b \in \mathbb{R}$  uma constante. A função afim  $f$  tal que  $f(x) = mx + b$  é diferenciável em  $I = \mathbb{R}$  e

$$xy' = y - b \iff x(mx + b)' = (mx + b) - b \iff xm = mx$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Está assim provado que  $f$  é solução da EDO.

Porém a função quadrática  $g$  tal que  $g(x) = x^2 + b$  não é solução da EDO visto que

$$xy' = y - b \iff x(x^2 + b)' = (x^2 + b) - b \iff 2x^2 = x^2 \iff x = 0$$

Assim sendo, não há nenhum intervalo  $I$  onde  $g$  e a sua derivada verifique a EDO.

O conjunto de soluções representadas por uma expressão com uma constante arbitrária  $C$  designa-se por solução geral (ou integral geral) da equação diferencial.

Se atribuirmos um valor concreto à constante obtemos uma solução, chamada solução particular da equação.

Por vezes, existem ainda outras soluções para além das já referidas, as soluções singulares.

O estudo das equações diferenciais, no que diz respeito à determinação de soluções, pode ser feito seguindo as seguintes abordagens:

- Analítica, que consiste em encontrar as soluções por via analítica.
- Geométrica, baseada na descrição do comportamento qualitativo das soluções usando as propriedades do conceito de derivada.
- Numérica, caracterizada por usar meios computacionais na busca de uma dada solução, solução aproximada.

Um dos objectivos principais deste capítulo é a resolução de diferentes tipos de equações diferenciais de primeira ordem pois para cada um deles existe um método de resolução apropriado.

## 5.2 Equações de Variáveis Separadas e Separáveis

### 5.2.1 Equações de Variáveis Separadas

**Definição 5.2.1** Sejam  $f$  e  $h$  expressões de uma única variável. Diz-se que

$$h(y)y' = f(x)$$

é uma equação de variáveis separadas.

#### Método de Resolução:

Basta usar a primitivação, ou seja, a solução geral da EDO é obtida através de

$$\int h(y)y' dx = \int f(x) dx$$

 Em particular, se  $h(y) = 1$  a EDO reduz-se a  $y' = f(x)$ . Neste caso, o conjunto de soluções da EDO obtém-se por primitivação, i.e.,

$$y = \int f(x) dx$$

■ **Exemplo 5.3** Consideremos a EDO:

$$y^{-2}y' = -1.$$

Trata-se de uma equação de variáveis separadas com  $h(y) = y^{-2}$  e  $f(x) = -1$ . Primitivando membro a membro, isto é,

$$\int y^{-2}y' dx = \int -1 dx$$

vem

$$-\frac{1}{y} = -x - C$$

onde a solução geral da equação, escrita na forma explícita, é dada por

$$y = \frac{1}{x + C}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

### 5.2.2 Equações de Variáveis Separáveis

**Definição 5.2.2** Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  expressões de uma única variável. Diz-se que

$$h(y)y' = f(x)g(y)$$

é uma equação de variáveis separáveis.

**Método de Resolução:**

Multiplicando por  $\frac{1}{g(y)}$ , para  $g(y) \neq 0$ , obtemos uma equação de variáveis separadas

$$\frac{h(y)y'}{g(y)} = f(x)$$

A solução geral resulta de

$$\int \frac{h(y)y'}{g(y)} dx = \int f(x) dx$$

■ **Exemplo 5.4** Consideremos a EDO:

$$y' = e^{y-x}.$$

Trata-se de uma equação de variáveis separáveis com  $h(y) = 1$ ,  $g(y) = e^y$  e  $f(x) = e^{-x}$ . Para  $y \neq 0$ , temos uma equação de variáveis separadas:

$$e^{-y}y' = e^{-x}$$

Primitivando membro a membro, isto é,

$$\int e^{-y}y' dx = \int e^{-x} dx$$

vem

$$-e^{-y} = -e^{-x} + C$$

onde a solução geral da equação, escrita na forma explícita, é dada por

$$y = -\ln(e^{-x} - C)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Note que  $y = 0$  não é solução da equação diferencial. ■

### 5.3 Equação Linear

**Definição 5.3.1** Dadas as expressões  $p(x)$  e  $q(x)$ , diz-se que

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (5.1)$$

é uma equação linear.

No caso particular, em que  $p(x) = a$  e  $q(x) = b$  são constantes reais, diz-se que (5.1) é uma equação linear com coeficientes constantes. No caso contrário, (5.1) é uma equação linear com coeficientes variáveis.

### 5.3.1 Equação Linear com Coeficientes Constantes

Consideremos a equação linear com coeficientes constantes:

$$y' + ay = b. \quad (5.2)$$

Se  $a = 0$ , esta equação reduz-se a  $y' = b$ . Por primitivação obtemos a sua solução geral:

$$y(x) = bx + C, C \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 5.3.1** Se  $a \neq 0$  então a solução geral de (5.2) é dada por

$$y(x) = \frac{b}{a} + Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Neste caso, a EDO reduz-se a uma equação de variáveis separáveis pois

$$y' + ay = b \iff y' = b - ay.$$

Para  $y \neq \frac{b}{a}$ ,

$$\frac{y'}{b - ay} = 1.$$

Primitivando membro a membro vem

$$\int \frac{y'}{b - ay} dx = \int 1 dx$$

ou seja,

$$-\frac{1}{a} \ln |b - ay| = x + C_1$$

onde,

$$\ln |b - ay| = -ax + C_2$$

logo,

$$b - ay = Ce^{-ax}$$

por fim,

$$y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$ . Note-se que  $y = \frac{b}{a}$  também é uma solução de (5.2). ■

**Corolário 5.3.2** Se  $a \neq 0$  e  $b = 0$  então a solução geral de (5.2) é dada por

$$y(x) = Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}.$$

### 5.3.2 Equação Linear com Coeficientes Variáveis

No caso particular, em que  $q(x) = 0$ , então (5.1) reduz-se a uma equação de variáveis separáveis:

$$y' + p(x)y = 0 \iff y' = -p(x)y$$

Por primitivação obtemos a sua solução geral:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, C \in \mathbb{R}.$$

■ **Exemplo 5.5** Consideremos

$$y' - \frac{\alpha y}{x} = 0, x > 0$$

sendo  $\alpha$  um parâmetro não-nulo. Trata-se de uma equação linear com  $p(x) = -\frac{\alpha y}{x}$  e  $q(x) = 0$ . Para  $y \neq 0$  temos

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

Primitivando obtemos

$$\ln |y| = \alpha \ln |x| + C_1 \Leftrightarrow |y| = e^{\alpha \ln x + C_1}$$

Então

$$y = Cx^\alpha, C \in \mathbb{R}$$

representa a solução geral. Note-se que  $y = 0$  também é uma solução da equação. ■

■ **Exemplo 5.6** Consideremos

$$y' + 2xy = 0$$

Trata-se de uma equação linear com  $p(x) = 2x$  e  $q(x) = 0$ . Para  $y \neq 0$  temos

$$\frac{y'}{y} = -2x$$

Primitivando membro a membro, isto é,

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int -2x dx$$

vem

$$\ln |y| + C_1 = -x^2 + C_2$$

onde a solução geral da equação é dada por

$$y = Ce^{-x^2}, C \in \mathbb{R}.$$

Verifique que  $y = 0$  também é uma solução da equação dada. ■

Vamos agora resolver uma equação linear com  $p(x) = 1/x$  e  $q(x) \neq 0$ .

■ **Exemplo 5.7** Consideremos

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}, x \in ]0, +\infty[$$

Trata-se de uma equação linear com  $p(x) = 1/x$  e  $q(x) = \sqrt{x}$ . A equação é equivalente a

$$xy' + y = x\sqrt{x}$$

ou seja,

$$(yx)' = x^{3/2}$$

Por primitivação vem

$$yx = \int x^{3/2} dx + C \Leftrightarrow xy = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

onde

$$y = \frac{2}{5}x\sqrt{x} + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$$

é a solução geral da equação. ■

Vejamos agora que podemos resolver qualquer equação linear (5.1) aplicando o método que consiste em multiplicarmos a equação por uma função de  $x$  apropriada,  $v(x)$ , a que se chama factor integrante. Assim, multiplicando a equação (5.1) por  $v(x) \neq 0$  obtemos

$$v(x)y' + v(x)p(x)y = v(x)q(x)$$

Se  $v(x) \neq 0$  satisfaz  $v'(x) = v(x)p(x)$  então

$$v(x)y' + v'(x)y = v(x)q(x)$$

ou seja,

$$(v(x)y)' = v(x)q(x)$$

dado que

$$(v(x)y)' = v(x)y' + v'(x)y.$$

**Definição 5.3.2 — Factor Integrante.** A expressão  $v(x) \neq 0$  é um factor integrante para a EDO linear (5.1) se satisfaz  $v'(x) = v(x)p(x)$ .



Se  $v_1(x) \neq 0$  é um factor integrante então  $v_2(x) = kv_1(x)$ , para todo  $k \neq 0$ , também é um factor integrante.

**Teorema 5.3.3 — Determinação do factor integrante.** Então  $v$  definida por

$$v(x) = e^{\int p(x)dx}$$

é um factor integrante para a equação linear (5.1).

*Demonstração.* Por definição, temos

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = p(x).$$

Primitivando

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)} dx = \int p(x) dx$$

obtemos

$$\ln|v(x)| = \int p(x) dx.$$

Segue então que

$$v(x) = e^{\int p(x)dx},$$

como pretendido. ■

Do teorema anterior, o seguinte resultado é deveras imediato:

**Corolário 5.3.4 — Factor Integrante vs. Equação Linear Homogénea.** Nas condições do **Teorema 5.3.3**, tem-se que toda a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{C}{v(x)}$ ,  $C \neq 0$ , é solução da EDO linear homogénea

$$y' + p(x)y = 0.$$

*Demonstração.* Da igualdade

$$\frac{C}{v(x)} = Ce^{-\int p(x)dx}$$

obtém-se a regra de derivação

$$\left( \frac{C}{v(x)} \right)' = -p(x)Ce^{-\int p(x)dx} = -p(x)\frac{C}{v(x)}.$$

Segue então que  $f(x) = \frac{C}{v(x)}$  é solução da EDO homogénea  $y' + p(x)y = 0$ , como pretendido. ■

### Método de Resolução: Método do Factor Integrante para a EDO (5.1)

**Passo 1.** Cálculo de um factor integrante  $v(x)$ ;

**Passo 2.** Multiplicação da equação pelo factor integrante;

**Passo 3.** Soma dos termos do primeiro membro da equação, isto é,

$$v(x)y' + v'(x)y = (v(x)y)'$$

visto que o factor integrante verifica  $v'(x) = v(x)p(x)$ ;

**Passo 4.** Primitivação de ambos os membros da equação, isto é,  $\int (v(x)y)' dx = \int q(x)v(x) dx + C$ ;

**Passo 5.** Obtenção da solução geral da equação:

$$y = \frac{1}{v(x)} \left( \int q(x)v(x) dx + C \right).$$

**Teorema 5.3.5 — Solução geral de EDO's lineares.** A solução geral da EDO linear (5.1) é dada por

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left( \int q(x)v(x) dx + C \right)$$

**Corolário 5.3.6 — Resolução via a equação homogénea.** Considere a EDO linear (5.1). Se  $y_h$  é a solução geral de (5.1) com  $q(x) = 0$  e  $y_p$  é uma solução particular de (5.1) então a solução geral da EDO linear (5.1) é dada por

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

*Demonstração.* Por hipótese,  $y_h$  e  $y_p$  verificam

$$y'_h + p(x)y_h = 0$$

e

$$y'_p + p(x)y_p = q(x).$$

Logo

$$y'_h + y'_p + p(x)y_h + p(x)y_p = q(x)$$

ou seja,

$$(y_h + y_p)' + p(x)(y_h + y_p) = q(x).$$

Assim,  $y = y_h(x) + y_p(x)$  satisfaz a EDO linear (5.1). ■



Observe que no caso de  $q(x) = 0$ , o **Teorema 5.3.5** dá-nos essencialmente o resultado já obtido no **Corolário 5.3.4**. Esta corresponde à solução homogénea ( $y_h(x)$ ), mencionada no **Corolário 5.3.6**.

■ **Exemplo 5.8 — Aplicação do Teorema 5.3.5.** Consideremos para valores de  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  a equação diferencial

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sin x$$

Trata-se de uma equação linear com  $p(x) = \operatorname{tg} x$  e  $q(x) = \sin x$ . Um factor integrante<sup>1</sup> é

$$v(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \operatorname{tg} x dx} = e^{\ln |\sec x|} = |\sec x| = \sec x$$

Ao multiplicar a equação pelo factor integrante obtemos

$$(y \sec x)' = \operatorname{tg} x$$

Primitivando vem

$$y \sec x = \int \operatorname{tg} x dx + C \Leftrightarrow y \sec x = \ln |\sec x| + C$$

onde

$$y = \cos x \ln |\sec x| + C \cos x$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 5.9 — Aplicação do Corolário 5.3.6.** Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = e^{-2x}$ .

Usando a regra de derivação

$$f'(x) = -2e^{-2x} = -2f(x)$$

segue que, por exemplo,  $y_p(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$  é uma solução particular da EDO linear

$$-y' + 2y = e^{-2x}.$$

Por outro lado, pode-se concluir que  $y_h(x) = Ce^{2x}$  ( $C \in \mathbb{R}$  constante arbitrária) é solução da EDO linear homogénea

$$-y' + 2y = 0.$$

Portanto,

$$y(x) = Ce^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}$$

é a solução geral da equação diferencial. ■

**Desafio 5.1** Verifique a solução do **Exemplo 5.9** com recurso ao método do factor integrante – vide **Teorema 5.3.5**.

## 5.4 Equação de Bernoulli

**Definição 5.4.1** Dadas as expressões  $p(x)$  e  $q(x)$  e dado um racional  $n \neq 0$ , diz-se que

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

é uma equação de Bernoulli.

Casos Particulares:

<sup>1</sup>Para valores de  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , temos  $\cos(x) > 0$ . Segue então que  $|\sec(x)| = \frac{1}{|\cos(x)|} = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$ .

- Se  $n = 1$  então temos uma EDO de variáveis separáveis:

$$y' + p(x)y = q(x)y \iff y' = (q(x) - p(x))y$$

- Se  $p(x) = a$ ,  $q(x) = b$  então

$$y' + ay = by^n \Leftrightarrow y' = by^n - ay$$

é de variáveis separáveis.

**Método de Resolução:**

Seja  $n \neq 1$ .

1. Multiplicação da equação por  $y^{-n}$ :  $y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x)$
2. Mudança de variável dependente através de  $z = y^{1-n}$
3. Transformação numa equação linear atendendo a que

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}z'$$

4. Resolução da equação linear em  $z$ :

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x) \iff z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

5. Regresso à variável inicial  $y$  através de  $y = z^{1/(1-n)}$

■ **Exemplo 5.10** Consideremos a seguinte equação de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

Supondo  $y \neq 0$  podemos multiplicar a equação por  $y^{-3}$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x$$

Efectuando a mudança de variável dependente

$$z = y^{-2}$$

a equação de Bernoulli transforma-se numa equação linear. Com efeito, derivando  $z$  em relação a  $x$  vem

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

logo substituindo  $y^{-3}\frac{dy}{dx}$  e  $y^{-2}$  na equação anterior passamos a ter uma nova equação

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + z = x$$

ou seja

$$\frac{dz}{dx} - 2z = -2x$$

Multiplicando agora pelo factor integrante

$$e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

vem

$$e^{-2x} \frac{dz}{dx} - 2e^{-2x}z = -2xe^{-2x}$$

sendo equivalente a

$$(e^{-2x}z)' = -2xe^{-2x}$$

Primitivando

$$e^{-2x}z = \int -2xe^{-2x} dx,$$

$$e^{-2x}z = e^{-2x}x + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

e

$$z = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

Regressando à variável inicial obtemos

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

estando a solução geral definida sob a forma implícita. Acresce que  $y = 0$  também é solução da equação diferencial. ■

## 5.5 Problema de valor inicial

Nos modelos representados por equações diferenciais (veremos mais à frente) é preciso resolver o seguinte problema matemático.

**Definição 5.5.1** Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  uma constante e  $a \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Ao problema

$$\begin{cases} y' = g(x, y), x \in I \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

chama-se problema de valor inicial (ou problema de Cauchy).

Relativamente ao problema de valor inicial colocam-se as questões sobre:

- Existência de solução
- Unicidade de solução
- A sensibilidade da solução a pequenas alterações na condição inicial (ou dado inicial).

Para um problema de valor inicial existem vários teoremas que garantem a existência e a unicidade de solução, sendo o teorema de Cauchy o mais conhecido.

■ **Exemplo 5.11** Consideremos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = -2xy, x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Em primeiro lugar, resolvendo a EDO obtemos

$$y = Ce^{-x^2}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. De seguida, usamos a condição inicial para determinar  $C$ . Vejamos que

$$y(0) = 3 \iff Ce^0 = 3 \iff C = 3$$

Desta forma, concluímos que o problema de valor inicial tem solução única, sendo dada por

$$y = 3e^{-x^2}.$$

■

**Desafio 5.2 — Aplicação do Corolário 5.3.6.** Verifique que  $y = \frac{1}{2}e^{-x}$  é uma solução particular da EDO linear

$$-y' + y = e^{-x}.$$

Use esta solução para:

1. Determinar, via **Corolário 5.3.6**, a solução geral da EDO  $-y' + y = e^{-x}$ .
2. Verificar que a função  $x \mapsto \cosh(x)$  é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} -y' + y = e^{-x}, x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

## 5.6 Exercícios Propostos

54. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a)  $y' = xe^{-x}$

(b)  $y' = e^{-y}$

(c)  $y' = 3y$

(d)  $y' = \frac{1-y}{x^2}$

(e)  $y' = \frac{(1-x)y}{x}$

(f)  $y' = y^2\sqrt{x}$

(g)  $y' = 2x\sqrt{y-1}$

(h)  $y' = 1+y^2$

(i)  $y' = y-y^2$

55. Considere a seguinte equação diferencial  $y' = -2y+4$ .

(a) Determine uma função constante que seja solução da equação.

(b) Justifique que se trata quer de uma equação de variáveis separáveis quer de uma equação linear.

(c) Calcule a solução geral da equação.

(d) Mostre que a solução geral  $y$  da equação se pode decompor em  $y = 2 + y_h(x)$  sendo  $y_h$  a solução geral de  $y' + 2y = 0$ .

(e) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ .

(f) Determine a solução particular da equação que verifica  $y(0) = 4$ .

56. Considere a seguinte equação diferencial:  $xy' + y = 1, x > 0$ .

(a) Determine uma função constante que seja solução da equação.

(b) Verifique que  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  também é uma solução da equação.

(c) Calcule a solução geral da equação.

(d) Diga, justificando, se  $f$  é uma solução particular ou uma solução singular da equação.

57. Resolva as seguintes equações lineares pelo método do factor integrante:

(a)  $y' + \frac{y}{x} = x^2$

(b)  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$

(c)  $y' - y \operatorname{tg} x = x$

(d)  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{x}{\sec x}$

(e)  $y' - y = e^{2x}$

(f)  $y' + y = 2e^{-x}$

(g)  $y' - \frac{y}{x} = x^3$

(h)  $y' - \frac{2y}{x} = x^3 + x^2$

58. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a)  $y' = -\frac{y^2}{x} \wedge y(-2) = 1$

(b)  $y' = -\frac{x}{y} \wedge y(1) = -1$

(c)  $y' = \frac{1+x}{x^2 - yx^2} \wedge y(1) = 2$

(d)  $y' = \frac{y + \sqrt{x}}{3x} \wedge y(1) = -2$

(e)  $y' = x \left(1 - \frac{y}{x^2 - 1}\right) \wedge y(2) = 1$

(f)  $y' = 2xy + x^3 \wedge y(0) = 1/2$

59. Dadas as funções  $p$  e  $q$  e dado o número racional  $n \neq 0$ , diz-se que:  $y' + p(x)y = q(x)y^n$  é uma equação diferencial de Bernoulli.

(a) Em particular para  $n = 1$  justifique que a equação se reduz a uma equação de variáveis separáveis.

(b) Fazendo a mudança de variável dependente  $z = y^{1-n}$  para  $n \neq 1$ , calcule  $z'$ .

(c) Mostre que  $z = y^{1-n}$  permite transformar essa equação na seguinte equação linear

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

(d) Resolva a equação  $y' + y = e^x y^2$ .





## 6. Modelação Matemática Utilizando EDO's

### 6.1 Modelos representados por EDO's

Um modelo é a descrição matemática de uma situação real, como por exemplo, a observação de um dado fenômeno ou a ocorrência de um certo acontecimento.

Sendo evidente que um modelo matemático não reproduz exactamente a realidade, pode então ser visto como uma projecção da realidade que deve visar um certo objectivo. Para alcancá-lo constrói-se um processo que permita interações entre ambos, designado por modelação matemática. Este processo pode ser constituído pelas seguintes etapas:

1. Formulação do problema.
2. Resolução matemática.
3. Intrepretação dos resultados.

A primeira etapa de apreensão da realidade inicia-se com a elaboração de conhecimentos para formular uma teoria de acordo com leis e pressupostos. Em qualquer caso, são postuladas relações entre variáveis e eventualmente parâmetros, usando os dados disponíveis, provenientes de observações ou de deduções. A análise efectuada, algo delicada e complexa, pode originar uma versão simplificada em face da verdadeira natureza do problema. Porém, essa redução de informação pode tornar o modelo funcional. Uma vez formulado o problema, passa-se à sua representação matemática, escolhendo as técnicas e os instrumentos mais adequados para o resolver. Depois de obter a solução, resta compreender as propriedades e os comportamentos e testá-la perante os dados. Se o modelo não respeitar os dados, tem que sofrer ajustamentos devendo por isso o processo de modelação reiniciar-se. Desta forma, pode-se obter a versão final do modelo após um certo número de iterações. Assim a principal questão não é saber se o modelo é correcto ou não, mas sim se é útil, servindo para compreender a realidade tendo em conta as decisões tomadas inicialmente em função dos objectivos delineados.

#### 6.1.1 Modelo de Crescimento Populacional de Malthus

Consideremos que a evolução do número de indivíduos de uma população ao longo do tempo  $t$ ,  $t \geq 0$ , é representada pela função  $t \mapsto y = f(t)$ . No período de tempo  $I = [t, t + \Delta t]$ , o acréscimo do

tamanho da população é dado por

$$\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Assim, a população cresce em  $I$  se  $\Delta y > 0$  mas decresce em  $I$  se  $\Delta y < 0$ .

Além disso, a taxa de variação relativa de  $y(t)$  (i.e., por indivíduo) em  $I$  é definida por

$$r(t) = \frac{\Delta y}{y(t)}.$$

Por hipótese, suponhamos que existe uma constante  $k \neq 0$  tal que

$$r(t) = k\Delta t$$

em  $I$ . Assim sendo, temos

$$\frac{\Delta y}{y(t)} = k\Delta t \iff \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky(t)$$

Fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$  vem

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky(t)$$

i.e.,  $y(t)$  satisfaz a equação diferencial:

$$y'(t) = ky(t)$$

ou seja, podemos afirmar que a taxa de variação relativa de  $y(t)$  no instante  $t$  é constante,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \iff r(t) = k$$

**Teorema 6.1.1** Seja  $y(t)$  o número de indivíduos de uma população ao longo do tempo  $t$ ,  $t \geq 0$ . Suponhamos que a taxa de variação de  $y(t)$  no instante  $t$  é proporcional ao tamanho da população ao longo do tempo  $t$ , isto é,

$$y' = ky(t), \quad t \geq 0$$

onde  $k \neq 0$  é a constante de proporcionalidade. Então a evolução da população é dada por

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

sendo  $y_0 > 0$  a população inicial.

Tratam-se de modelos de crescimento exponencial se  $k > 0$  e de decaimento exponencial se  $k < 0$ .

Para a população da espécie humana Thomas Malthus introduziu um modelo de crescimento populacional baseado na hipótese de que:

- A taxa de variação da população em cada instante  $t$  é proporcional ao tamanho da população, ou seja  $y' = ky(t)$ , onde  $k > 0$ .

A constante  $k$  pode ser interpretada como a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade. Pelo teorema anterior o modelo de crescimento de T. Malthus prevê crescimento exponencial para a população.

### 6.1.2 Modelo de Crescimento Logístico

Suponhamos que uma população  $y(t)$  pode crescer num meio-ambiente ao longo do tempo  $t$  de forma sustentável até ao limite de  $b$  membros. A taxa de crescimento da população satisfaz

$$y'(t) = ky(b - y(t)), t \geq 0$$

sendo  $k > 0$ . Esta lei de crescimento é chamada lei logística, tendo sido proposta por Verhulst em 1837.

**Teorema 6.1.2 — Crescimento logístico.** Suponha que a taxa de crescimento da população  $y(t)$  satisfaz

$$y'(t) = ky(b - y(t)), t \geq 0 \quad (6.1)$$

sendo  $k > 0$  e  $b > 0$ . Então a população evolui de acordo com

$$y(t) = \frac{b}{1 + \left(\frac{b}{y_0} - 1\right) e^{-kt}}$$

sendo  $y_0 > 0$  a população inicial.

**Corolário 6.1.3** Considere a função logística definida por

$$f(t) = \frac{b}{1 + \left(\frac{b}{y_0} - 1\right) e^{-kt}}$$

solução do problema de valor inicial:

$$y'(t) = ky(b - y) \quad \wedge \quad y(0) = y_0.$$

Então

- (i) O sinal de  $f'(t)$  pode determinar-se através do sinal de  $b - f(t)$ ;
- (ii) o valor  $t^*$  é solução de  $f''(t) = 0$  se e só se  $t^*$  é solução de  $f(t) = b/2$ ;
- (iii) O sinal de  $f''(t)$  pode determinar-se a partir do sinal de  $b - 2kf(t)$ .

*Demonstração.* Por definição de solução  $f(t)$  verifica a EDO (6.1), i.e.,  $f$  é uma função diferenciável em  $[0, +\infty[$  que verifica

$$f'(t) = kf(t)(b - f(t)) \quad (6.2)$$

Sendo  $f$  uma função positiva e  $k > 0$  então  $f'(t)$  e  $b - f(t)$  têm o mesmo sinal.

Derivando (6.2) pela regra do produto obtemos

$$\begin{aligned} f''(t) &= kf'(t)(b - f(t)) - kf(t)f'(t) \\ &= kf'(t)(b - 2f(t)) \end{aligned}$$

Daí temos

$$f''(t) = 0 \iff b - 2kf(t) = 0 \iff f(t) = \frac{b}{2k}$$

Além disso, O sinal de  $f''(t)$  depende do sinal de  $f'(t)$  e do sinal de  $b - 2f(t)$  pois sabemos que  $k > 0$ . ■

#### Desafio 6.1

Considerando os parâmetros  $k = 2$  e  $b = 1$ :

- (a) Determine as funções constantes que são soluções da equação diferencial (6.1).
- (b) Justifique que se trata quer de uma equação de variáveis separáveis quer de uma equação de Bernoulli.
- (c) Determine a solução geral da equação diferencial (6.1).
- (d) Determine a solução do problema de valor inicial para  $y_0 = 0.1$ ,  $y = f(t)$ .
- (e) Mostre que  $y = f(t)$  satisfaz as propriedades enunciadas acima.

**Sugestão: Utilize o Corolário 6.1.3**

- (f) Utilizando a calculadora, trace o gráfico de  $f$ .
- (g) Utilizando a calculadora, trace os gráficos de  $f$  e da função derivada de  $f$ ,  $f'$ , no mesmo referencial cartesiano.

**Desafio 6.2** Considere a função logística definida por

$$f(t) = \frac{b}{1 + \left(\frac{b}{y_0} - 1\right) e^{-kt}}$$

solução do problema de valor inicial:

$$y'(t) = ky(b - y) \quad \wedge \quad y(0) = y_0.$$

Mostre que para  $0 < y_0 < b/2$ , esta função possui as seguintes propriedades:

- $f$  é regular em  $[0, +\infty[$
- $f$  é positiva em  $[0, +\infty[$
- $f$  é estritamente crescente em  $[0, +\infty[$
- Existe  $t^* > 0$  para o qual  $f$  é convexa em  $[0, t^*[$  e côncava em  $]t^*, +\infty[$
- O seu gráfico tem uma assíntota horizontal de equação  $y = b$ , isto é,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = b$

### 6.1.3 Modelo de Capitalização Contínua de Juros Compostos

Quando um cliente de uma instituição bancária pede dinheiro emprestado paga um juro sobre o montante devido e quando deposita dinheiro, por exemplo, numa conta poupança, recebe um juro sobre o montante do depósito. O juro é determinado como o produto do capital por uma taxa, durante um período acordado entre as partes. Assim, o juro é uma variável, referida ao período de capitalização, mas só disponível no vencimento que, geralmente coincide com o fim do período. Mas, o capital é uma variável, referida a um momento (início ou fim do período de capitalização). A capitalização é a transformação ao longo do tempo do capital em capital e juro de acordo com uma dada taxa de juro.

No regime de juros compostos, o stock de capital cresce de vencimento para vencimento; há juros de juros no interior do próprio processo de capitalização; os juros, mal se vencem, passam a ser capital para contagem do juro do período seguinte.

Suponhamos que um dado capital inicial,  $C_0$  unidades monetárias, é aplicado durante um ano a uma taxa de juro anual fixa de  $r$  por cento. Admitamos ainda que a capitalização desse capital se efectua em  $n$  períodos iguais durante o ano. Então o capital acumulado no final do ano é dado por

$$C = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Na tabela observemos que o capital acumulado vai aumentando à medida que aumenta o número de períodos de capitalização, mas de forma sucessivamente mais lenta.

Como seria o aumento do capital se fosse possível capitalizar em períodos cada vez mais curtos ou mesmo capitalizar momentaneamente?

Tabela 6.1: Capital inicial  $C_0 = 1000$  unidades monetárias e taxa de juro  $r = 7$  por cento

$n$	$C$
1	$1000(1 + 0,07) = 1070,00$
2	$1000(1 + 0,07/2)^2 = 1071,22$
4	$1000(1 + 0,07/4)^4 = 1071,86$
12	$1000(1 + 0,07/12)^{12} = 1072,29$
52	$1000(1 + 0,07/52)^{52} = 1072,46$
365	$1000(1 + 0,07/365)^{365} = 1072,50$

**Teorema 6.1.4 — Fórmula de juros compostos com capitalização contínua.** Sejam  $C(t)$  o stock de capital no instante  $t \geq 0$  e  $r$  por cento a taxa de juro fixa. Suponhamos que o investimento, ou seja, a taxa de variação de  $C(t)$ , é proporcional ao stock de capital em cada instante  $t$ , i.e.,

$$C'(t) = rC(t), \quad t \geq 0.$$

Então a dinâmica do stock de capital é dada por

$$C(t) = C_0 e^{kt}$$

sendo  $C_0 > 0$  o capital inicial.

*Demonstração.* Consideremos o período de tempo  $[t, t + \Delta t]$  para  $\Delta t$  suficientemente pequeno. Sendo a taxa de juro no período calculada através de  $r\Delta t$ , o juro obtido é  $C(t)r\Delta t$ . Então o capital obtido no instante  $t + \Delta t$  é

$$C(t + \Delta t) = C(t) + C(t)r\Delta t$$

ou seja,

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = rC(t).$$

Fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$  vem

$$C'(t) = rC(t)$$

Sabendo que  $C(0) = C_0$  é o capital inicial, resolvemos o problema de valor inicial e obtemos

$$C(t) = C_0 e^{rt}.$$

■

**Desafio 6.3** Suponhamos que um capital de 2050 euros é colocado a render numa conta poupança, em regime de juros compostos, à taxa fixa anual de 5 por cento.

- i) Determine o capital acumulado ao fim de um ano, considerando diferentes períodos de capitalização ao ano.
- ii) Escreva a equação diferencial que representa a evolução do capital acumulado ao longo do tempo, em regime de juros compostos com capitalização contínua.
- iii) Determine o capital acumulado ao fim de um ano, considerando o regime de juros compostos com capitalização contínua.
- iv) Compare os resultados obtidos e explique-os.

### 6.1.4 Modelo de Crescimento Económico de Harrod-Domar

Consideremos uma economia fechada que produz um único bem ao longo do tempo  $t \geq 0$ , designado por  $y(t)$ , representando o produto ou o rendimento real da economia (unisectorial). O produto resulta da decomposição

$$y(t) = C(t) + I(t) + A(t)$$

sendo  $C(t)$  o consumo,  $I(t)$  o investimento induzido e  $A(t)$  o investimento autónomo. O modelo de Harrod-Domar é usado para explicar a dinâmica do crescimento económico. Este modelo assenta nos pressupostos económicos:

- o investimento autónomo  $A(t)$  é uma variável exógena (exterior ao modelo), a qual é independente do produto  $y(t)$ ;
- O consumo  $C(t)$  é uma fração do produto

$$C(t) = ky(t)$$

onde a constante  $0 < k < 1$  representa a propensão marginal ao consumo;

- O investimento induzido  $I(t)$  é proporcional à taxa de variação do produto, i.e,

$$I(t) = \nu y'(t)$$

onde a constante  $\nu > 0$  é o chamado acelerador (ou coeficiente de investimento).

Então o produto,  $y(t)$ , é descrito pela equação diferencial.

$$\nu y'(t) - sy(t) = -A(t)$$

onde a constante  $s = 1 - k$  é a propensão marginal à poupança.

Assume-se ainda que:

- Não há externalidades na economia, i.e, a variável exógena  $A(t)$  está ausente, logo  $A(t) = 0$  para todo  $t$ .

Então o modelo de Harrod-Domar é representado pela equação

$$y'(t) = \frac{s}{\nu} y(t)$$

**Teorema 6.1.5** Seja  $y(t)$  o produto da economia, para  $t \geq 0$ . Se a taxa de variação do produto é proporcional ao produto, i.e,

$$y' = \omega y(t), t \geq 0$$

onde  $\omega > 0$  é a constante de proporcionalidade. Então a evolução de  $y(t)$  é descrita por

$$y(t) = y_0 e^{\omega t}$$

sendo  $y_0 > 0$  o rendimento inicial.

Note-se que a constante  $\omega = \frac{s}{\nu}$  representa a chamada taxa de crescimento tecnológico da economia.

### 6.1.5 Modelo de Crescimento Económico de Solow-Swan

A Economia do Crescimento é muito rica em modelos dinâmicos destinados à previsão. O modelo de Harrod-Domar de inspiração Keynesiana foi pioneiro no desenvolvimento desta teoria. O facto do crescimento da economia com pleno emprego da força de trabalho em equilíbrio, tanto a curto

como a longo prazo, ser instável no modelo originou alguma discussão e insatisfação em relação a alguns pressupostos. É neste contexto que ocorre a formulação do modelo de Solow-Swan, assumindo de certa forma uma ruptura associada à problemática dos factores de crescimento, na medida em que pretende explicar o crescimento de longo prazo exclusivamente baseado no comportamento da oferta, menosprezando o valor explicativo do lado da procura.

O modelo de Solow-Swan desenvolvido por Solow e por Swan em 1956, com base em trabalhos independentes, é um modelo de crescimento de uma economia que mostra o efeito da dinâmica da acumulação de capital por trabalhador no processo de crescimento de longo prazo.

No quadro do crescimento neoclássico, o modelo considera uma economia fechada que produz um único bem, representando o rendimento real da economia. Assim, numa economia o stock de capital por trabalhador  $k(t)$  é descrito ao longo do tempo pela equação:

$$k'(t) = sf(k) - (\delta + n)k, t \geq 0 \quad (6.3)$$

onde as constantes  $s$ ,  $\delta$  e  $n$  representam as taxas de poupança, de desvalorização do capital e de crescimento da população, respectivamente. Reparemos que o produto da economia por unidade de trabalho depende de uma função de produção agregada  $f$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- É não-negativa e  $f(0) = 0$ ;
- É estritamente crescente em  $]0, +\infty[$  e  $f'(0) = +\infty$
- É côncava
- $f$  verifica as condições de Inada:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f'(k) = 0$$

**Teorema 6.1.6** Se a taxa de variação do stock de capital por trabalhador  $k(t)$  para  $t \geq 0$  satisfaz

$$k'(t) = sf(k) - (\delta + n)k, t \geq 0 \quad (6.4)$$

com  $f(k) = k^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Então a evolução de  $k(t)$  é descrita por

$$k(t) = \left( \frac{s}{(\delta + n + g)} + Ce^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária.

*Demonastração.* Tomando  $f(k) = k^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , vamos resolver a equação não-linear (6.3) visto que se trata de uma equação de Bernoulli.

Notemos que  $k(t) = 0$  é a solução trivial, logo assumindo  $k(t) \neq 0$  vem

$$k^{-\alpha}(t)k'(t) + (\delta + n + g)k^{1-\alpha}(t) = s \quad (6.5)$$

Com a mudança de variável dependente

$$z(t) = k^{1-\alpha}(t)$$

vem

$$z'(t) + (1 - \alpha)(\delta + n + g)z(t) = (1 - \alpha)s \quad (6.6)$$

Multiplicando a equação pelo factor integrante

$$e^{(1-\alpha)(\delta+n+g)t}$$

vem

$$(e^{(1-\alpha)(\delta+n+g)t}z(t))' = (1-\alpha)se^{(1-\alpha)(\delta+n+g)t} \quad (6.7)$$

Primitivando resulta

$$z(t) = \frac{s}{\delta+n+g} + Ce^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t} \quad (6.8)$$

Regressando à variável dependente inicial temos

$$k(t) = \left( \frac{s}{(\delta+n+g)} + Ce^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t} \right)^{1/(1-\alpha)} \quad (6.9)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. ■

**Desafio 6.4** Considerando  $s = 0.3$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $n = 0.2$  e a função de produção  $f$ , definida por  $f(k) = \sqrt{k}$ , determine:

- (b.1) Diga de que tipo é a equação diferencial (6.3) ;
- (b.2) Determine as funções constantes que são soluções da equação diferencial (6.3);
- (b.3) Determine a solução geral da equação diferencial (6.3);
- (b.4) Determine a solução particular de (6.3) que verifica  $k(0) = k_0$ ,  $y_p = k(t)$ .
- (b.5) Determine a evolução de  $y_p = k(t)$  no longo prazo ( $t \rightarrow \infty$ ).
- (b.6) Utilizando a calculadora, trace o gráfico de  $y_p$ .

### 6.1.6 Modelo de Difusão de Bass

As grandes empresas incorporam a inovação nos processos de gestão. Por exemplo, dedicam particular atenção à concepção e ao desenvolvimento de novos produtos e à introdução de tecnologias visando aumentar as suas vendas.

O modelo de Bass é um modelo matemático que descreve a evolução do volume de vendas cumulativas de novos produtos desde o seu lançamento no mercado de acordo com a teoria da difusão da inovação.

A difusão da inovação envolve um ciclo de vida do produto dividido em quatro estágios: introdução, crescimento, maturação e declínio.

#### Pressupostos do Modelo

- O mercado é constituído por dois tipos de consumidores:
  - (i) Os que decidem adquirir o novo produto, independentemente das decisões dos outros consumidores, são designados por inovadores;
  - (ii) Os que são influenciados pela pressão social do meio, susceptíveis de serem influenciados pelos consumidores que já adquiriram o novo produto, são designados por imitadores (ou seguidores);
- Durante o ciclo de vida do produto existem  $m$  potenciais consumidores;
- O volume de vendas acumulado da empresa no intervalo  $[0, t]$  é representado por  $y(t)$ ; o volume de vendas no instante inicial ( $t = 0$ ) é igual a  $y(0) = 0$ ;
- O volume de vendas no instante  $t$  é simultaneamente proporcional ao número de consumidores que já adquiriram o novo produto e ao número de consumidores que ainda não o adquiriram,  $qy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{m}\right)$ , onde  $q$  é o coeficiente de inovação;
- O volume de vendas no instante  $t$  também é proporcional ao número de consumidores que ainda não adquiriram o novo produto,  $p(m - y(t))$ , onde  $p$  é o coeficiente de imitação.

**Formulação e Resolução Matemática**

O volume de vendas acumulado até ao tempo  $t$ ,  $y(t)$ , é expresso pelo problema de valor inicial:

$$y'(t) = qy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{m}\right) + p(m - y(t)) \quad \wedge \quad y(0) = 0 \quad (6.10)$$

onde  $p$ ,  $q$  e  $m$  são parâmetros positivos.

Vamos resolver a equação diferencial, reescrevendo-a na forma

$$y'(t) = \left(\frac{q}{m}y(t) + p\right)(m - y(t)) \quad (6.11)$$

Efectuando, em primeiro lugar, a mudança de variável  $m - y = u$ , a equação (6.11) transforma-se numa equação de Bernoulli:

$$u'(t) + (p + q)u(t) = \frac{q}{m}u^2(t) \quad (6.12)$$

Aplicando nova mudança de variável  $u^{-1} = z$ , a equação (6.12) transforma-se numa equação linear:

$$z'(t) - (p + q)z(t) = -\frac{q}{m} \quad (6.13)$$

Resolvendo esta equação pelo método do factor integrante obtemos a sua solução geral:

$$z(t) = \frac{q}{m(p + q)} + Ce^{(p+q)t} \quad (6.14)$$

A condição inicial é  $z(0) = 1/m$ , que decorre de  $u(0) = m$  e  $y(0) = 0$ . Substituindo  $t = 0$  em (6.14) vem

$$\frac{1}{m} = \frac{q}{m(p + q)} + C \iff C = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{q}{p + q}\right) \iff C = \frac{p}{m(p + q)}$$

Substituindo o valor de  $C$  em (6.14) temos

$$z(t) = \frac{pe^{(p+q)t} + q}{m(p + q)}$$

Regressando às variáveis  $u$  e  $y$  vem

$$u(t) = \frac{m(p + q)}{pe^{(p+q)t} + q}$$

e

$$y(t) = m - \frac{m(p + q)}{pe^{(p+q)t} + q}$$

onde,

$$y(t) = \frac{mp(e^{(p+q)t} - 1)}{pe^{(p+q)t} + q}$$

e portanto

$$y(t) = \frac{m(1 - e^{-(p+q)t})}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$

**Propriedades da Solução**

**Teorema 6.1.7** A função  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = \frac{m(1 - e^{-(p+q)t})}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$

que é solução do problema de valor inicial (6.10), apresenta as seguintes propriedades:

- É estritamente crescente;
- O gráfico de  $f$  tem uma assímpota horizontal de equação  $y = m$ , ou seja,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = m$ ;
- (i) Se  $q > p$  então  $f$  é convexa em  $]0, t^*[$  e côncava em  $]t^*, +\infty[$ , onde  $t^* = \frac{\ln(q/p)}{p+q}$ ;
- (ii) Se  $q \leq p$  então  $f$  é côncava.

*Demonstração.* Tendo em conta que  $y = f(t)$  é solução de (6.11), basta verificar que:

$$m - y > 0 \quad \wedge \quad \frac{q}{m}y + p > 0$$

para todo  $t \geq 0$ , para concluirmos que  $y'(t) > 0$ , o que significa que  $f$  é estritamente crescente. É evidente que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m(1 - e^{-(p+q)t})}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}} = m$$

De (6.11) vem

$$y'(t) = pm + (q - p)y(t) - \frac{q}{m}y^2(t)$$

logo, derivando  $y'(t)$  obtemos

$$y''(t) = q - p - \frac{2q}{m}y(t).$$

Seja  $q > p$ .

Assim

$$y''(t) = 0 \iff y(t) = \frac{m(q-p)}{2q}$$

Então

$$\frac{m(1 - e^{-(p+q)t})}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}} = \frac{m(q-p)}{2q} \iff 2pq(1 - e^{-(p+q)t}) = (q-p)(p + qe^{-(p+q)t})$$

isto é,

$$2pq - pq + p^2 = (2pq + q^2 - pq)e^{-(p+q)t} \iff p(q+p) = q(p+q)e^{-(p+q)t}$$

isto é,

$$e^{-(p+q)t} = \frac{p}{q} \iff -(p+q)t = \ln(p/q) \iff (p+q)t = \ln(q/p) \iff t = \frac{\ln(q/p)}{p+q}$$

É fácil de ver que  $y''(t) > 0$  para  $t < t^*$  e  $y''(t) < 0$  para  $t > t^*$ , em que  $t^* = \frac{\ln(q/p)}{p+q}$ .

Seja  $q \leq p$ .

Então

$$y''(t) = q - p - \frac{2q}{m}y(t) < 0,$$

para todo o  $t > 0$ , o que significa que  $f$  é côncava.

■

### 6.1.7 Modelo Dinâmico do Mercado de um Bem

A Determinação do Preço de Equilíbrio

Samuelson introduziu um mecanismo dinâmico de ajustamento do preço  $p(t)$  de um bem de acordo com as leis da procura e da oferta. Supondo que a taxa de variação do preço,  $p'(t)$ , é directamente proporcional ao excedente da procura, provou tanto a existência de um preço de equilíbrio  $p_e$  como a estabilidade desse preço.

A Estabilidade do Preço de Equilíbrio

O preço de equilíbrio  $p_e$  é estável se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = p_e$$

A procura e a oferta de um bem são descritas por

$$D(p) = a - bp, \quad S(p) = \alpha - \beta p$$

onde  $a, b, \alpha, \beta$  são parâmetros positivos. A variação do preço ao longo do tempo é proporcional ao excedente de procura, isto é,

$$p'(t) = k(D(p) - S(p)) \Leftrightarrow p'(t) + k(b + \beta)p = k(a - \alpha)$$

onde  $k > 0$ . Sendo  $p_e = \frac{a - \alpha}{b + \beta}$ , então

$$p(t) = (p(0) - p_e)e^{-k(b+\beta)t} + p_e$$

## 6.2 Estudo Qualitativo de EDO's

Geometricamente, já sabemos que a recta tangente ao gráfico de uma função num ponto constitui uma boa aproximação ao gráfico na vizinhança desse ponto.

**Definição 6.2.1** Por cada ponto  $P = (x, y)$  do plano pode passar uma solução da equação diferencial:

$$y'(x) = g(x, y)$$

cuja recta tangente tem uma inclinação, de valor  $g(x, y)$ . Este facto permite-nos traçar segmentos de recta para todos os pontos do plano, onde a função  $f$  está definida.

Ao conjunto de todos os segmentos de recta chama-se campo de direcções da equação diferencial.

### 6.2.1 Representação Gráfica do Mapa de Indiferença

Na Microeconomia neoclássica o consumidor é um agente económico, dotado de uma função de utilidade que atribui um valor numérico  $u(x, y)$  a cada cabaz  $P = (x, y)$  de dois bens X e Y de consumo, onde  $x > 0$  e  $y > 0$  são as quantidades de X e Y, respectivamente. Desta forma, o consumidor descreve as suas preferências que assentam num conjunto de axiomas de decisão racional.

No contexto da utilidade ordinal, as preferências do consumidor entre quaisquer dois cabazes  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , obedece à seguinte classificação:

- (i)  $P_1 = (x_1, y_1)$  é preferido a  $P_2 = (x_2, y_2)$  se e só se  $u(P_1) > u(P_2)$ ;
  - (ii)  $P_2 = (x_2, y_2)$  é preferido a  $P_1 = (x_1, y_1)$  se e só se  $u(P_2) > u(P_1)$ ;
  - (iii)  $P_1 = (x_1, y_1)$  é indiferente a  $P_2 = (x_2, y_2)$  se e só se  $u(P_1) = u(P_2)$ .
- sendo  $u(P_1)$  e  $u(P_2)$  níveis de utilidade.

A teoria de escolha do consumidor pode ser abordada do ponto de vista geométrico, usando a construção de curvas de indiferença, que reflectem a ordenação de preferências por via da função de utilidade.

**Definição 6.2.2** Sejam  $u$  uma função de utilidade e  $c > 0$  um dado nível de utilidade. Diz-se que:

$$I_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : u(x, y) = c\}$$

é uma curva de indiferença.

Geometricamente, a curva  $I_c$  é constituída pelo conjunto de todos os pontos  $P = (x, y)$  do sistema cartesiano  $XoY$  que satisfazem  $u(x, y) = c$ , onde  $x$  e  $y$  são marcados nos eixos das abcissas e das ordenadas respectivamente.

No sistema cartesiano  $XoY$ , quanto mais afastada da origem estiver a curva de indiferença, maior é o nível de utilidade  $c$  do consumidor. Os economistas chamam mapa de indiferença à reunião de todas as curvas de indiferença,  $\bigcup_{c>0} I_c$ .

Seguindo uma abordagem proposta por Pareto, Hicks e Samuelson entre outros, é possível representar o mapa de indiferença no plano  $XoY$ , utilizando a taxa marginal de substituição de um bem por outro para todos os cabazes. Neste caso, os níveis de utilidade são obtidos a partir das curvas de indiferença, ao contrário da abordagem inicial em que eram dados *a priori*.

A taxa marginal de substituição de  $Y$  por  $X$ , para um dado nível de utilidade  $c$ , é a quantidade de  $Y$  que o consumidor se dispõe a prescindir por uma unidade adicional de consumo de  $X$ . Este conceito, introduzido por Hicks, representa matematicamente uma taxa de variação média de  $y = f(x)$  no intervalo  $[x, x+1]$ .

**Definição 6.2.3** Seja  $I_c$  uma dada curva de indiferença. Supondo que  $u(x, y) = c$  define  $y$  como função implícita de  $x$ ,  $y(x)$ , então a taxa marginal de substituição de  $Y$  por  $X$  em  $P = (x, y) \in I_c$  é definida por

$$\tau(x, y) = -y'(x) \quad (6.15)$$

onde  $y'(x)$  é a derivada da função implícita  $y(x)$  em  $x$ . Geometricamente, a taxa marginal de substituição em  $P = (x, y)$  representa o simétrico do declive da curva de indiferença  $I_c$  no ponto  $P$ .

Dado um cabaz  $P_1 = (x_1, y_1)$  e conhecida a taxa marginal de substituição de  $Y$  por  $X$ ,  $\tau(x, y)$ , então o conjunto de todos os cabazes indiferentes a  $P_1 = (x_1, y_1)$  para o consumidor é determinado pela solução do problema de valor inicial (ou problema de Cauchy):

$$\begin{cases} y'(x) = -\tau(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

A representação gráfica da solução é a curva de indiferença que contém  $P_1$ .

De acordo com Hicks, consideremos que  $\tau$  satisfaz as seguintes hipóteses:

- (i)  $\tau$  é uma função de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}_+^2$ ;
- (ii)  $\tau$  é uma função positiva em  $\mathbb{R}_+^2$ ;
- (iii)  $\tau_x(x, y) - \tau(x, y)\tau_y(x, y) > 0$  para todo o  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ .

Em consequência dos pressupostos económicos sobre as preferências do consumidor, suponhamos que cada curva de indiferença é o gráfico de uma função  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $y = f(x)$ ,

com as seguintes propriedades:

- É de classe  $C^2$ , positiva, estritamente decrescente e convexa.
1. Considere que a taxa marginal de substituição de Y por X em qualquer ponto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  é dada por  $\tau(x, y) = \frac{y}{2x}$ .
    - (a) De que tipo é a equação diferencial:  $y'(x) = -\tau(x, y)$ ?
    - (b) Resolva a equação diferencial:  $y'(x) = -\tau(x, y)$ .
    - (c) Trace a curva de indiferença que contém o cabaz  $P_1$ .
    - (d) Mostre que a curva de indiferença traçada corresponde ao gráfico de uma função com as propriedades enunciadas acima.
    - (e) Determine o conjunto de todos os cabazes que são indiferentes a  $P_2$  para o consumidor.
    - (f) De acordo com a classificação apresentada, classifique os cabazes  $P_1$  e  $P_2$ .

### 6.3 Exercícios Propostos

60. Sendo  $k > 0$  e  $b > 0$  parâmetros, considere a equação diferencial  $y' = ky(b - y)$  que descreve o crescimento logístico da variável dependente  $y$  ao longo do tempo  $t$ .
- Determine as funções constantes que sejam soluções da equação.
  - Justifique que se trata quer de uma equação de variáveis separáveis quer de uma equação de Bernoulli.
  - Calcule a solução geral da equação.
  - Considerando  $k = 1$  e  $b = 10$ :
    - Determine a solução particular  $y_p$  que verifica  $y(0) = 0.01$ ;
    - Mostre que  $y_p$  é estritamente crescente e calcule  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_p(t)$ ;
    - Estude as concavidades do gráfico de  $y_p$ ;
    - Trace o gráfico de  $y_p$ .
61. Sendo  $k > 0$  um parâmetro, à equação diferencial  $y' = -ky \ln y$  que descreve o crescimento de uma dada população  $y$  ao longo do tempo  $t$ , chama-se equação de Gompertz.
- Determine as funções constantes que sejam soluções da equação.
  - Calcule a solução geral da equação.
  - Considerando  $k = 1$ :
    - Determine a solução particular  $y_p$  que verifica  $y(0) = e^{-1}$ ;
    - Mostre que  $y_p$  é estritamente crescente e calcule  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_p(t)$ ;
    - Estude as concavidades do gráfico de  $y_p$ ;
    - Trace o gráfico de  $y_p$ .
62. O número de bactérias em certa cultura aumenta de 600 para 1800 em duas horas. Supondo que as bactérias crescem a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em cada instante, determine o número de bactérias ao fim de seis horas.
63. Após a interrupção da campanha de publicidade, o volume de vendas mensais de uma empresa baixou de 10000 para 8500 unidades em quatro meses. Supondo que as vendas decrescem a uma taxa proporcional ao número de unidades vendidas, determine:
- O volume de vendas no final do ano.
  - Ao fim de quanto tempo o volume de vendas se reduz a 5000 unidades.
64. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa à qual um objecto arrefece é directamente proporcional à diferença entre a temperatura do objecto e a do meio ambiente circundante. Se determinado objecto arrefece de 125 graus para 100 graus em meia hora, quando circundado por ar à temperatura de 75 graus, determine a temperatura do objecto ao fim de mais meia hora.
65. O plutónio desintegra-se a uma taxa proporcional à quantidade de plutónio presente em cada instante. O plutónio tem meia de aproximadamente 200 anos (isto é, são necessários 200 anos para passar a metade da quantidade inicial). Determine quanto tempo é necessário para que, de uma quantidade inicial de 1 Kg, restem apenas 200 g.
66. Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5000 l de água. Num dado instante começa a entrar água que contém 0.03 kg de sal por litro a uma taxa de 25 l por minuto. A solução é misturada e sai do tanque à mesma taxa. Determine a quantidade de sal que permanece no tanque ao fim de meia hora.

# Cálculo Integral

<b>7</b>	<b>Integral Definido</b>	<b>265</b>
7.1	A Área como Limite de Somas	
7.2	Propriedades do Integral Definido	
7.3	Funções Integráveis	
7.4	Cálculo de Áreas	
7.5	Técnicas de Integração	
7.6	Aplicações	
7.7	Recursos Complementares	
7.8	Exercícios Propostos	
<b>8</b>	<b>Integrais Impróprios</b>	<b>313</b>
8.1	Definição e Exemplos	
8.2	Aplicações	
8.3	Exercícios Propostos	





## 7. Integral Definido

### 7.1 A Área como Limite de Somas

Seja  $f$  uma função contínua e não-negativa em  $[a, b]$ .

*Como determinar a área,  $A(R)$ , da região*

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}?$$

Começa-se por decompor  $[a, b]$  em  $n$  sub-intervalos iguais de comprimento  $\Delta x$  com  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  através de  $n+1$  pontos  $x_i$  definidos por meio de

$$x_k = a + k\Delta x, \quad 0 \leq k \leq n$$

Em seguida, constrói-se  $n$  rectângulos  $T_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , de largura  $\Delta x$ . Então a soma das áreas de todos os rectângulos constitui uma aproximação para o valor da área. Vamos considerar dois tipos diferentes de somas:

**Somas Superiores:** Neste primeiro caso, os  $n$  rectângulos  $T_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  têm largura  $\Delta x$  e altura  $f(x_k)$ . Então podemos dizer que

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

é uma aproximação por excesso para o valor da área da região  $R$ .

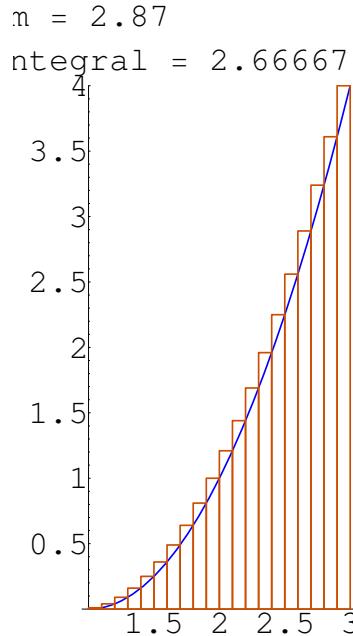
**Somas Inferiores:** Neste segundo caso, os  $n$  rectângulos  $T_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , têm largura  $\Delta x$  e altura  $f(x_{k-1})$ . Então podemos dizer que

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x$$

é uma aproximação por defeito para o valor da área da região  $R$ .

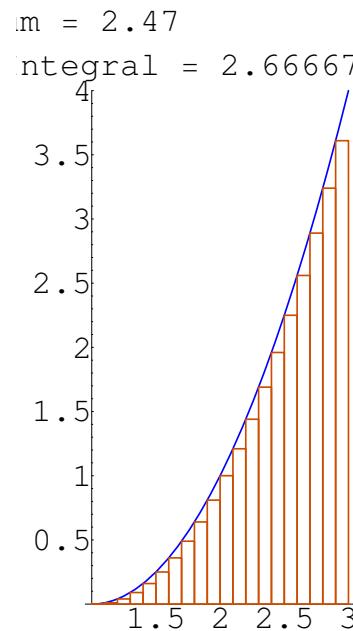
■ **Exemplo 7.1 — Somas Superiores e Somas Inferiores.** Consideremos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = (x - 1)^2$  em  $[1, 3]$ . Nas figuras, tomámos  $n = 20$  sub-intervalos em ambas as somas:

partition into 20 subintervals  
of subinterval used



Assim, para  $n = 20$  a soma superior vale  $S_{20} = 2.87$ .

partition into 20 subintervals  
of subinterval used



Assim, para  $n = 20$  a soma inferior vale  $s_{20} = 2.47$ . Observe que  $s_{20} = S_{20} - \frac{8}{20} = S_{20} - 0,4$ . ■

Vejamos que podemos obter uma expressão para ambas as somas:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{4k^2}{n^2} \frac{2}{n} \\
 &= \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4k^2}{n^2} \frac{2}{n} \\
 &= \frac{8}{n^3} \left( \sum_{k=1}^n k^2 - n^2 \right) \\
 &= S_n - \frac{8}{n}
 \end{aligned}$$

Repare que tanto  $S_n$  como  $s_n$  constituem aproximações para o valor da área da região  $R$  satisfazendo

$$s_n \leq A \leq S_n$$

para todo  $n$ . Parece evidente que: Quanto maior for  $n$  melhor é a aproximação no sentido em que o valor estimado fica mais próximo do valor atribuído à área da região. Por isso, faz sentido definir a área da região

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

através de

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

desde que esse limite exista.

■ **Exemplo 7.2 — Área de uma região via soma de Riemann.** O valor da área da região

$$R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq (x-1)^2\}$$

é dado por

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n^3 + 24n^2 + 8n}{6n^3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

■

Este procedimento para determinar a área de uma dada região através de um limite de uma sucessão de somas, traduz uma situação muito particular de analisar o problema de cálculo da área. É pertinente colocar as seguintes questões:

1. A altura dos rectângulos terá necessariamente que ser igual à imagem por  $f$  da extremidade do lado direito do sub-intervalo?
2. A altura dos rectângulos terá necessariamente que ser igual à imagem por  $f$  da extremidade do lado esquerdo do sub-intervalo?
3. Os sub-intervalos não poderão ter comprimentos diferentes?

As respostas às questões serão dadas pelas próximas definições:

**Definição 7.1.1 — Somas de Riemann.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  limitada em  $[a, b]$ . Efectue-se uma partição  $P$  de  $[a, b]$ , isto é, uma qualquer decomposição num número arbitrário  $n$  de sub-intervalos por meio de pontos  $x_i$  tais que  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . À maior das medidas dos sub-intervalos  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$  considerados chama-se amplitude da partição. Ao somatório

$$S_P = \sum_{k=1}^n f(w_k)(x_k - x_{k-1})$$

para algum  $w_k$ , pertencente a  $[x_{k-1}, x_k]$  chama-se soma de Riemann para  $f$  relativamente a  $P$ . Note-se que para cada partição existem muitas somas de Riemann possíveis.

**Definição 7.1.2 — Noção de Integral Definido.** O integral definido de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  é dado por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{P \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(w_k)(x_k - x_{k-1})$$

desde que o limite exista. Também se diz que  $f$  é integrável à Riemann, ou simplesmente, integrável.

Informalmente, o integral definido representa um número real  $I$ , cuja diferença  $I - S_P$  em valor absoluto se pode tornar tão pequena quanto se queira, para todas as somas de Riemann possíveis desde que o valor da amplitude da partição  $P$  seja suficientemente pequena.



Quando mencionarmos ao longo do texto que  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , estamos a referir-nos exclusivamente à integrabilidade no **sentido de Riemann**.

## 7.2 Propriedades do Integral Definido

Apresentamos as considerações gerais sobre integrais definidos, cuja demonstração será omitida:

### Teorema 7.2.1 — Propriedades de Funções Integráveis.

#### Propriedade da aditividade:

Se  $f$  e  $g$  são integráveis em  $[a, b]$  então

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

- **Propriedade da homogeneidade:**

Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  então

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

para todo o real  $k$ .

- **Propriedade da subdivisão ou Regra de Chasles:**

Seja  $c \in ]a, b[$ . Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- **Propriedade de positividade:**

Se  $f$  é integrável e não-negativa em  $[a, b]$  então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

- Se  $f$  e  $g$  são integráveis em  $[a, b]$  tais que  $g(x) \leq f(x)$  para todo o  $x \in [a, b]$  então

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$



No caso de  $f$  ser uma função integrável em  $[a, b]$ , podemos verificar facilmente que a função  $|f|$  também é integrável em  $[a, b]$ , e que a desigualdade

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq 0$$

é sempre satisfeita.

**Corolário 7.2.2 — Integral com Sinal Negativo.** Suponhamos que  $g$  é integrável em  $[a, b]$  e  $g(x) \leq 0$  para todo o  $x \in [a, b]$ . Então

$$\int_a^b g(x) dx \leq 0.$$

*Demonstração.* Seja  $f$  a função simétrica de  $g$ , isto é,  $f(x) = -g(x)$ . Como  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  e

$$\int_a^b g(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

conclui-se que  $\int_a^b g(x) dx \leq 0$ . ■

**Notação 7.1 — Função integranda vs. intervalo de integração.** No integral definido  $\int_a^b f(x) dx$  é habitual chamar **função integranda** a  $f$ . Ao intervalo  $[a, b]$  chama-se **intervalo de integração** com extremidade (ou extremo) inferior  $a$  e extremidade (ou extremo) superior  $b$ .

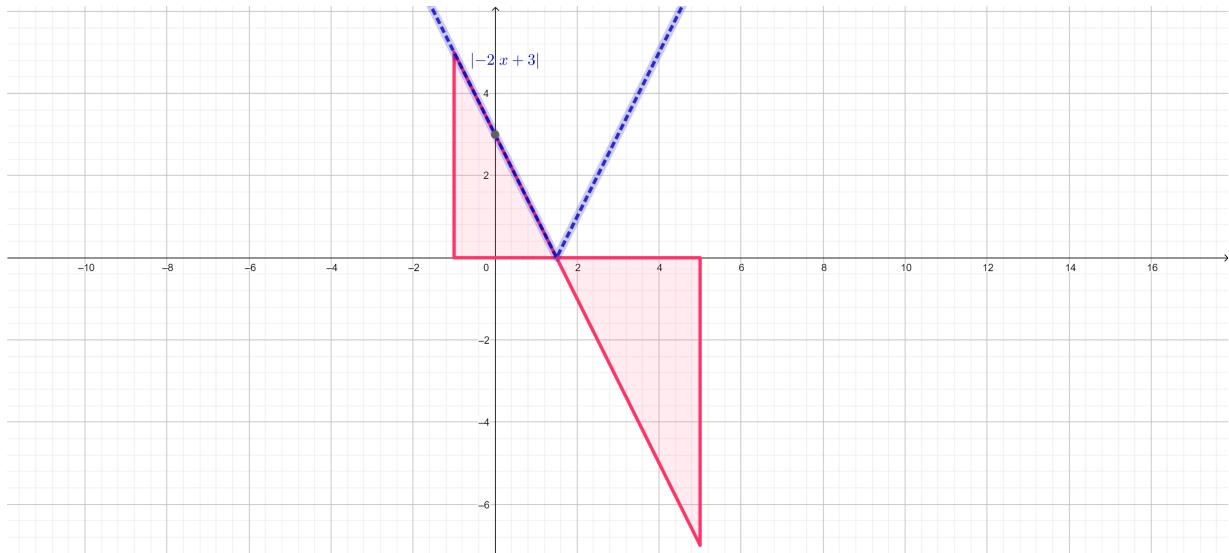
 No caso particular em que  $a = b$ , por convenção tem-se  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

 Por vezes, podem aparecer integrais em que a extremidade superior  $b$  é menor que a extremidade inferior  $a$ . Neste caso, alteramos a posição dos extremos de integração usando a igualdade:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

■ **Exemplo 7.3 — Ilustração do Teorema 7.2.1.** Na figura abaixo está representado o gráfico da função módulo  $x \mapsto |-2x + 3|$  (a azul tracejado) assim como o integral definido

$$\int_{-1}^5 (2x + 3) dx \text{ (área a magenta).}$$



Podemos verificar graficamente que:

- $A_+ := \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (-2x + 3) dx$  coincide com o valor da área do triângulo situado acima do eixo  $Ox$ ;

- O valor do integral definido  $\int_{\frac{3}{2}}^5 (-2x + 3)dx$  coincide com simétrico do valor da área do triângulo situado abaixo do eixo  $Ox$ , uma vez que  $A_- := -\int_{\frac{3}{2}}^5 (-2x + 3)dx \geq 0$ ;
  - A propriedade da subdivisão ilustrada **Teorema 7.2.1** permite-nos concluir que a igualdade

$$\int_{-1}^5 (2x+3)dx = A_+ - A_-,$$

onde  $A_{\pm}$  correspondem aos integrais definidos supramencionados.

Em particular, é possível verificar que  $A_+ - A_-$  é negativo em virtude da função  $x \mapsto -2x + 3$  não ter sinal constante no intervalo  $[-1, 5]$ .

No entanto, se considerarmos o integral definido  $\int_{-1}^5 | -2x + 3 | dx$  podemos facilmente concluir, com base na propriedade de **positividade**, que o valor deste é não negativo, e com base na **propriedade de subdivisão** que este representa a soma da área dos dois triângulos dados na figura, i.e.

$$\int_{-1}^5 | -2x + 3 | dx = A_+ + A_-.$$

**Desafio 7.1 — Aplique os seus conhecimentos sobre propriedades dos integrais definidos.**  
Para cada uma das questões abaixo assinale apenas a letra correcta.

1. Admita que  $f$  é uma função integrável no intervalo  $[-2, 1]$  tal que

$$\int_{-2}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \quad \& \quad \int_0^1 f(x)dx = 3, \quad \text{então:}$$

$$(A) \int_{-2}^1 (5 - f(x)) dx = 3$$

$$(B) \int_{-2}^1 (5 - f(x)) dx = 9$$

$$(C) \int_{-2}^1 (5 + f(x)) dx = 12$$

$$(D) \int_{-2}^1 (5 + f(x)) dx = 18.$$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

2. Admita que  $f$  é uma função integrável no intervalo  $[3,5]$  tal que

$$\int_3^4 f(x)dx = \int_4^5 f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_4^5 f(x)dx < 3.$$

Podemos afirmar que:

$$(A) \int_3^5 (8 - f(x)) dx \geq 9$$

$$(B) \int_3^5 (8 - f(x)) dx \leq 10$$

$$(C) \int_3^5 (8 + f(x)) dx < 19$$

$$(D) \int_3^5 (8 + f(x)) dx \leq 22.$$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

**Resposta:** \_\_\_\_\_

4. O integral definido  $I = \int_0^2 |x^2 - \sqrt{x}| dx$  é igual a:

(A)  $I = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x}) dx$       (B)  $I = \int_0^2 (\sqrt{x} - x^2) dx$

(C)  $I = \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x}) dx + \int_1^2 (\sqrt{x} - x^2) dx$       (D)  $I = \int_0^2 (x^2 - \sqrt{x}) dx$ .

**Resposta:** \_\_\_\_\_

## 7.3 Funções Integráveis

### 7.3.1 Condições suficientes de integrabilidade

Comecemos por enunciar duas condições suficiente de integrabilidade. A primeira (funções limitadas em intervalos fechados) pode ser interpretada como uma consequência imediata da construção via somas de Riemann.

**Teorema 7.3.1 — Funções limitadas são integráveis.** Toda a função limitada em  $[a, b]$  é integrável nesse intervalo.

-  Todas as funções limitadas abordadas na subseção **1.3.4 Periodicidade e Limitação** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** são exemplos de funções integráveis em intervalos da forma  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ .

-  No caso das funções da subseção **1.5.8 Funções Trigonométricas** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**, apenas as funções seno e cosseno são integráveis em  $[a, b]$ .

O segundo resultado (funções contínuas em intervalos fechados) pode ser visto como uma consequência do primeiro resultado, dado que o Teorema de Weierstrass (vide **Teorema 2.2.9**) do capítulo **2 Limites e Continuidade** nos garante que toda a função contínua em intervalos da forma  $[a, b]$  também é limitada no mesmo intervalo.

**Corolário 7.3.2 — Continuidade implica integrabilidade.** Toda a função contínua em  $[a, b]$  é integrável nesse intervalo.

-  A continuidade de uma função é uma condição suficiente de integrabilidade num intervalo fechado, mas não é uma condição necessária, pois existem também funções integráveis que são descontínuas.

■ **Exemplo 7.4 — Função não contínua mas integrável.** Podemos facilmente verificar que a função  $f$ , definida pontualmente por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

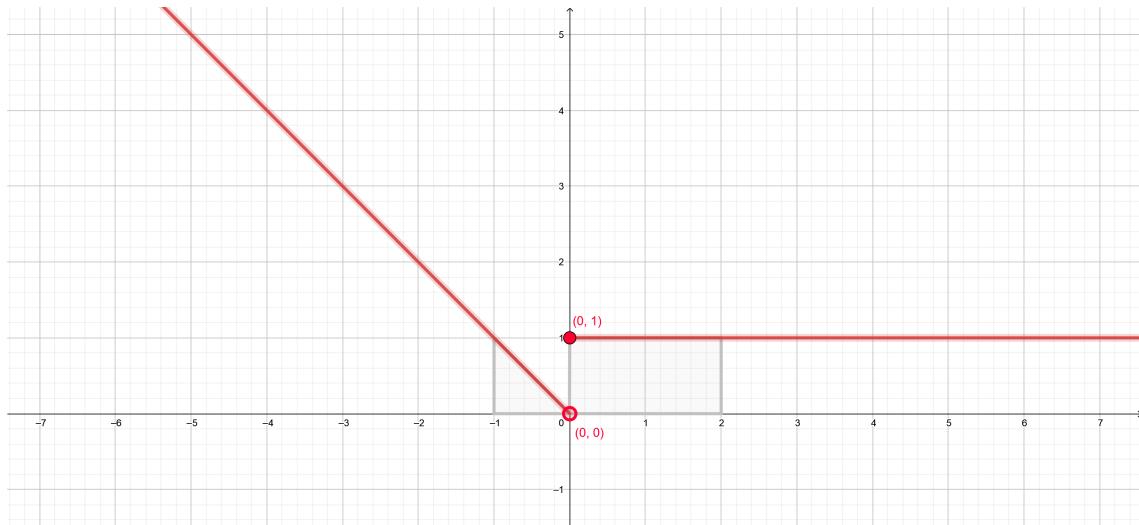
é descontínua em  $x = 0$ . No entanto, podemos verificar facilmente concluir pelo **Teorema 7.3.1** que ela é sempre integrável em intervalos da forma  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , mesmo nos casos em que  $0 \in [a, b]$ .

A título de exemplo, no caso de  $[a, b] = [0, 2]$  podemos concluir automaticamente pelo **Corolário 7.3.2** que  $f$  é integrável em  $[0, 2]$ , uma vez que a restrição de  $f$  ao intervalo  $[0, 2]$  ( $f(x) = 1$ ) é sempre uma função contínua. No entanto, para o caso de escolhermos o intervalo  $[a, b] = [-1, 2]$ , tem-se:

- $f$  não é contínua em  $[-1, 2]$ , uma vez que  $f$  exibe uma descontinuidade em  $x = 0$ .
- $f$  é integrável em  $[-1, 2]$ , uma vez que o integral definido

$$\int_{-1}^2 f(x) dx$$

representa a **união de duas áreas**: a área de um triângulo (de medida igual a  $\frac{1}{2}$ ) e a área de rectângulo (de medida igual a 2), tal como ilustrado na figura abaixo.



Na verdade, a integrabilidade da função  $f$  no **Exemplo 7.3.2** poderia também ser concluída com recurso à **propriedade da subdivisão** (vide **Teorema 7.2.1**).

### 7.3.2 Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Comecemos por revisitar a construção considerada no **Exemplo 7.2**.

■ **Exemplo 7.5 — Continuação do Exemplo 7.2.** Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo da parábola de equação  $y = (x - 1)^2$ .

Seja  $F : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função que faz corresponder à abcissa  $x_0$  a área de

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq x_0 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq (x - 1)^2\}.$$

Repare então que o valor  $A = \frac{8}{3}$  que obtivemos no exemplo anterior também pode ser igual a  $F(3) - F(1)$ . Vamos provar esta evidência geométrica.

Para o acréscimo  $h$  da variável  $x$  em torno de  $x_0 > 0$ , considere

$$\Delta F(x_0) = F(x_0 + h) - F(x_0)$$

que representa a área da região delimitada pelas rectas  $x = x_0$  e  $x = x_0 + h$ , pela parábola e pelo eixo  $Ox$ .

Para  $h > 0$  obtemos

$$h(x_0 - 1)^2 \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h(x_0 + h - 1)^2$$

donde

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = (x_0 - 1)^2.$$

Analogamente também se prova que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = (x_0 - 1)^2$$

Portanto  $F$  é diferenciável e  $F'(x) = (x - 1)^2$ . Por primitivação obtém-se  $F(x) = \frac{1+(x-1)^3}{3}$  dado que  $F(0) = 0$ . Finalmente, vem

$$A = F(3) - F(1) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

■

**Num sentido mais geral, o exemplo acima é uma mera consequência do seguinte resultado.**

**Teorema 7.3.3 — Teorema Fundamental do Cálculo Integral.** Se  $f$  é uma função contínua em  $[a, b]$  então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

sendo  $F$  uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ .

**Desafio 7.2 — Aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.** Calcule os seguintes integrais definidos com recurso ao **Teorema 7.3.3**

1.  $\int_0^3 (4 - x^2) dx$ ;
2.  $\int_0^2 (\sqrt{x} - x^2) dx$ .

■ **Exemplo 7.6 — Continuação do Exemplo 7.4.** Mesmo a função do **Exemplo 7.4** não sendo contínua no intervalo  $[-1, 2]$ , a combinação da **regra de Chasles** e do **Teorema Fundamental do Cálculo** permitem-nos concluir que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 1 dx \\ &= \left[ -\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + [x]_0^2 \\ &= (-0 + \frac{1}{2}) + (2 - 0) \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

■



A aplicação do **Teorema Fundamental do Cálculo** no **Exemplo 7.6** seguiu do facto de:

- $x \mapsto -x$  ser uma função contínua em  $[-1, 0]$ ;
- $x \mapsto 1$  ser uma função contínua em  $[0, 2]$ .

**Desafio 7.3 — Verificação da aplicabilidade do Teorema 7.3.3.** Para as funções  $F$  e  $f$  definidas por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, 1 \\ 0 & \text{se } x = 0, 1 \end{cases} \quad \& \quad f(x) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, 1 \\ 0 & \text{se } x = 0, 1 \end{cases},$$

respectivamente, verifique que:

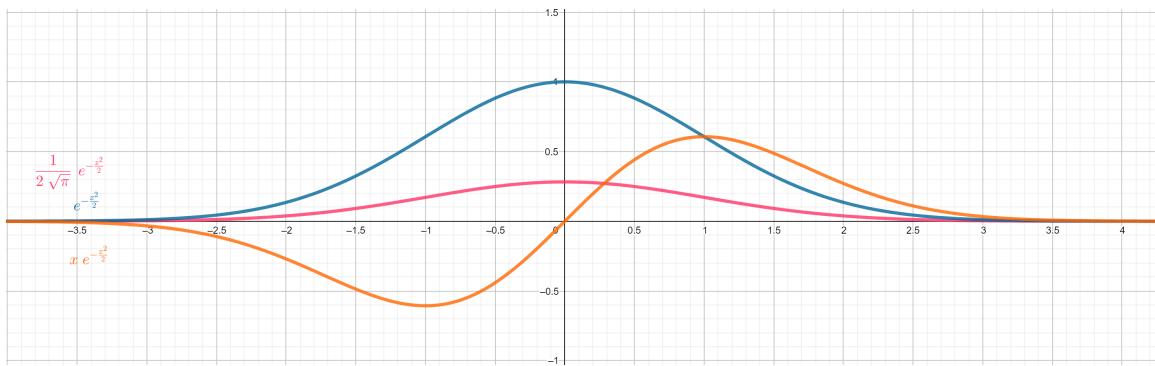
1.  $F$  é diferenciável em  $[0, 1]$ ;
2.  $f$  não é contínua mas é integrável em  $[0, 1]$ ;
3.  $F'(x) = f(x)$ , para todo o  $[0, 1]$ .

Adicionalmente, diga se a igualdade

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0)$$

se verifica.

■ **Exemplo 7.7 — Função Gaussiana.** A distribuição normal estandartizada (gráfico da função a magenta), obtida a partir da função Gaussiana (gráfico da função a azul em forma de sino), corresponde a um exemplo de uma função integrável em intervalos da forma  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  – por ser contínua em  $\mathbb{R}$  – para a qual não podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo por não conhecemos uma primitiva.



Ou seja:

1.  $\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}$  existe (vide **Corolário 7.3.2**);
2.  $\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}$  também existe pela **propriedade da homogeneidade** (vide **Teorema 7.2.1**).
3. Não é conhecida uma função  $F$  tal que

$$F'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ para todo o } x \in [a, b].$$

(vide **Definição 4.1.1** do capítulo **4 Primitivação**).

No entanto, a função representada a laranja – multiplicação da função Gaussiana pela função identidade – já é uma função que está nas condições do **Corolário 7.3.2** & do **Teorema 7.3.3**, uma vez que:

1. É contínua em intervalos da forma  $[a, b]$  (produto de funções contínuas);
2. Admite uma primitiva  $F$  em  $[a, b]$ :  $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Neste último caso, tem-se que:

$$\begin{aligned}\int_a^b xe^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \left[ -e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_a^b \\ &= e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}.\end{aligned}$$

■

**Desafio 7.4 — Continuação do Exemplo 7.3.** Use a **propriedade da subdivisão** e o **Teorema 7.3.3** para confirmar que

$$\int_{-1}^5 |-2x+3| dx = \underbrace{\frac{5(3/2 - (-1))}{2}}_{=A_+} + \underbrace{\frac{7(5 - 3/2)}{2}}_{=A_-}.$$

**Desafio 7.5 — Testes os seus conhecimentos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.** Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando sucintamente:

1. Posso aplicar o **Teorema 7.3.3** à função  $x \mapsto e^{-|x|}$  em intervalos da forma  $[0, b]$  ( $b > 0$ );
2. Posso aplicar o **Teorema 7.3.3** à função  $x \mapsto e^{-|x|}$  em intervalos da forma  $[-b, b]$  ( $b > 0$ );
3. O integral definido  $\int_{-2}^0 xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$  define uma área;
4. O integral definido  $\int_{-2}^2 xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$  define uma área;
5.  $\int_{-2}^2 e^{-|x|} dx = \frac{2e^2 - 2}{e^2}$ ;
6.  $\int_{-2}^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq 2 - 2e^{-2}$ .

## 7.4 Cálculo de Áreas

### 7.4.1 Áreas definidas a partir de funções não positivas

**Definição 7.4.1 — Região Limitada Inferiormente pelo Gráfico de  $f$  e Superiormente pelo eixo  $Ox$ .** A área da região

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad f(x) \leq y \leq 0\}$$

é igual a

$$A = - \int_a^b f(x) dx.$$

■ **Exemplo 7.8 — Região situada abaixo do eixo  $Ox$ .** Sendo que a função  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$  se situa abaixo do eixo  $Ox$  no intervalo  $[-1, 0]$ , segue que a área da região delimitada por  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = -1$  e  $y = 0$  vale

$$-\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx = -\frac{3}{4} \left[ \sqrt[3]{x^4} \right]_{-1}^0 = \frac{3}{4}.$$

### 7.4.2 Áreas definidas a partir da função módulo

**Definição 7.4.2 — Região Limitada pelo Gráfico de módulo de  $f$  e pelo eixo  $Ox$ .** Suponhamos agora que a função  $f$  não tem sinal constante no intervalo  $[a, b]$ . Então a área da região delimitada pelas rectas  $x = a$  e  $x = b$ , pela gráfico de  $f$  e pelo eixo  $Ox$  é dada por

$$A = \int_a^b |f(x)| dx.$$

■ **Exemplo 7.9 — Área delimitada pelo gráfico da função seno e pelo eixo  $Ox$ .** Considere-se a região delimitada por

$$y = \sin(2x) \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad x = \pi.$$

A área é igual a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\sin(2x)| dx &= \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx + \int_{\pi/2}^\pi (-1) \sin(2x) dx \\ &= \frac{1}{2}[-\cos(2x)]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}[\cos(2x)]_{\pi/2}^\pi \\ &= \frac{1}{2}(-\cos\pi + \cos 0) + \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi) \\ &= 2. \end{aligned}$$

■

### 7.4.3 Regiões Verticalmente Simples

**Definição 7.4.3 — Região Verticalmente Simples.** A área da região

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

é igual a

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



No caso de das funções  $f$  e  $g$  serem pontualmente definidas no intervalo  $[a, b]$  por

$$f(x) = |h(x)| \quad \& \quad g(x) = -|h(x)|,$$

podemos facilmente verificar que o valor do integral definido

$$H = \int_a^b |h(x)| dx$$

corresponde a **metade da área da região**

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad -|h(x)| \leq y \leq |h(x)|\}.$$

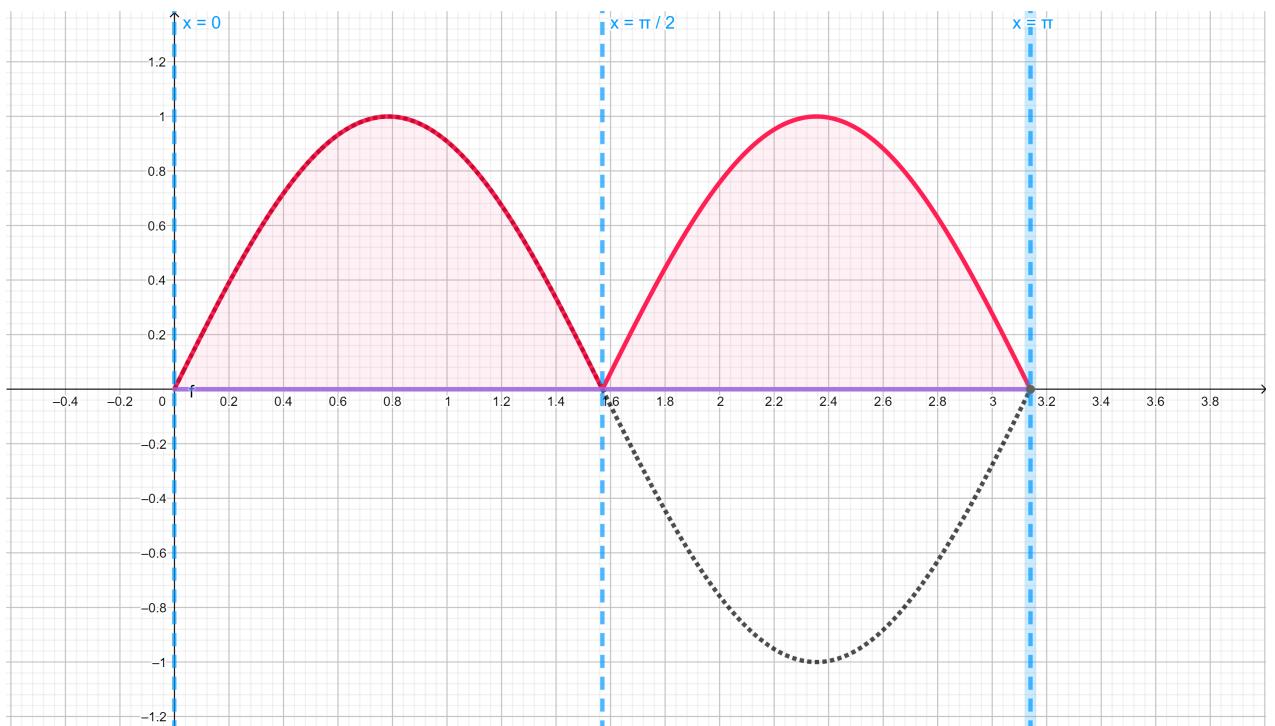


Figura 7.1: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.9**. A magenta (resp. a lilás) encontra-se representado o gráfico da função  $x \mapsto |\sin(2x)|$  (resp. gráfico da recta horizontal  $y = 0$ ) no intervalo  $[0, \pi]$ , e a pontilhado o gráfico da função  $x \mapsto \sin(2x)$  no intervalo  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Com recurso ao cálculo do integral  $\int_0^\pi \sin(2x)dx$  e às propriedades de integração – mais propriamente, a propriedade da subdivisão – podemos ainda concluir que  $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin(2x)dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx$ .

■ **Exemplo 7.10 — Área delimitada pelo gráfico duma recta e duma parábola.** A área da região limitada pelos gráficos das funções definidas por  $y = x$  e  $y = x^2$  no intervalo  $[0, 1]$  é dada por

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

■

■ **Exemplo 7.11 — Continuação do Exemplo 7.10.** Suponhamos agora que pretendemos determinar a área da região limitada pelos gráficos das funções definidas por  $y = x$  e  $y = x^2$  no intervalo  $[0, 2]$  é dada pela soma dos integrais

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |x - x^2| dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (-x + x^2) dx. \end{aligned}$$

A fórmula acima resultou do facto de:

- o gráfico da parábola de equação  $y = x^2$  se situar abaixo do gráfico da recta, isto é,  $x^2 \leq x$ , para valores de  $x \in [0, 1]$ ;
- o gráfico da parábola de equação  $y = x^2$  se situar acima do gráfico da recta, isto é,  $x^2 \geq x$ , para valores de  $x \in [1, 2]$ .

**Deixamos ao cargo do leitor a tarefa de verificar que  $A = 1$  é o valor da área pretendida.** ■

■ **Exemplo 7.12 — Para revisitar a equação da recta tangente.** Suponhamos agora que pretendemos determinar a área da região delimitada entre as rectas verticais

$$x = 0 \text{ e } x = 1,$$

a parábola de equação

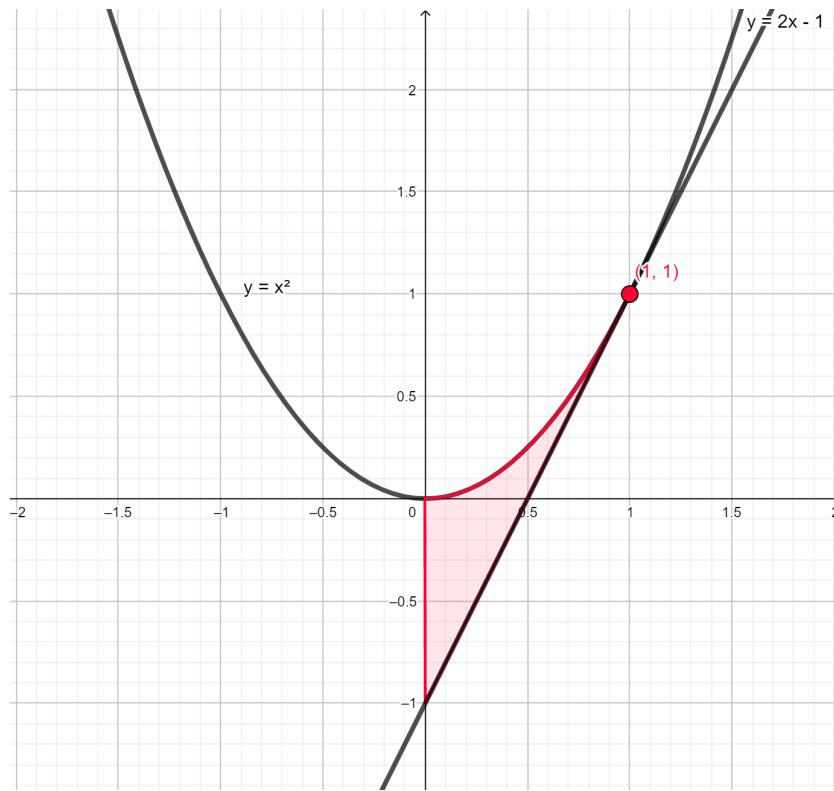
$$y = x^2$$

e a recta tangente ao gráfico de  $x \mapsto x^2$  no ponto  $P = (1, 1)$ . Esta última é dada pela equação  $y = 2x - 1$ .

Com base na representação gráfica abaixo é fácil de constatar que o gráfico de  $x \mapsto x^2$  se situa sempre acima do gráfico da recta tangente, de equação  $y = 2x - 1$ , donde se retira que

$$A = \int_0^1 (x^2 - (2x - 1)) dx$$

corresponde à área da região delimitada a vermelho na figura abaixo.

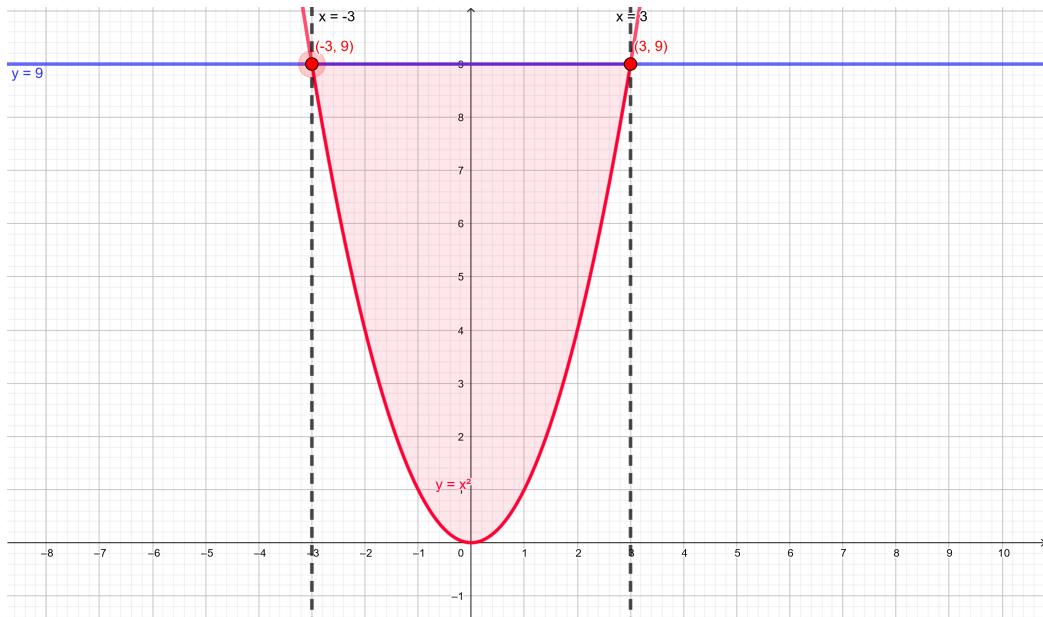


Adicionalmente, com base no Teorema Fundamental do Cálculo e na identidade binomial  $(x^2 - (2x - 1)) = (x - 1)^2$  é possível concluir que

$$A = \int_0^1 (x - 1)^2 dx = \left[ \frac{(x - 1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

■

■ **Exemplo 7.13 — Igualdade de áreas.** Na figura abaixo encontra-se representado a região limitada inferiormente parábola de equação  $y = x^2$  (a magenta), e superiormente pela recta horizontal  $y = 9$  (a azul).



Podemos facilmente verificar que a área da região sombreada na figura acima pode ser descrita pelo integral definido

$$A = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx,$$

onde os extremos de integração  $x = -3$  e  $x = 3$  foram determinados a partir da interseção da parábola  $y = x^2$  com  $y = 9$  (soluções da equação  $x^2 = 9$ ).

Adicionalmente, é fácil de verificar via o Teorema Fundamental do Cálculo que  $A = 36$ .

Supondo agora que pretendemos subdividir a região a sombreado em duas áreas, separadas pela recta de equação  $y = c$  ( $0 < c < 9$ ), poderíamos chegar às seguintes conclusões – que deverá verificar como exercício:

- O integral definido

$$A(c) = \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2) dx$$

permite-nos calcular a área limitada inferiormente parábola de equação  $y = x^2$ , e superiormente pela recta horizontal  $y = c$ ;

- A diferença de integrais definidos

$$36 - A(c) = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx - \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2) dx$$

permite-nos determinar a área delimitada pela parábola  $y = x^2$ , e pelas rectas de equações  $y = 9$  e  $y = c$ .

- O valor da área  $A(c)$  é igual a  $\frac{4}{3}\sqrt{c^3}$ ;
- A recta horizontal, de equação  $y = c$ , divide a área a sombreado acima em duas regiões de áreas iguais (i.e.  $36 - A(c) = A(c) \implies A(c) = 18$  quando  $c = \frac{9}{\sqrt[3]{4}}$ ).

■

**Desafio 7.6 — Como complemento ao Exemplo 7.12.** Determine a área da região delimitada entre as rectas verticais  $x = 1$  e  $x = \frac{3}{2}$ , a parábola de equação

$$y = x^2$$

e a recta tangente ao gráfico de  $x \mapsto x^2$  no ponto  $P = (1, 1)$ .

**Desafio 7.7 — Continuação do Exemplo 7.10 & do Exemplo 7.11.** Determine, para que valores de  $b \geq 1$  se verifica a igualdade

$$\int_0^b |x - x^2| dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx.$$

O que pode concluir acerca da área do gráfico delimitado pelo gráfico da recta  $y = x$ , da parábola e pelas rectas verticais  $x = 1$  e  $x = b$ ?

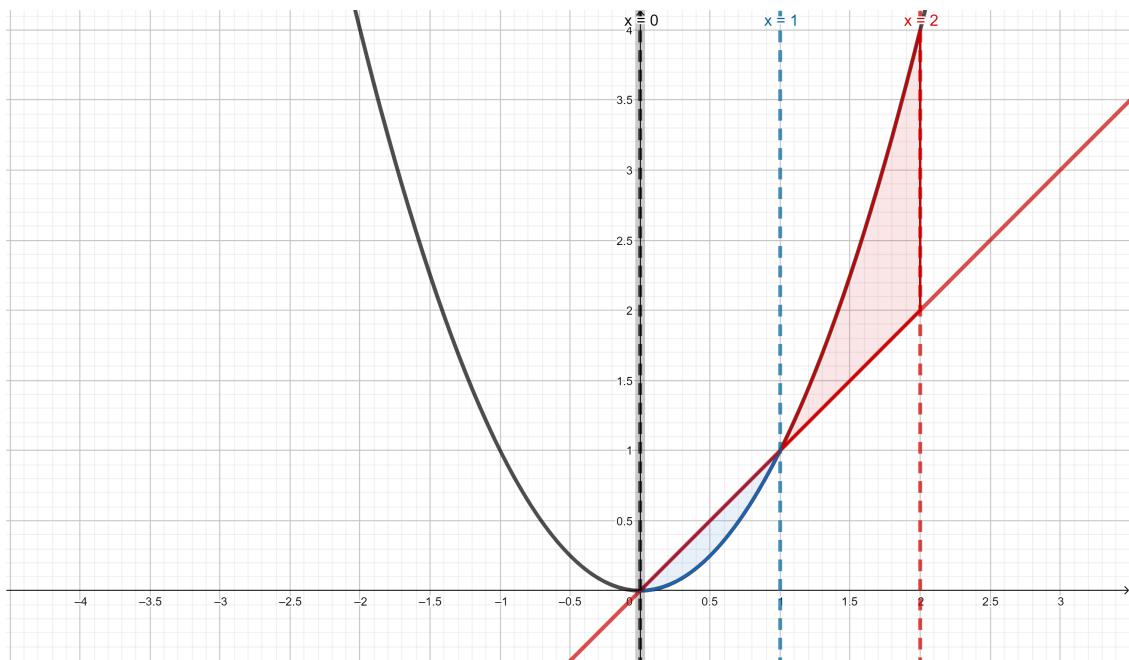


Figura 7.2: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.10** & do **Exemplo 7.11**. A área da região a azul é delimitada pelo integral  $\int_0^1 (x - x^2) dx$ . Por sua vez, o integral  $\int_0^2 |x - x^2| dx$  corresponde à soma das áreas das regiões a azul – dada pelo integral  $\int_0^1 (x - x^2) dx$  – e a vermelho – dada pelo integral  $\int_1^2 (-x + x^2) dx$ .

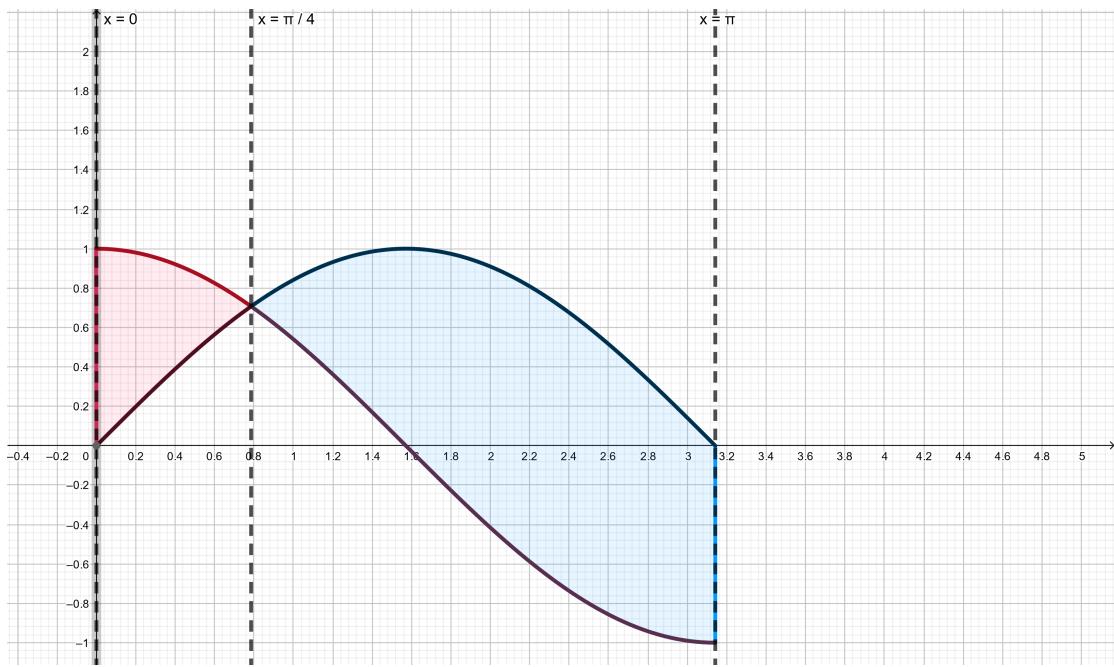


Figura 7.3: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.14**. A área sombreada a vermelho é determinada a partir do integral definido  $\int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$ , ao par que a área sombreada a azul é determinada a partir do integral definido  $\int_{\pi/4}^{\pi} |\cos x - \sin x| dx$ . Por seu turno, o integral definido  $\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| dx$  corresponde à soma das áreas das regiões sombreadas da figura. Esta subdivisão da área do gráfico foi necessária, uma vez que a função  $x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$  não tem sinal constante. Esta constatação é elucidada pelo facto do gráfico da função cosseno se situar acima do gráfico da função seno no intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$ , e de o gráfico da função seno passar a se situar acima do gráfico da função cosseno no intervalo  $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ .

■ **Exemplo 7.14 — Área compreendida entre funções trigonométricas.** A área da região compreendida entre os gráficos das funções definidas por  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$  para  $x \in [0, \pi]$  é dada por

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| dx &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \\
 &+ \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\
 &= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + \\
 &+ [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi} \\
 &= \sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} \\
 &= 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

■

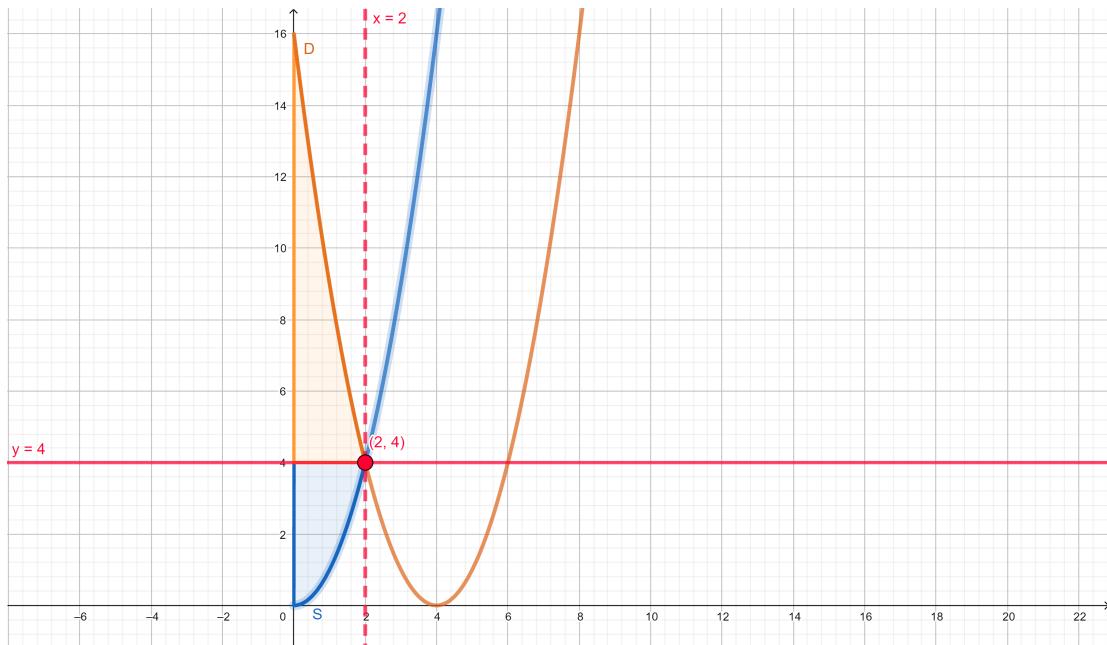
**Desafio 7.8 — Vide Exemplo 2.20 do Capítulo 2.** Para valores de  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , determine as áreas das regiões delimitadas entre os gráficos das funções:

1.  $y = x$  e  $y = \sin(x)$ ;
2.  $y = x$  e  $y = \tan(x)$ ;
3.  $y = \sin(x)$  e  $y = \tan(x)$ .

■ **Exemplo 7.15 — Excedentes do Produtor e do Consumidor.** Na figura abaixo estão representadas à direita do eixo  $Oy$  duas regiões a sombreado, definidas pelas funções

$$S(x) = x^2 \text{ (a azul)} \text{ e } D(x) = x^2 - 8x + 16 \text{ (a laranja)},$$

que podem ser interpretadas como o excedentes do produtor e do consumidor – vide mais à frente a subseção 7.6.1 Excedentes do Produtor e do Consumidor.



Para determinarmos as regiões acima, começámos por determinar a intersecção dos gráficos  $D$  e  $S$  – que corresponde ao ponto de equilíbrio  $(x, y) = (2, 4)$ .

Assim, a região a azul – que pode ser interpretada como o **excedente do produtor** – é determinada a partir do integral definido

$$\int_0^2 (4 - S(x))dx = 8 - \int_0^2 S(x)dx,$$

ao par que a região a laranja – que pode ser interpretada como o **excedente do consumidor** – é determinada a partir do integral definido

$$\int_0^2 (D(x) - 4)dx = \int_0^2 D(x)dx - 8.$$

Note ainda que em ambos os integrais acima o valor numérico 8, descrito em termos do integral definido

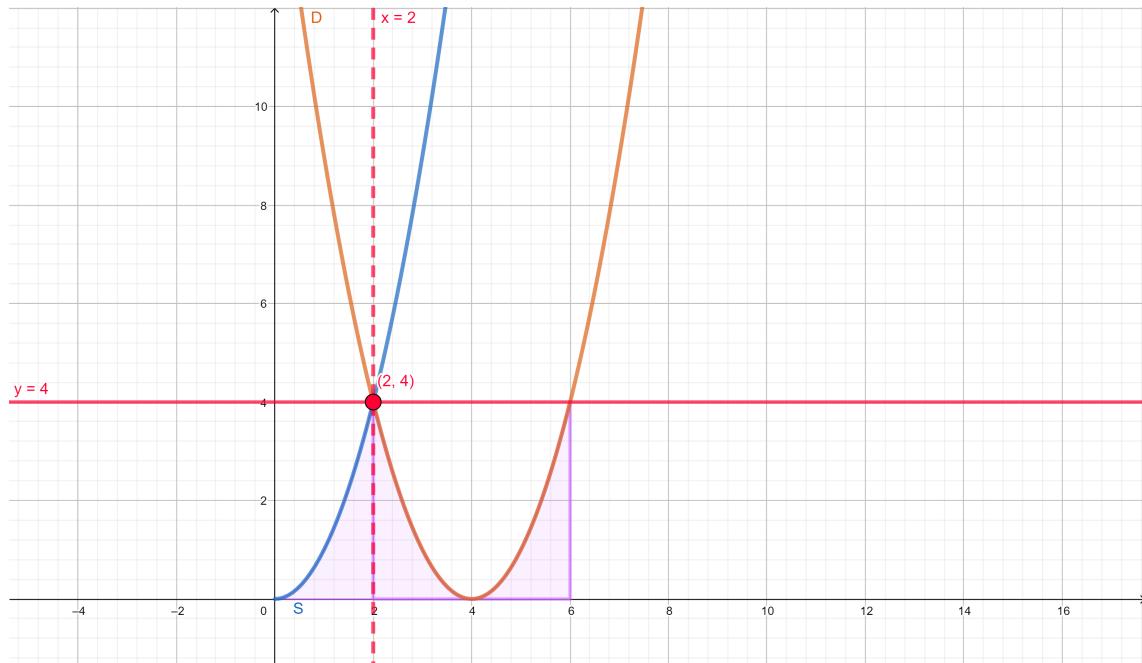
$$8 = \int_0^2 4dx$$

corresponde à área do rectângulo delimitado pelas rectas horizontais

$$y = 0 \quad \& \quad y = 4,$$

e pelas rectas verticais  $x = 0$  e  $x = 2$ .

**Desafio 7.9 — Área da região colorida.** Determine a área sombreada da figura abaixo, descrita em termos das funções  $D$  e  $S$  do **Exemplo 7.15**.

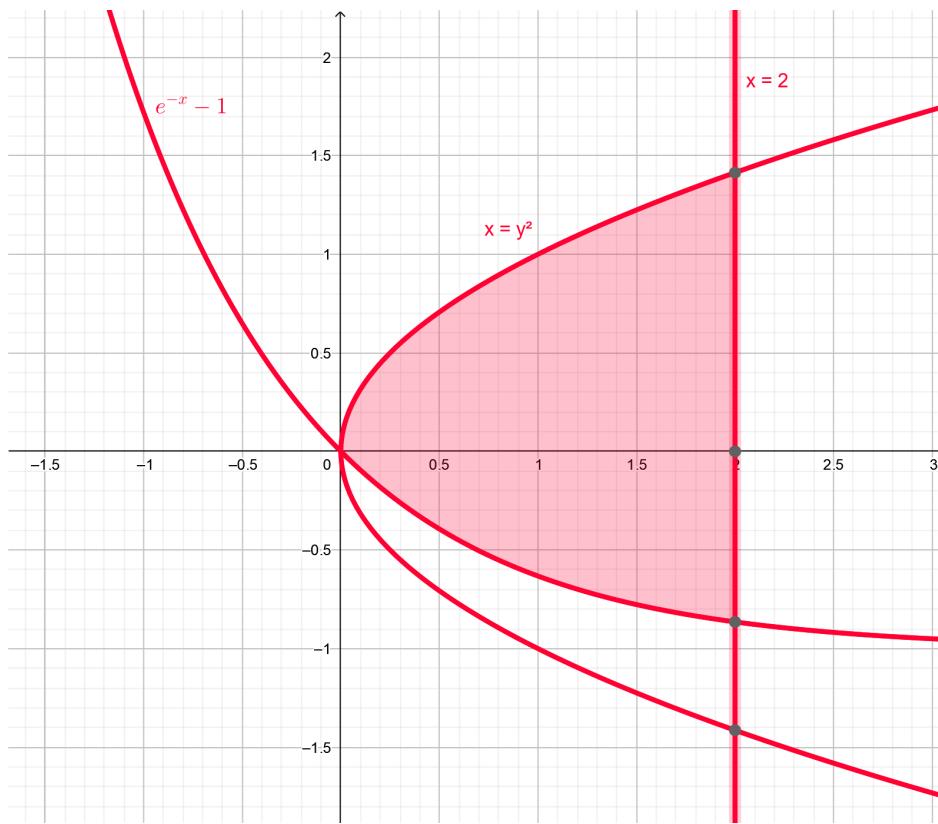


■ **Exemplo 7.16 — Região delimitada por curvas parabólicas e exponenciais.** A representação geométrica da região

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2 \wedge y \geq e^{-x} - 1 \wedge x \leq 2\}$$

dada pela figura abaixo permite-nos concluir que  $R_1$  trata-se de uma região verticalmente simples, descrita em termos do conjunto de inequações

$$0 \leq x \leq 2 \wedge e^{-x} - 1 \leq y \leq \sqrt{x}.$$



Desta última descrição segue que a área de  $R_1$  é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^2 (\sqrt{x} - (e^{-x} - 1)) dx &= \left[ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + e^{-x} + x \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{8} + 1 + e^{-2} \quad (\text{ou } \frac{4}{3}\sqrt{2} + 1 + e^{-2}). \end{aligned}$$

■

#### 7.4.4 Regiões Horizontalmente Simples

**Definição 7.4.4 — Região Horizontalmente Simples.** A área da região

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d \quad \wedge \quad q(y) \leq x \leq p(y)\}$$

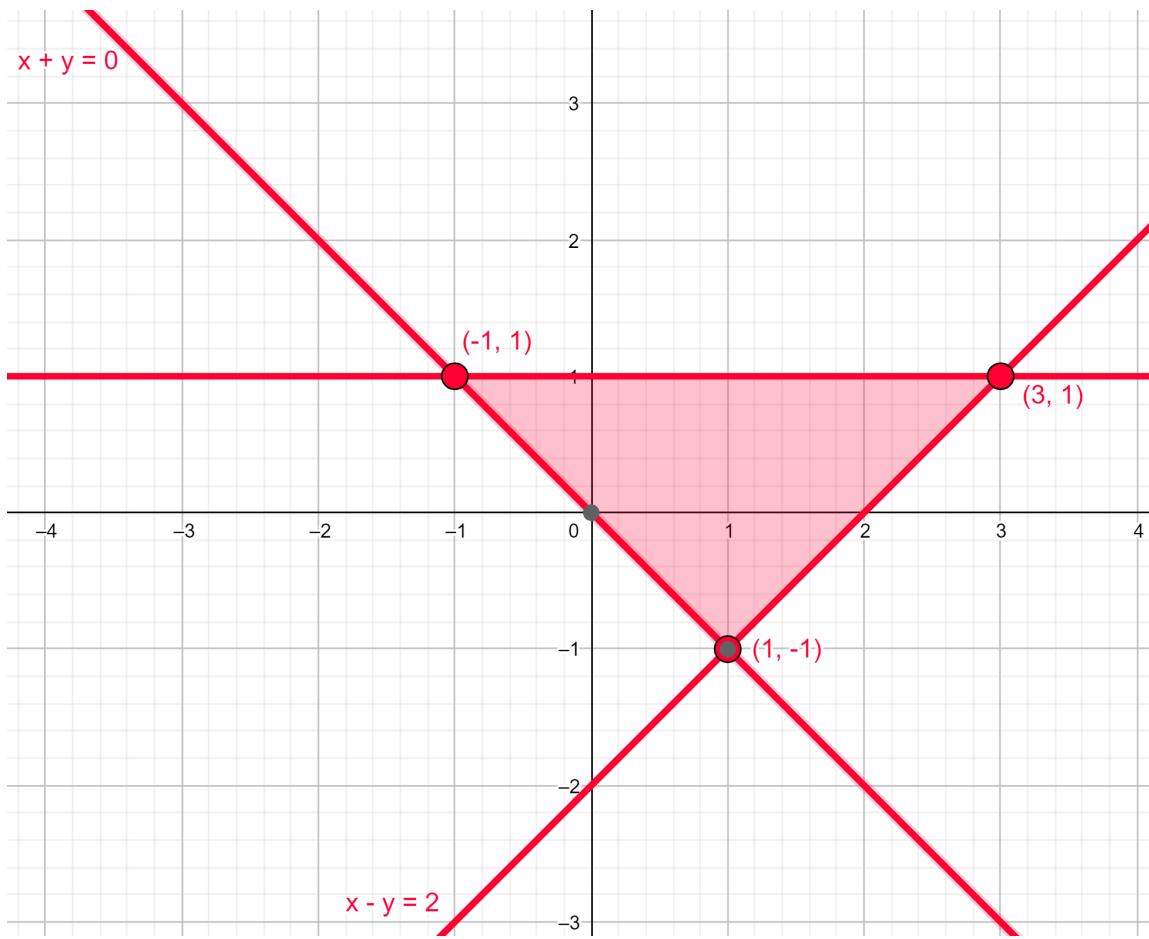
é igual a

$$A = \int_c^d (p(y) - q(y)) dy.$$

■ **Exemplo 7.17 — Área de região horizontalmente simples.** A região

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0 \quad \wedge \quad x - y \leq 2 \quad \wedge \quad y \leq 1\}$$

representada na figura abaixo pode ser representada como uma região horizontalmente simples



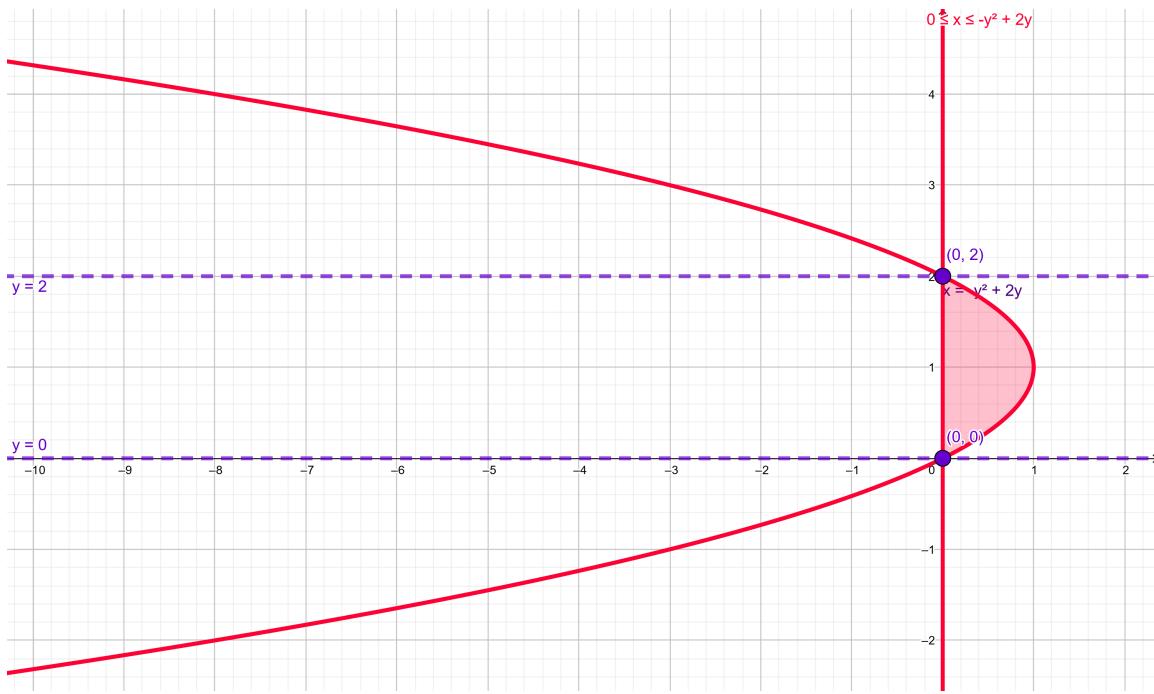
Para determinar os extremos de integração, precisamos de verificar adicionalmente que o ponto, de coordenadas  $P = (1, -1)$ , corresponde à interseção das curvas, de equação

$$x + y = 0 \quad \text{e} \quad x - y = 2.$$

Assim, a área de  $R_2$  é dada por

$$\int_{-1}^1 (2 + y - (-y)) dy = \int_{-1}^1 (2 + 2y) dy = [2y + y^2]_{-1}^1 = 4.$$

■ **Exemplo 7.18 — Área de região horizontalmente simples II.** A área representada na figura abaixo corresponde à região situada no primeiro quadrante e limitada por  $x = -y^2 + 2y$  e  $x = 0$



Esta última é dada por

$$\int_0^2 (-y^2 + 2y) dy = \left[ -\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

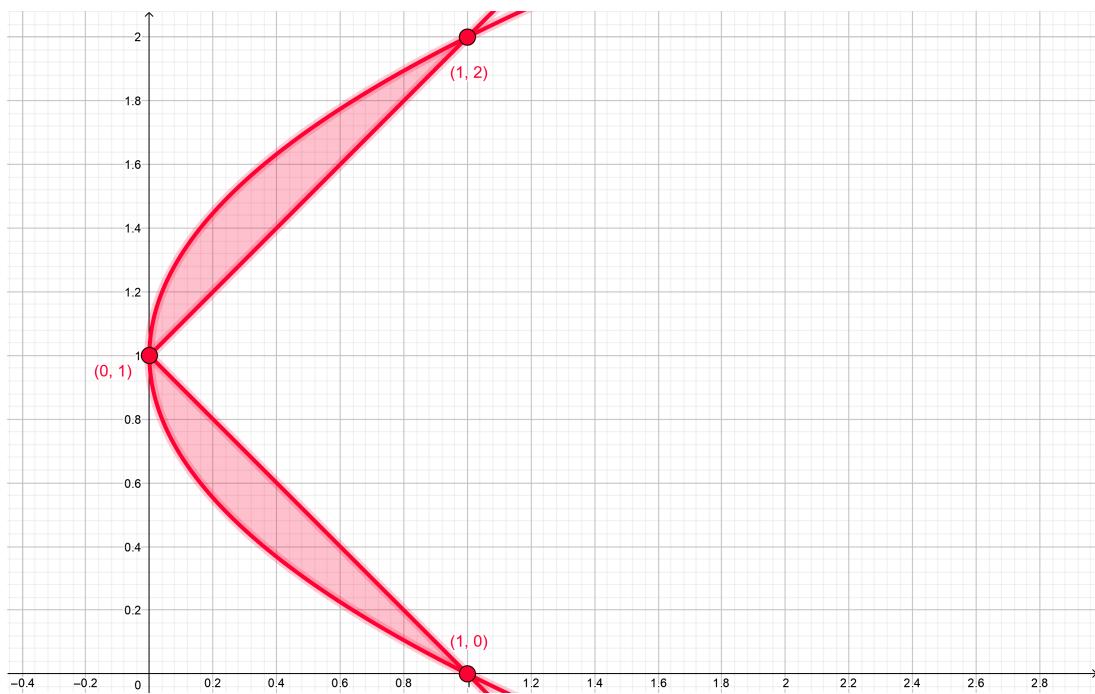
Nos integral definido acima, os extremos de integração foram obtidos como a interseção dos gráficos de  $x = -y^2 + 2y$  e de  $x = 0$  (soluções da equação  $-y^2 + 2y = 0$ ). ■

■ **Exemplo 7.19 — Área de região horizontalmente simples III.** A região

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2y + 1 \leq x \leq |y - 1|\}$$

representada na figura abaixo corresponde a uma região horizontalmente simples, delimitada pelas rectas horizontais  $y = 0$  e  $y = 2$ , resultantes da interseção das curvas de equação

$$x = y^2 - 2y + 1 \quad \wedge \quad x = |y - 1|.$$



Assim,

$$\int_0^2 (|y - 1| - (y^2 - 2y + 1)) dy = \int_0^2 |y - 1| dy - \int_0^2 (y^2 - 2y + 1) dy$$

corresponde ao valor da área de  $R_1$ .

Do cálculo dos dois integrais definidos retiramos, após a realização de cálculos auxiliares, que

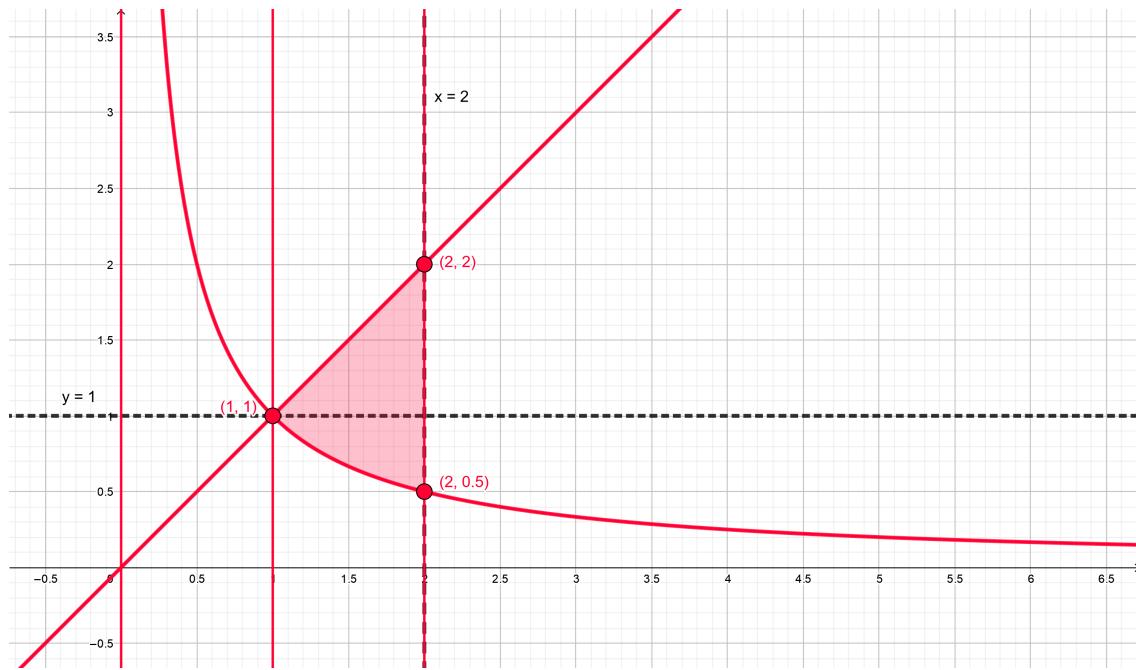
$$\int_0^2 |y - 1| dy = 1 \quad \& \quad \int_0^2 (y^2 - 2y + 1) dy = \frac{2}{3}.$$

Portanto,  $\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$  é o valor da área de  $R_1$ . ■

#### 7.4.5 Regiões Horizontalmente Simples vs. Regiões Verticalmente Simples

■ **Exemplo 7.20 — Regiões Horizontalmente Simples vs. Regiões Verticalmente Simples.** Podemos verificar com base na análise gráfica da área da região  $R_1$  que a recta  $y = 1$  – resultante da interseção de  $x = 1$  e  $y = \frac{1}{x}$ , permite-nos decompor  $R_1$  (região verticalmente simples) na união de duas regiões horizontalmente simples, definidas pelo seguinte conjunto de inequações:

- **Região A:**  $\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \wedge \frac{1}{y} \leq x \leq 2$ ;
- **Região B:**  $1 \leq y \leq 2 \wedge y \leq x \leq 2$ .



Logo, a área da região dada tanto pode ser determinada a partir do integral  $\int_1^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) dx$ , como a partir da soma dos integrais definidos

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left( 2 - \frac{1}{y} \right) dy + \int_1^2 (2 - y) dy.$$

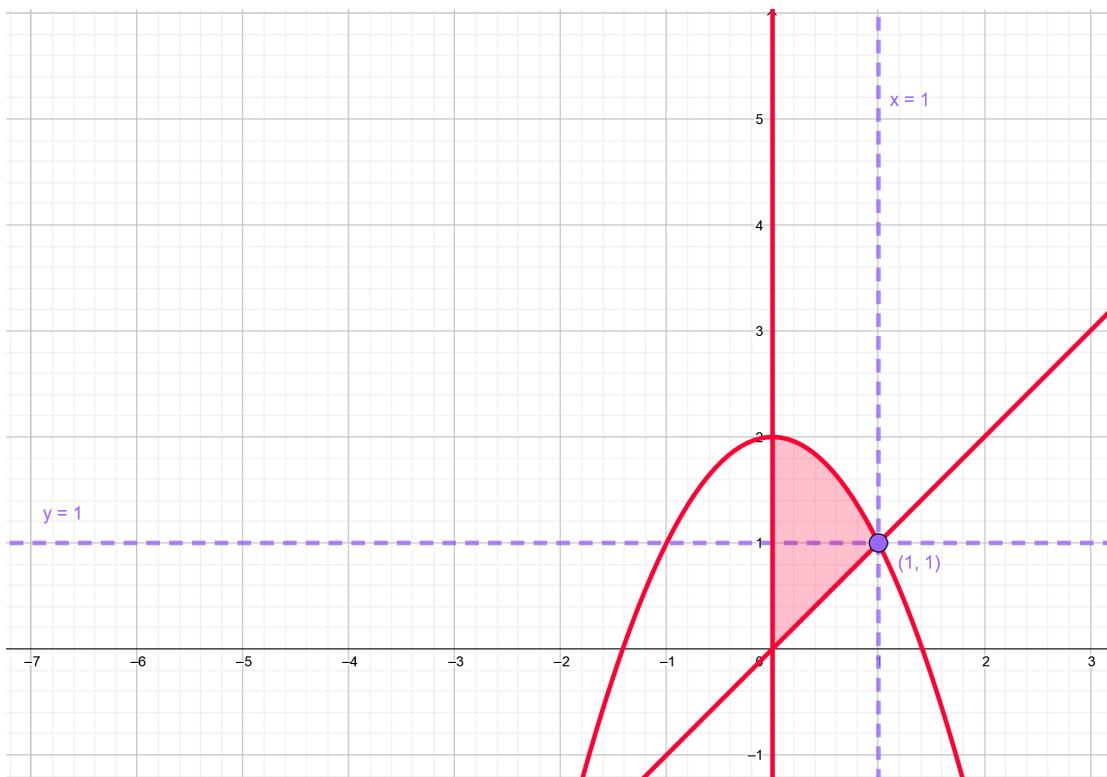
O cálculo dos integrais mencionados acima, assim como a verificação da igualdade

$$\int_1^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( 2 - \frac{1}{y} \right) dy + \int_1^2 (2 - y) dy$$

é deixado como **exercício**. ■

■ **Exemplo 7.21 — Regiões Horizontalmente Simples vs. Regiões Verticalmente Simples II.**  
 A região  $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x \leq y \leq 2 - x^2\}$  representada na figura abaixo pode ser representada de dois modos distintos:

- Como uma região verticalmente simples;
- Como a união de duas regiões horizontalmente simples.



Para determinar os extremos de integração em ambos os casos, precisamos de verificar adicionalmente que o ponto, de coordenadas  $P = (1, 1)$ , corresponde à interseção das curvas, de equação

$$y = x \quad \wedge \quad y = 2 - x^2.$$

Em concreto, a área pode ser representada de dois modos distintos

- **Verticalmente simples:**  $\int_0^1 ((2 - x^2) - x) dx$ ;
- **Horizontalmente simples:**  $\int_0^1 y dy + \int_1^2 \sqrt{2 - y} dy$ .

Deixamos a cargo do leitor a verificação da igualdade

$$\int_0^1 ((2 - x^2) - x) dx = \int_0^1 y dy + \int_1^2 \sqrt{2 - y} dy.$$

■

**Desafio 7.10 — Regiões Horizontalmente Simples vs. Regiões Verticalmente Simples.** Seja  $R = R_1 \cup R_2$  a união de duas regiões verticalmente simples, sendo:

- $R_1$  a região delimitada por  $y = 1$ ,  $y = e^x$ ,  $x = 0$  e  $x = 1$ ;
- $R_2$  a região delimitada por  $y = e$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$  e  $x = e^2$ .

- (a) Esboce a região  $R$ .
- (b) Exprima a área de  $R$  como um integral que descreve a área de uma região horizontalmente simples.
- (c) Determine o valor da área de  $R$ .

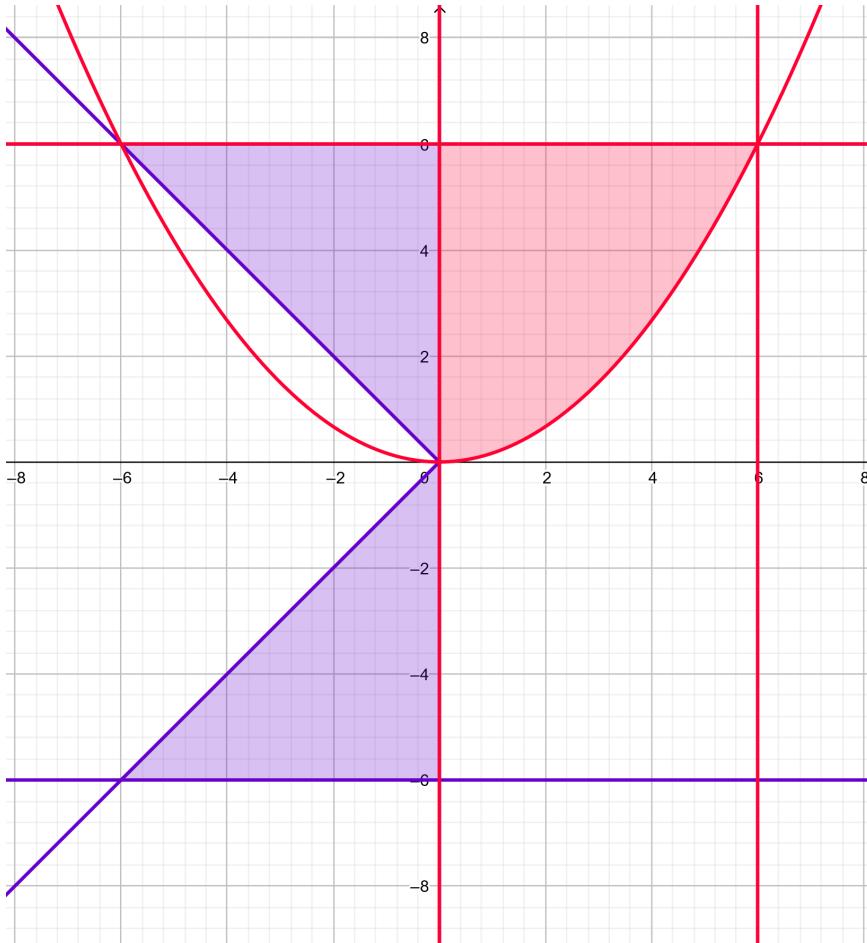
■ **Exemplo 7.22 — Reunião de regiões horizontalmente e verticalmente simples.** Na figura abaixo encontra-se representada uma região  $R$ , definida como a reunião de duas regiões  $R_1$  e  $R_2$ , onde:

1.  $R_1$  – a lilás – é a região horizontalmente simples dada por

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -6 \leq y \leq 6 \text{ e } -|y| \leq x \leq 0\};$$

2.  $R_2$  – a magenta – é a região verticalmente simples dada por

$$R_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 6 \text{ e } \frac{x^2}{6} \leq y \leq 6 \right\}.$$



Uma decomposição alternativa da região

$$R = R_1 \cup R_2$$

passaria por decompor em duas regiões verticalmente simples situadas acima e abaixo do eixo  $Ox$ :

- ACIMA DO EIXO  $Ox$ :** Região verticalmente simples ( $R_3$ ), delimitada pelas rectas  $y = -x$  e  $y = 6$ , e pela parábola  $y = \frac{x^2}{6}$ .
- ABAIXO DO EIXO  $Ox$ :** Região verticalmente simples ( $R_4$ ), delimitada pelo eixo  $Oy$  e pela rectas de equações  $y = x$  e  $y = -6$ .

#### Como exercício:

- Represente a área das regiões  $R_1$  e  $R_2$ ,  $A(R_1)$  e  $A(R_2)$  respectivamente, como integrais definidos. Use estas relações para determinar a área da região  $R$ .
- Represente as áreas das regiões verticalmente simples  $R_3$  e  $R_4$  supramencionadas como integrais definidos e calcule-as.

3. Sendo  $A(R_3)$  e  $A(R_4)$  as áreas das regiões  $R_3$  e  $R_4$ , respectivamente, verifique que

$$A(R) = A(R_3) + A(R_4).$$

■

## 7.5 Técnicas de Integração

Esta subsecção vai ao encontro da discussão do cálculo de primitivas iniciado na seção **4.4 Métodos de Primitivação** do capítulo **4 Primitivação**.

### 7.5.1 Integração Por Partes

**Teorema 7.5.1 — Fórmula de Integração Por Partes.**

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx$$

■ **Exemplo 7.23 — Fórmula de integração por partes envolvendo funções potência.** Do facto da função

$$x \mapsto \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3}$$

ser uma primitiva de  $x \mapsto \sqrt{2x+1}$  no intervalo  $[0, 1]$ , segue por aplicação directa da fórmula de integração por partes que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{2x+1} dx &= \int_0^1 x \left( \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} \right)' dx \\ &= \left[ \frac{x}{3} \sqrt{(2x+1)^3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} dx \\ &= \sqrt{3} - \left[ \frac{1}{15} \sqrt{(2x+1)^5} \right]_0^1 \\ &= \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15} \\ &= \frac{1+6\sqrt{3}}{15}. \end{aligned}$$

■



A aplicação da fórmula de integração por partes no **Exemplo 7.23** envolveu o cálculo de primitivas [immediatas] associadas funções potência de ordem  $p \neq -1$  – vide **Corolário 4.3.5** & subsecção **4.3.4 Tabela de Primitivação Generalizada** do capítulo **4 Primitivação**.

Os próximos dois exemplos são complementares ao cálculo de primitivas de funções inversas – logarítmicas e trigonométricas inversas – estudadas ao longo da subsecção **4.4.1 Método de Primitivação por Partes** do capítulo **4 Primitivação**.

■ **Exemplo 7.24 — Fórmula de integração por partes envolvendo funções logarítmicas.** Da identidade  $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$ , segue por integração por partes que

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \ln(\sqrt{x}) dx &= \frac{1}{2} \int_1^e x' \ln(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} [x \ln(x)]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x (\ln(x))' dx \\
 &= \frac{1}{2} [x \ln(x)]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{1}{2} [x \ln(x)]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e 1 dx \\
 &= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} (e - 1) \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

■



Alternativamente, com base na sequência de igualdades

$$(\ln(\sqrt{x}))' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

seria possível chegar na mesma conclusão, com base na fórmula de integração por partes

$$\int_1^e \ln(\sqrt{x}) dx = [x \ln(\sqrt{x})]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} dx.$$

■ **Exemplo 7.25 — Fórmula de integração por partes envolvendo funções trigonométricas inversas.** Da regra de derivação

$$\left( \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \text{para todo } x \neq 0$$

segue por aplicação directa do **Teorema 7.5.1** e do **Teorema Fundamental do Cálculo** que

$$\begin{aligned}
 \int_{\sqrt{3}}^1 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \int_{\sqrt{3}}^1 x' \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \\
 &= \left[ x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right]_{\sqrt{3}}^1 + \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= \arctan(1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{\sqrt{3}}^1 \\
 &= \frac{(3-2\sqrt{3})\pi}{12} - \ln(\sqrt{2}) \quad [\text{após algumas simplificações}].
 \end{aligned}$$

■

**Desafio 7.11 — Fórmula de integração por partes envolvendo funções trigonométricas inversas.** Calcule o integral abaixo usando a fórmula de integração por partes:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \arccos(x^2) dx.$$

**Desafio 7.12 — Aplicação do Exemplo 4.15.** Com base no que aprendeu com o **Exemplo 4.15** do capítulo **4 Primitivação**, calcule os seguintes integrais definidos:

1.  $\int_2^5 \cosh^{-1}(x) dx$ ;
2.  $\int_2^5 x \cosh^{-1}(x^2) dx$ .

### 7.5.2 Integração Por Substituição

**Teorema 7.5.2 — Fórmula de Integração por Substituição .**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t) dt$$

sendo  $a = g(c)$  e  $b = g(d)$ .

Em resumo deverá seguir os seguintes passos:

1. Mudar a variável por meio de  $x = g(t)$
2. Diferenciar a variável  $x$ , isto é,  $dx = g'(t)dt$
3. Substituir  $x$  e  $dx$ , o que origina uma nova função de  $t$ :

$$f[g(t)]g'(t)$$

4. Calcular as novas extremidades (ou extremos):  $c = g^{-1}(a)$  e  $d = g^{-1}(b)$
5. Calcular  $\int_c^d f[g(t)]g'(t) dt$

■ **Exemplo 7.26 — Exemplo 7.13 segundo integração por substituição.** No **Exemplo 7.13** verificámos essencialmente que as funções de área da forma

$$A(s) = \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} (s - x^2) dx \quad (s > 0)$$

permitem-nos determinar a área de uma região delimitada superiormente por rectas horizontais da forma  $y = s$ , e inferiormente pela parábola de equação  $y = x^2$ .

Da substituição  $x = \sqrt{s}t$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) segue que

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} (s - x^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 (s - st^2) \sqrt{s} dt \\ &= \int_{-1}^1 (1 - t^2) s \sqrt{s} dt \\ &= \sqrt{s^3} A(1). \end{aligned}$$

Em particular, a área da região delimitada pelas rectas  $y = 9$  e  $y = c$ , e pela parábola de equação  $y = x^2$  pode ser descrita através da relação

$$36 - A(c) = (\sqrt{3^3} - \sqrt{c^3}) A(1).$$

Adicionalmente, podemos ainda verificar que o factor  $\frac{4}{3}$  que aparece nos cálculos do **Exemplo 7.13** coincide com  $A(1)$ . ■

■ **Exemplo 7.27 — Substituição trigonométrica.** Recorrendo à substituição trigonométrica

$$x = 3 \sin(t) - 1$$

é fácil concluir com base nas igualdades

$$\begin{aligned} 2 &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \quad (t = \frac{\pi}{2}) \\ -1 &= 3 \sin(0) - 1 \quad (t = 0) \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \sqrt{9 - (x+1)^2} dx &= \int_{-1}^2 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{3}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \, 3 \cos t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 9 \cos^2 t dt \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{9}{2} \left[ t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{2} \left( \frac{\pi + \sin(\pi)}{2} \right) \\ &= \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

■



A substituição  $t = x + 1$  permite-nos demonstrar que

$$\int_{-1}^2 \sqrt{9 - (x+1)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{9 - t^2} dt.$$

Em geral, a substituição  $t = x - \alpha$  em integrais envolvendo funções da forma  $\sqrt{\rho^2 - (x - \alpha)^2}$  permite-nos concluir que

$$\int_{\alpha-\rho}^{\alpha+\rho} \sqrt{\rho^2 - (x - \alpha)^2} dx = \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - t^2} dt.$$

Geometricamente, a identidade acima diz-nos que área da semi-circunferência de raio  $\rho$  é independente da escolha do centro da circunferência.

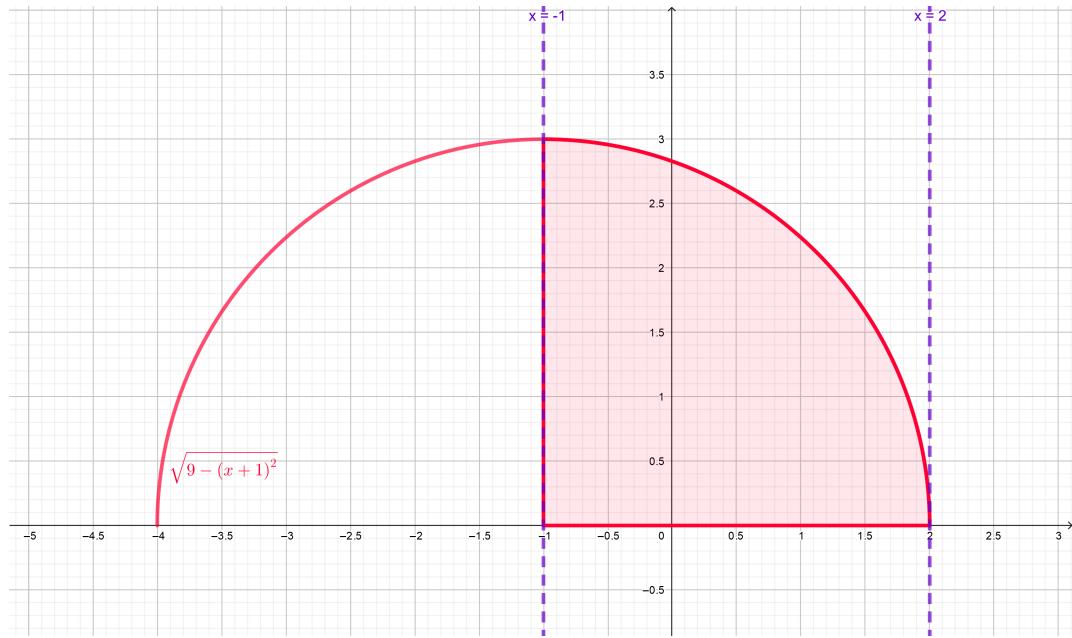


Figura 7.4: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.27**. A área sombreada a vermelho é determinada a partir do integral definido  $\int_{-1}^2 \sqrt{9 - (x + 1)^2} dx$ . A substituição trigonométrica permitiu-nos concluir que o integral definido dá-nos área de  $\frac{1}{4}$  de circunferência de raio 3 (i.e.  $\frac{\pi r^2}{4}$  para  $r = 3$ ).

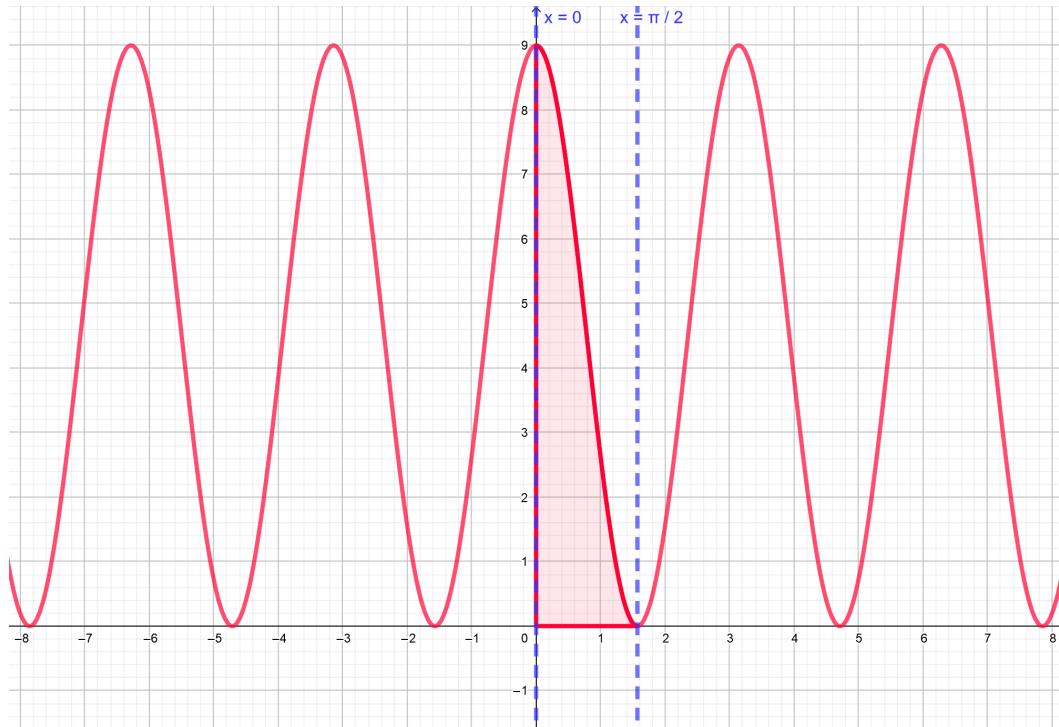


Figura 7.5: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.27**. A substituição trigonométrica  $x = 3 \sin(t) - 1$  permitiu-nos mostrar que  $\int_{-1}^2 \sqrt{9 - (x + 1)^2} dx$  coincide com a área delimitada pelo eixo  $Ox$ , pelo gráfico de  $x \mapsto 9 \cos^2(x)$ , e pelas rectas verticais  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ .

■ **Exemplo 7.28 — Substituição trigonométrica II.** A região

$$R_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq \sqrt{2}x \leq 1 \right\}$$

corresponde a uma região verticalmente simples, que pode ser equivalentemente descrita pelo conjunto de inequações:

$$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Deste modo, a área de  $D$  é dada pelo integral definido  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{4 - x^2} dx$ .

Adicionalmente, a substituição trigonométrica  $x = 2 \sin(t)$  permite-nos concluir que o integral anterior é equivalente a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4 - (2 \sin(t))^2} \cdot 2 \cos(t) dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt.$$

Deixamos ao cargo do leitor o cálculo do valor do integral definido  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt$ , e do valor da área da região  $R_1$ . ■

**Desafio 7.13 — Substituição trigonométrica III.** Use a substituição trigonométrica

$$x = 4 \tan(t) + 3$$

para calcular o integral

$$\int_{-1}^7 \sqrt{16 + (x - 3)^2} dx.$$

### 7.5.3 Integral definido envolvendo a função inversa

**Corolário 7.5.3 — Fórmula de Integração da Função Inversa.**

$$\int_c^d h^{-1}(y) dy = bd - ac - \int_a^b h(x) dx,$$

sendo  $c = h(a)$  e  $d = h(b)$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $c = h(a)$  e  $d = h(b)$ . Usando a técnica de primitivação por substituição para  $y = h(x)$ , segue que

$$h^{-1}(y) = x \quad \& \quad dy = h'(x) dx.$$

Logo,

$$\int_c^d h^{-1}(y) dy = \int_a^b x h'(x) dx.$$

Por outro lado, da fórmula de integração por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_a^b x h'(x) dx &= [xh(x)]_a^b - \int_a^b x' h(x) dx \\ &= bh(b) - ah(a) - \int_a^b h(x) dx. \end{aligned}$$

A combinação das duas fórmulas de integração anteriores, e as condições

$$c = h(a) \text{ e } d = h(b)$$

permite-nos assim concluir que

$$\int_c^d h^{-1}(y) dy = bd - ac - \int_a^b h(x) dx,$$

como pretendido. ■



As sequências de igualdades

$$bd - ac = (b - a)d + a(d - c) = \int_a^b d dx + \int_c^d a dy$$

$$bd - ac = b(d - c) + c(b - a) = \int_c^d b dy + \int_a^b c dx$$

permitem-nos obter as seguintes formulações equivalentes do **Corolário 7.5.3**:

$$\int_c^d (h^{-1}(y) - a) dy = \int_a^b (d - h(x)) dx$$

$$\int_c^d (h^{-1}(y) - b) dy = \int_a^b (c - h(x)) dx.$$

Mais adiante, estas serão de extrema utilidade para a resolução do **Desafio 7.19**.

■ **Exemplo 7.29 — Teorema da função inversa aplicado à função exponencial e logaritmo.**  
A aplicação do **Corolário 7.5.3** permite-nos facilmente concluir que

$$\int_1^e \ln x dx = e - \int_0^1 e^y dy = 1.$$

■

**Desafio 7.14 — Teorema da função inversa aplicado à função exponencial e logaritmo.**  
Seja  $D$  a região delimitada pelas curvas de equação  $y = e$ ,  $y = e^{4x}$ ,  $x = 0$  e  $x = \frac{1}{4}$ :

1. Represente-a geometricamente no plano  $xOy$ , e calcule a respectiva área.
2. Determine o valor de  $\alpha > 0$  para o qual  $\int_1^e \ln(x^\alpha) dx$  coincide da área da região  $D$ .

■ **Exemplo 7.30 — Teorema da função inversa aplicado a funções trigonométricas e suas inversas.** Atendendo às identidades trigonométricas

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

podemos aplicar mais uma vez o **Corolário 7.5.3** permite-nos facilmente concluir, após alguns cálculos auxiliares, que

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos(x) dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(y) dy \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \left( \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\pi}{6} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3} + 1 \right), \end{aligned}$$

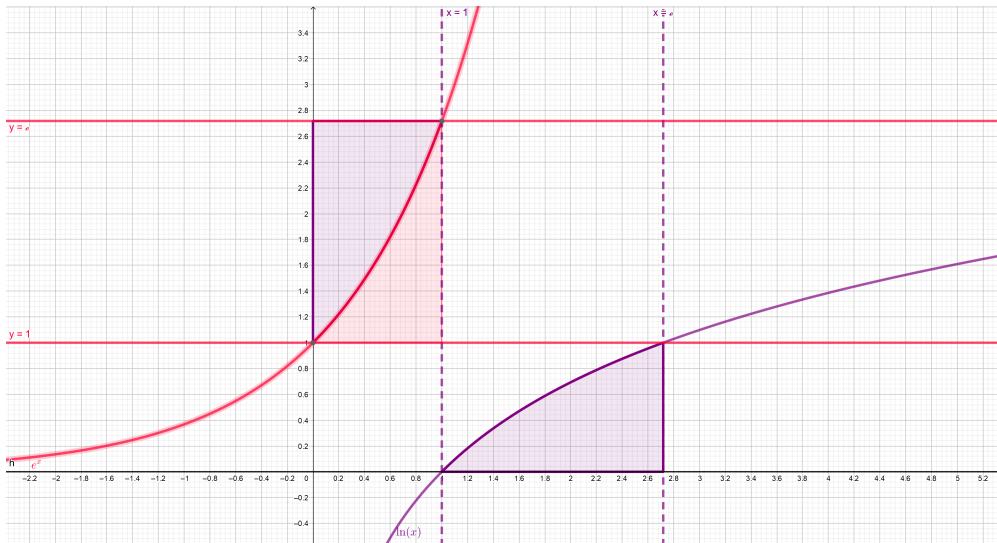


Figura 7.6: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.29**. O integral definido  $\int_1^e \ln x dx$  corresponde à região a lilás compreendida entre as rectas verticais  $x = 1$  e  $x = e$  (a tracejado), enquanto que o integral definido  $\int_0^1 e^y dy$  corresponde à região a rosa. A identidade  $e - \int_0^1 e^y = \int_0^1 (e - e^y) dy$  permitiu-nos concluir geometricamente que, no intervalo  $[0, 1]$ , a área compreendida entre a recta  $y = e$  e a função  $x \mapsto e^x$  coincide com  $\int_1^e \ln x dx$ .

ou equivalentemente, que

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left( \arccos(x) - \frac{\pi}{6} \right) dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{1}{2} - \cos(y) \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) - \left( \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6} + 1 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi + 6}{12}.
 \end{aligned}$$

■

**Desafio 7.15 — Complementar ao Exemplo 7.25.** Verifique que

$$\int_{\sqrt{3}}^1 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cotg(x) dx = \frac{(3 - 2\sqrt{3})\pi}{12}.$$

**Desafio 7.16 — Frequênci Matemática I, 14/01/2021.** 1. Calcule:  $\int_0^1 4\arctg(x) dx$ .

2. Verifique que:

$$\int_0^1 (\pi - 4\arctg(x)) dx = \int_0^{\pi} \tg\left(\frac{x}{4}\right) dx.$$

3. Na figura está traçada a curva de equação  $y = 4\arctg(x)$  num referencial ortonormado:

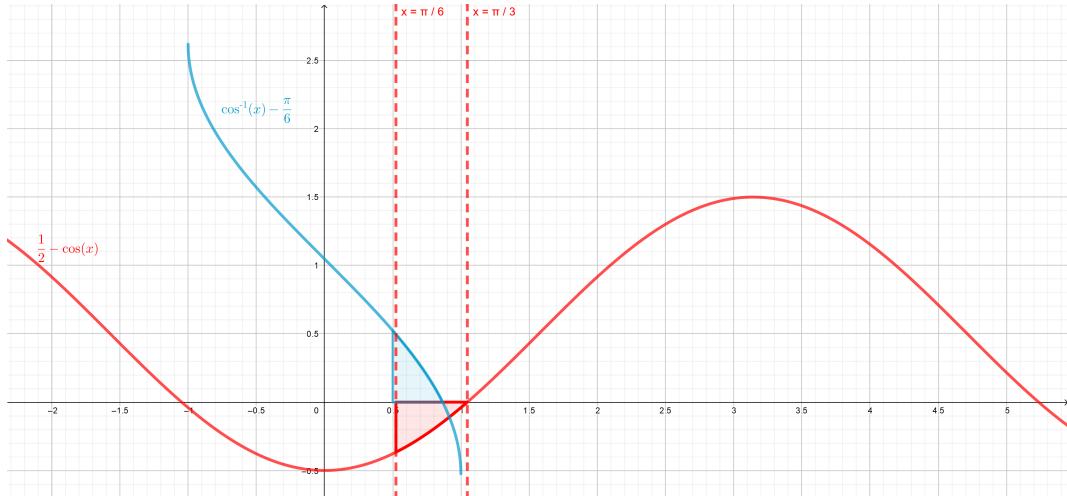
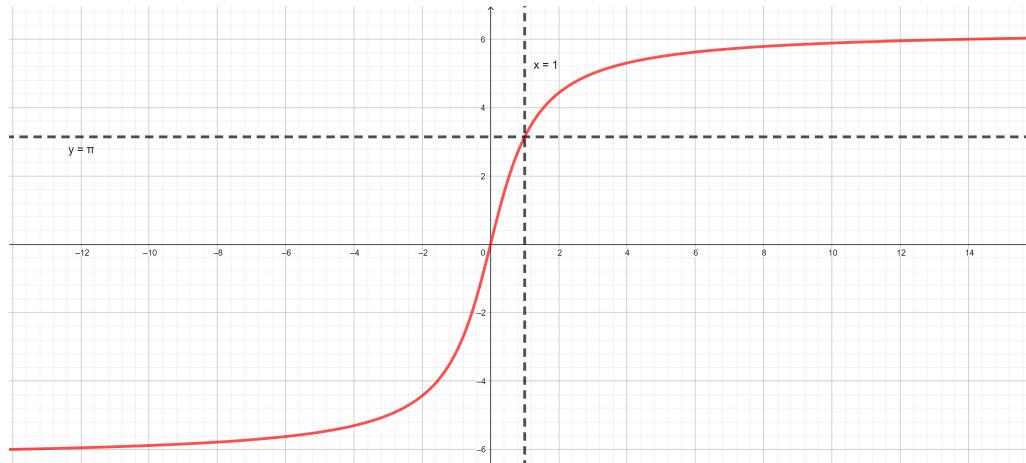


Figura 7.7: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.30**. O integral definido  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left( \arccos(x) - \frac{\pi}{6} \right) dx$  corresponde à região a azul, enquanto que o integral definido  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} - \cos(y) \right) dy$  corresponde à área da região a vermelho compreendida entre as rectas verticais  $x = \frac{\pi}{6}$  e  $x = \frac{\pi}{3}$  (a tracejado). Por seu turno, a aplicação do **Corolário 7.5.3** permitiu-nos ilustrar geometricamente a igualdade  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left( \arccos(x) - \frac{\pi}{6} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} - \cos(y) \right) dy$  (i.e. a área das regiões a azul e a vermelho coincide).



Justifique que  $\int_0^1 (\pi - 4 \arctg(x)) dx$  representa uma área e esboce duas regiões no primeiro quadrante cuja área seja igual ao valor desse integral. **Nota:** Faça o esboço na figura dada.

#### 7.5.4 Integração num intervalo simétrico em relação à origem

Esta subseção tem como objectivo extrapolar o estudo de paridade e simetria, iniciado na subseção **1.3.3 Paridade e Simetria** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** para o cálculo de integrais definidos em intervalos simétricos da forma  $[-a, a]$ .

**Teorema 7.5.4 — Integral de uma função par ou ímpar.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[-a, a]$ , onde  $a > 0$ .

- Se  $f$  é ímpar então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ;
- Se  $f$  é par então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

*Demonstração.* Usando a decomposição temos

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

De seguida, usando a mudança de variável  $x = -t$  obtemos:

- (i) Se  $f$  é ímpar então  $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$ ;  
(ii) Se  $f$  é par então  $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$ .

■

■ **Exemplo 7.31 — Funções Hiperbólicas.** Do estudo realizado na subseção 1.5.5 Funções Hiperbólicas do **1 Funções Elementares e Gráficos**, retiramos que a função seno hiperbólico é ímpar, enquanto que a função é par. Logo, é possível concluir que

$$\int_{-1}^1 \sinh(x) dx = 0 \quad \& \quad \int_{-1}^1 \cosh(x) dx = 2 \int_0^1 \cosh(x) dx$$

a partir da aplicação do **Teorema 7.5.4**.

Adicionalmente, a igualdade  $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$  conduz-nos à sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^x dx &= \int_{-1}^1 \cosh(x) dx + \int_{-1}^1 \sinh(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \cosh(x) dx. \end{aligned}$$

■



O **Exemplo 7.31** permite-nos concluir que o área descrita pelo integral definido  $\int_0^1 2 \cosh(x) dx$  coincide com a área da região delimitada pelo eixo  $Ox$ , e pelas curvas de equação

$$y = e^x \quad \& \quad x^2 = 1.$$

Mais genericamente, o exemplo é um caso particular do seguinte corolário.

**Corolário 7.5.5 — vide Teorema 1.3.5 do Capítulo 1.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[-a, a]$ , onde  $a > 0$ .

Então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$$

■ **Exemplo 7.32 — Regiões Horizontalmente Simples.** Verificámos no **Exemplo 7.17** que o integral definido  $\int_{-1}^1 (2+2y)dy$  permite-nos determinar a área da região

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0 \wedge x-y \leq 2 \wedge y \leq 1\}.$$

Por outro lado, atendendo a que  $y \mapsto 2$  é uma função par &  $y \mapsto 2y$  é uma função ímpar, segue por aplicação directa do **Teorema 7.5.4** que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (2+2y)dy &= \int_{-1}^1 2dy + \int_{-1}^1 2ydy \\ &= 2 \int_0^1 2dy. \end{aligned}$$

A igualdade permite-nos concluir, sem calcular o valor do integral definido, que a área da região  $R_2$  é o **dobro da área** da região rectangular  $D_2$ , definida por

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 2\}.$$

■



A conclusão obtida no **Exemplo 7.32** é, de facto, uma consequência imediata da aplicação do **Corolário 7.5.5**.

**Desafio 7.17 — Revisão de Integração por Substituição.** Para a constante  $a > 0$ , verifique as igualdades abaixo sem calcular o integral definido:

1.  $\int_{-a}^a e^{-x}dx = a \int_{-1}^1 e^{-at}dt.$
2.  $\int_{-a}^a e^{-x}dx = 2a \int_0^1 \cosh(t)dt.$

■ **Exemplo 7.33 — Área do gráfico do seno.** Voltando ao **Exemplo 7.9**, podemos facilmente concluir, com base na substituição  $t = x - \frac{\pi}{2}$ , e na identidade  $\sin(2t + \pi) = -\sin(2t)$  que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(2x)dx &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt; \\ \int_0^\pi |\sin(2x)|dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)|dt. \end{aligned}$$

No caso do primeiro integral, a igualdade envolvendo a função seno – que é ímpar no intervalo simétrico  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  – permite-nos imediatamente concluir que

$$\int_0^\pi \sin(2x)dx = 0.$$

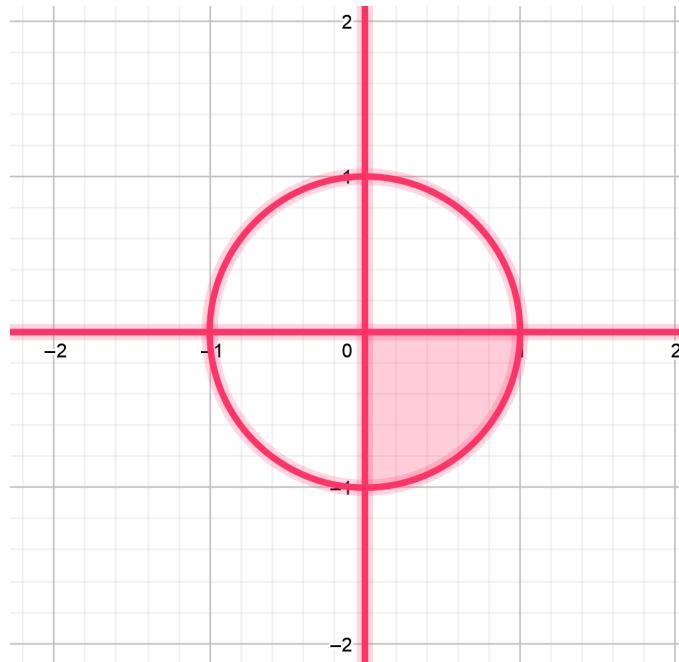
Para o segundo caso, atente que o módulo nos garante que  $t \mapsto |\sin(2t)|$  é uma função par em

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Desta observação, podemos facilmente chegar na sequência de igualdades:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi |\sin(2x)| dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)| dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)| dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(2t) dt \\
 &= [-\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\cos(\pi) + \cos(0) \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 7.34 — Regiões Horizontalmente Simples II.** A região plana associada ao integral  $\int_{-1}^0 \sqrt{1-y^2} dy$  corresponde a  $\frac{1}{4}$  de circunferência de centro na origem e raio  $r = 1$  que se situa no  $4^{\circ}$  quadrante, tal como representado na figura abaixo:



O cálculo do integral dado pode ser realizado, recorrendo à substituição trigonométrica  $y = \sin(t)$ . Esta conduz-nos à sequência de igualdades

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2(t) dt \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\
 &= \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Adicionalmente, é ainda possível demonstrar a igualdade

$$\int_0^2 x \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1 - y^2} dy,$$

recorrendo à substituição  $x = y + 1$  (ou  $y = x - 1$ ) e ao **Teorema 7.5.4**.

Em concreto, a substituição  $x = y + 1$  permite-nos obter a seguinte igualdade, após algumas simplificações:

$$\int_0^2 x \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = \int_{-1}^1 y \sqrt{1 - y^2} dy + \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy.$$

Adicionalmente, do facto de  $\sqrt{1 - y^2}$  ser uma função par em  $[-1, 1]$ , e de  $y\sqrt{1 - y^2}$  ser uma função ímpar em  $[-1, 1]$ , segue que

$$\int_{-1}^1 y \sqrt{1 - y^2} dy = 0 \quad \& \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1 - y^2} dy.$$

Portanto,

$$\int_0^2 x \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1 - y^2} dy.$$

■



Poderia ter demonstrado a igualdade acima usando a substituição trigonométrica  $x = 1 + \sin(t)$ . Para esta, obteríamos a seguinte igualdade envolvendo integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \sqrt{1 - (x-1)^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos^2(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} [\text{após alguns cálculos adicionais}]. \end{aligned}$$

De facto, a igualdade

$$\int_0^2 x \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1 - y^2} dy$$

é satisfeita, uma vez que  $\frac{\pi}{2}$  é o dobro de  $\frac{\pi}{4}$ .

■ **Exemplo 7.35 — Complemento ao Exemplo 7.27.** Suponhamos que pretendemos calcular o integral

$$\int_{-4}^2 x \sqrt{9 - (x+1)^2} dx.$$

Fazendo a substituição,  $x = t - 1$ , tem-se que o integral acima pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_{-4}^2 x \sqrt{9 - (x+1)^2} dx &= \int_{-3}^3 (t-1) \sqrt{9 - t^2} dt \\ &= \int_{-3}^3 t \sqrt{9 - t^2} dt - \int_{-3}^3 \sqrt{9 - t^2} dt. \end{aligned}$$

Atendendo agora ao facto de:

1.  $t \mapsto \sqrt{9 - t^2}$  ser uma função par em  $[-3, 3]$ ;

2.  $t \mapsto t\sqrt{9-t^2}$  ser uma função ímpar em  $[-3, 3]$  (produto de uma função par por uma função ímpar),  
segue que

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 \sqrt{9-t^2} dt &= 2 \int_0^3 \sqrt{9-t^2} dt \\ \int_{-3}^3 t\sqrt{9-t^2} dt &= 0.\end{aligned}$$

Assim, o cálculo do integral definido acima reduz-se à identidade

$$\begin{aligned}\int_{-4}^2 x\sqrt{9-(x+1)^2} dx &= \int_{-3}^3 (t-1)\sqrt{9-t^2} dt \\ &= -2 \int_0^3 \sqrt{9-t^2} dt,\end{aligned}$$

onde o integral definido  $\int_0^3 \sqrt{9-t^2} dt$  corresponde ao cálculo do integral obtido no **Exemplo 7.27**.

Este facto permite-nos concluir que

$$\int_{-4}^2 x\sqrt{9-(x+1)^2} dx = -\frac{9\pi}{2}.$$

■

**Desafio 7.18 — Aplique os seus conhecimentos sobre integração de funções em intervalos simétricos.** Para cada uma das questões abaixo assinale apenas a letra correcta.

1. Sendo  $f$  uma função ímpar em  $[-6, 6]$  diga, justificando, qual das seguintes igualdades é **falsa**

- (A)  $\int_{-3}^3 x^2 f(x) dx = 0$   
 (B)  $\int_{-4}^4 x f(x^2) dx = 0$   
 (C)  $\int_{-5}^5 (x^2 f(x) + x) dx = 0$   
 (D)  $\int_{-6}^6 (x^2 f(x) + x) dx = 0.$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

2. Sendo  $f$  uma função par em  $[-7, 7]$  diga, justificando, qual das seguintes igualdades é **falsa**

- (A)  $\int_{-3}^3 x f(x) dx = 2 \int_0^3 x f(x) dx$   
 (B)  $\int_{-4}^4 |x| f(x) dx = 2 \int_0^4 |x| f(x) dx$   
 (C)  $\int_{-5}^5 f(|x|) dx = 2 \int_0^5 f(|x|) dx$   
 (D)  $\int_{-6}^6 |f(x)| dx = 2 \int_0^6 |f(x)| dx.$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

3. Seja  $f$  uma função contínua e ímpar em  $[-4, 4]$  e  $I = \int_{-4}^2 f(x) dx$ . É necessariamente verdade que:

(A)  $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$

(B)  $I = -2 \int_0^{-2} f(x) dx$

(C)  $I = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + 2 \int_{-2}^0 f(x) dx$

(D)  $I = \int_{-4}^{-2} f(x) dx$ .

**Resposta:** \_\_\_\_\_

4. Seja  $f$  uma função contínua e ímpar em  $[-5, 5]$ . É necessariamente verdade que:

(A)  $\int_{-5}^5 |f(x)| dx = 0$

(B)  $\int_{-4}^0 |f(x)| dx = \int_0^4 |f(x)| dx$

(C)  $\int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^3 f(x) dx$

(D)  $\int_{-2}^0 |f(x)| dx = - \int_{-2}^0 f(x) dx$ .

**Resposta:** \_\_\_\_\_

## 7.6 Aplicações

### 7.6.1 Os Excedentes do Produtor e do Consumidor

Os economistas estudam a determinação de preços de um bem de consumo num mercado, onde os agentes económicos se encontram para realizarem transacções. Os preços num mercado de concorrência perfeita são estabelecidos pela lei da procura e da oferta.

Por um lado, a quantidade procurada  $q$  de um bem varia no sentido inverso do seu preço  $p$ , sendo expressa pela seguinte função procura:

$$D : \quad J \subseteq [0, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[ \\ q \longmapsto p = D(q)$$

Supomos que:

- $D$  é positiva, diferenciável e estritamente decrescente em  $J$ .

A sua representação gráfica, designada por curva de procura, satisfaz

$$p = D(q) \iff q = d(p)$$

sendo  $d$  a função inversa de  $D$ .

Por outro lado, a quantidade  $q$  do mesmo bem que os produtores estão dispostos a produzir e a vender varia no mesmo sentido do seu preço  $p$ , sendo expressa pela seguinte função oferta

$$S : \quad J \subseteq [0, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[ \\ q \longmapsto p = S(q)$$

Supomos que:

- $S$  é positiva, diferenciável e estritamente crescente em  $J$ .

A sua representação gráfica, designada por curva da oferta, satisfaz

$$p = S(q) \iff q = s(p)$$

sendo  $s$  a função inversa de  $S$ .

Os interesses antagónicos dos consumidores e dos produtores vão determinar o equilíbrio no mercado, que ocorre quando a quantidade procurada do bem coincide com a quantidade oferecida, isto é,  $d(p_e) = s(p_e)$ . Assim sendo ao correspondente preço,  $p_e$ , chama-se preço de equilíbrio.

Graficamente, o excedente do consumidor é a medida da área compreendida entre o eixo dos preços, a curva da procura e o preço de equilíbrio. O excedente do produtor é a medida da área compreendida entre o eixo dos preços, o preço de equilíbrio e a curva da oferta.

- Desafio 7.19 — Excedentes do Produtor e do Consumidor.**
1. Escreva os excedentes do consumidor e do produtor na forma de integrais usando  $q$  como variável independente.
  2. Escreva os excedentes do consumidor e do produtor na forma de integrais usando agora  $p$  como variável independente. Note que as funções procura e oferta admitem inversa.
  3. Recorrendo à fórmula de integração da função inversa, mostre a igualdade entre os integrais para o excedente do produtor.
  4. Dê exemplos de funções procura e oferta e estude essas funções quanto ao sinal e à monotonia.
  5. Considere um mercado caracterizado pelas funções procura e oferta, definidas respectivamente por:

$$D(q) = \sqrt{20 - q} \quad ; \quad S(q) = \frac{q}{2} + 2.$$

onde  $q \geq 0$  e  $p \geq 0$ .

- (a) Trace as curvas da procura e da oferta.
- (b) Calcule o preço  $p_e$  e a quantidade  $q_e$  de equilíbrio do bem. Qual é o significado geométrico do ponto  $I = (q_e, p_e)$ ?
- (c) Determine o excedente do consumidor e identifique-o geometricamente.
- (d) Determine o excedente do produtor e identifique-o geometricamente.

### 7.6.2 As Curvas de Lorenz e o Coeficiente de Gini

O estudo da repartição pessoal dos rendimentos por toda a população de um país durante um período ou a comparação de rendimentos entre países no mesmo período tem sido alvo de análise estatística por parte dos cientistas das Ciências Sociais. Uma forma de se medir quantitativamente a desigualdade na repartição dos rendimentos baseia-se no traçado das chamadas Curvas de Lorenz. Para construir a curva de Lorenz coloca-se no eixo horizontal a percentagem acumulada da população, ordenada por ordem crescente dos seus rendimentos, e no eixo vertical a percentagem acumulada dos rendimentos correspondentes. Essa curva é a representação gráfica da função de Lorenz, que é definida por:

$$\begin{aligned} L : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = L(x) \end{aligned}$$

onde  $L(x)$  é a fração do rendimento total recebido pelos  $x$  por cento da população. Supondo que  $L$  é regular em  $[0, 1]$ , então toda a função de Lorenz satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $L(0) = 0$  e  $L(1) = 1$ ;
- (ii)  $L(x) \leq x$  para todo  $x \in [0, 1]$ ;
- (iii)  $L$  é uma função estritamente crescente.

O coeficiente de Gini é um índice estatístico que mede a desigualdade na repartição dos rendimentos, variando entre zero para igualdade perfeita e 1 para desigualdade total. Graficamente, o coeficiente de Gini corresponde ao rácio entre a área, limitada superiormente pela hipotenusa do triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(1, 0)$  e inferiormente pela curva de Lorenz, e a área desse triângulo.

- Desafio 7.20**
1. Usando integrais na variável  $x$ , escreva a expressão para o coeficiente de Gini.
  2. Mostre que o coeficiente de Gini também é definido por

$$1 - 2 \int_0^1 L(x) dx,$$

e interprete geometricamente esse resultado em termos de áreas.

3. Calcule o coeficiente de Gini no caso em que  $L(x) = x$ , para todo o  $x \in [0, 1]$ . Qual o seu significado?
4. Para cada parâmetro  $k \in \mathbb{N}$ , considere uma função de Lorenz definida por

$$L(x) = \frac{(k-1)}{k}x^2 + \frac{1}{k}x$$

para todo o  $x \in [0, 1]$ .

- (a) Mostre que  $L$  satisfaz as três condições enunciadas acima.
- (b) Calcule o coeficiente de Gini em função de  $k$ .
- (c) Esboce as curvas de Lorenz para  $k \in \{1, 2, 3, 10\}$ .
- (d) Qual das curvas traçadas traduz maior desigualdade na repartição dos rendimentos? Justifique.
- (e) Esboce a curva de Lorenz para  $k$  suficientemente grande ( $k \rightarrow \infty$ ) e calcule o coeficiente de Gini correspondente.

5. Consideremos a tabela abaixo com a distribuição de rendimento de um País num dado ano:

$x_i$	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y_i$	0.07	0.18	0.35	0.62	1

- (a) Utilizando a calculadora, estime o parâmetro  $n$  (arredondado às centésimas) para a função potência definida por  $L(x) = x^n$ , de acordo com:

$$n = \frac{\sum_{i=1}^5 \ln(x_i) \ln(y_i)}{\sum_{i=1}^5 \ln^2(x_i)}$$

- (b) Calcule o coeficiente de Gini.

## 7.7 Recursos Complementares

Sugestões de Leitura-páginas: 137 - 201 - Manual: SILVA, Jaime Carvalho, Princípios de Análise Matemática Aplicada, Lisboa, Editora McGraw-Hill de Portugal, 1994 [BP 517 SIL]

## 7.8 Exercícios Propostos

67. Calcule os seguintes integrais definidos:

- (a)  $\int_{1/e}^e \frac{\ln x}{x} dx$       (b)  $\int_0^{\sqrt{\ln 3}} xe^{-x^2} dx$       (c)  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 9}} dx$   
 (d)  $\int_0^{\ln 3} \sinh x dx$       (e)  $\int_{-1}^4 |3-x| dx$       (f)  $\int_{-1}^4 (3-|x|) dx$   
 (g)  $\int_0^{2\pi} (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$       (h)  $\int_1^2 \frac{2}{x^2 + 2x} dx$       (i)  $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx$

68. Calcule a área da região do plano  $xOy$  definida pelos seguintes conjuntos:

- (a)  $\{(x,y) : -1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$       (b)  $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 4 \wedge -\sqrt{x} \leq y \leq 0\}$   
 (c)  $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq |x^2 - 3x|\}$       (d)  $\{(x,y) : \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \wedge \frac{1}{2} \leq y \leq \operatorname{tg} x\}$   
 (e)  $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 8 \wedge 2 - \sqrt{x+1} \leq y \leq 1\}$       (f)  $\{(x,y) : -2 \leq x \leq 0 \wedge e^x \leq y \leq e^{-x}\}$

69. Para cada uma das seguintes regiões do plano  $xOy$  esboce a correspondente região simétrica relativamente à recta de equação  $y = x$  e calcule a respectiva área:

- (a)  $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$   
 (b)  $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 4 \wedge -\sqrt{x} \leq y \leq 0\}$   
 (c)  $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\} \cup \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{2-x}\}$   
 (d)  $\{(x,y) : -1 \leq x \leq 0 \wedge 1 \leq y \leq 2 - \sqrt{x+1}\} \cup \{(x,y) : 0 \leq x \leq 8 \wedge 2 - \sqrt{x+1} \leq y \leq 1\}$   
 (e)  $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge -2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\} \cup \{(x,y) : 1 \leq x \leq 4 \wedge 2x - 4 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$

70. Recorrendo ao cálculo integral, determine a área do trapézio de vértices:  $V_1 = (2,0)$ ,  $V_2 = (1,3)$ ,  $V_3 = (8,3)$  e  $V_4 = (6,0)$ .

71. Usando a fórmula de integração por partes, calcule:

- (a)  $\int_{1/e}^e x \ln x dx$       (b)  $\int_{-1}^0 xe^{-x} dx$       (c)  $\int_0^{\pi/4} x \sec^2 x dx$   
 (d)  $\int_0^1 x^2 \sinh x dx$       (e)  $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$       (f)  $\int_{-\pi/4}^0 e^x \cos x dx$   
 (g)  $\int_0^{\pi/4} \sin(3x) \sin x dx$       (h)  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$       (i)  $\int_{-1}^1 x^2(x+2)^4 dx$

72. Usando a fórmula de integração por substituição com a mudança de variável indicada, calcule:

- (a)  $\int_0^{3/2} \sqrt{9-4x^2} dx$  ;  $x = \frac{3}{2} \sin t$       (b)  $\int_{-\ln(\sqrt{3})}^0 \frac{1}{\cosh x} dx$  ;  $x = \ln t$   
 (c)  $\int_{-1}^8 \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} dx$  ;  $x = t^3$       (d)  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$  ;  $x = \operatorname{tg} t$

73. Mostre que:

- (a)  $\int_1^e \ln x dx = e - \int_0^1 e^y dy$       (b)  $\int_{-1}^0 \arcsin x dx = -\frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^0 \sin y dy$

Dê uma interpretação geométrica dos resultados.

74. Considere a região do plano  $xOy$  definida por

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$$

- (a) Esboce a região.  
(b) Usando o cálculo integral, determine a área da região.
75. Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[-a, a]$ , onde  $a \in \mathbf{R}^+$ . Mostre que:
- (a) Se  $f$  é ímpar então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ;  
(b) Se  $f$  é par então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .
76. Calcule a área das regiões do plano  $xOy$  limitadas pelas seguintes condições:
- (a)  $y + x^2 - 4 = 0$ ;  $x - y + 2 = 0$       (b)  $y + \sqrt{x+1} - 2 = 0$ ;  $y = 1$ ;  $x = -1$   
(c)  $y - e^{|x|} + 1 = 0$ ;  $y = 2$       (d)  $y = \sqrt{2 - x^2}$ ;  $y = x^2$   
(e)  $y = \sqrt{2 - x^2}$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 0$       (f)  $y = \ln x$ ;  $y = x$ ;  $x = e$ ;  $y = 0$   
(g)  $y - x^2 - 2x = 0$ ;  $y = -x^2$       (h)  $y + x^2 - 2 = 0$ ;  $y = |3x + 2|$





## 8. Integrais Impróprios

### 8.1 Definição e Exemplos

#### 8.1.1 Integração num intervalo ilimitado

**Definição 8.1.1 — Integração num intervalo ilimitado.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, +\infty]$ . Diz-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

é um integral impróprio.

**Definição 8.1.2 — Natureza do Integral Impróprio.** Diz-se que o integral impróprio:

- É convergente se o limite existe e é finito
- É divergente se o limite existe e é mais (menos) infinito
- É divergente se o limite não existe

#### ■ Exemplo 8.1 — Integração num intervalo ilimitado.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-x+1} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t e^{-x+1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-x+1}]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t+1} + e^0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

O integral impróprio é convergente. ■

■ **Exemplo 8.2 — Integração num intervalo ilimitado II.**  $\int_{-1}^{+\infty} e^{-|x|} dx$  é um integral impróprio convergente, uma vez que:

$$\bullet \int_{-1}^{+\infty} e^{-|x|} dx = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx;$$

- $\int_{-1}^0 e^x dx$  é um integral definido, logo convergente.
  - $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx$  é convergente.
- Assim, a convergência de  $\int_{-\infty}^a e^{-|x|} dx$  segue da sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} e^{-|x|} dx &= \int_{-1}^0 e^x dx + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx \\ &= [e^x]_{-1}^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^t \\ &= 2 - e^{-1}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 8.3 — Integração num intervalo ilimitado.**

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln(x)]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t \\ &= +\infty \end{aligned}$$

O integral impróprio é divergente para  $+\infty$ .

■

**Definição 8.1.3 — Integração num intervalo ilimitado.** Seja  $f$  uma função contínua em  $]-\infty, b]$ . Diz-se que

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

é um integral impróprio.

**Definição 8.1.4 — Natureza do Integral Impróprio.** Diz-se que o integral impróprio:

- É convergente se o limite existe e é finito
- É divergente se o limite existe e é mais (menos) infinito
- É divergente se o limite não existe

■ **Exemplo 8.4 — Integração num intervalo ilimitado.**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{e^x} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x e^{-x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( [-e^{-x} x]_t^0 + \int_t^0 e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^{-t} t + [-e^{-x}]_t^0) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^{-t} t - 1 + e^{-t}) \\ &= -1 + \lim_{t \rightarrow -\infty} (t + 1) e^{-t} = -\infty \end{aligned}$$

O integral é divergente para  $-\infty$ .

■

**Definição 8.1.5 — Integração num intervalo ilimitado.** Seja  $f$  uma função contínua em  $\mathbb{R}$ . Então

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx\end{aligned}$$

**Definição 8.1.6 — Natureza do Integral Impróprio.** Diz-se que:

- É convergente se ambos os integrais são convergentes
- É divergente se, pelo menos, um dos integrais é divergente para  $+\infty$  e o outro não é divergente para  $-\infty$ .
- É divergente se não é convergente nem divergente para  $\infty$

■ **Exemplo 8.5 — Integração num intervalo ilimitado.**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 121} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 121} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 121} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 121} dx \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2 + 121} dx \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{121((\frac{x}{11})^2 + 1)} dx \\ &= \frac{2}{11} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{11} \right) \right]_0^t \\ &= \frac{2}{11} \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{11} \right) = \frac{\pi}{11}\end{aligned}$$

O integral impróprio é convergente. ■

■ **Exemplo 8.6 — Integração num intervalo ilimitado II.** Sendo  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  um integral convergente, de valor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

é possível determinar o valor dos integrais impróprios

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \& \quad \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{via mudança de variável}).$$

Primeiro, começemos por representar o integral convergente na forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx.$$

Por outro lado, usando argumentos de paridade (vide **Teorema 7.5.4**), é possível concluir que

$$\int_{-a}^a e^{-x^2} dx = 2 \int_0^a e^{-x^2} dx.$$

Desta última igualdade, segue que

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} 2 \int_0^a e^{-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

Portanto,  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Para o cálculo de  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ , observe que a substituição  $x = \sqrt{2}t$  nos conduz à igualdade

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Portanto,  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  (após algumas simplificações). ■

**Desafio 8.1 — Para revisão de técnicas de integração.** Sabendo que  $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx$  é um integral impróprio de valor

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 24$$

determine o valor numérico dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dt \quad \& \quad \int_0^{+\infty} t^5 e^{-2t} dt.$$



Para resolução do desafio acima, revisite o **Teorema 7.5.1 & o Teorema 7.5.2** do capítulo **7 Integral Definido**.

### 8.1.2 Integração de uma Função Não-Limitada

**Definição 8.1.7 — Integração de uma Função Não-Limitada.** Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  mas não limitada. Diz-se que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

é um integral impróprio.

**Definição 8.1.8 — Integração de uma Função Não-Limitada.** Seja  $f$  contínua em  $[a, b[$  mas não limitada. Diz-se que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

é um integral impróprio.

■ **Exemplo 8.7 — Integração de uma Função Não-Limitada.** O integral  $\int_0^1 \ln(x) dx$  é impróprio, uma vez que a função  $f(x) = \ln(x)$  exibe uma descontinuidade no intervalo  $[0, 1]$ . Neste caso, este deve ser descrito como

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln(x) dx.$$

Este integral impróprio é convergente, de valor de valor igual a  $-1$ . De facto, ao aplicarmos a fórmula de integração por partes, segue que :

$$\begin{aligned} \int_t^1 \ln(x) dx &= [x \ln(x) - x]_t^1 \\ &= (-1 - t \ln t + t). \end{aligned}$$

Por outro lado, da regra de L' Hôpital podemos concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} -t \ln(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{-\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}} \\ &= 0 \text{ (após algumas simplificações).}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-1 - t \ln t + t) = -1.$$

■

■ **Exemplo 8.8 — Integração de uma Função Não-Limitada II.**

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \int_0^t \operatorname{tg} x dx \\ &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} [\ln(\sec x)]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \ln(\sec t) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

O integral impróprio é divergente. ■

**Desafio 8.2 — Integração de uma Função Não-Limitada II.** Estude a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\sqrt{3}}^0 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x} \right) dx.$$



Para resolução do desafio acima, revisite o **Exemplo 7.25** do capítulo **7 Integral Definido**.

**Definição 8.1.9 — Integração de uma Função Não-Limitada.** Seja  $f$  contínua em  $]a, b[$  mas não limitada. Diz-se que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^c f(x) dx + \lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(x) dx\end{aligned}$$

é um integral impróprio.

■ **Exemplo 8.9 — Função descontínua nas extremidades do intervalo.** Para estude a natureza do integral impróprio  $I_1 = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$ , comece por observar que da factorização

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

segue que a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$  é apenas contínua no intervalo  $]2, 3]$ , donde resulta que

$$I_1 = \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^3 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Por outro lado, ao reescrevermos  $f(x)$  como soma de frações simples (p.e. via 'regra do tapa'), retiramos que

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

e, por conseguinte, que

$$\begin{aligned} \int_t^3 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx &= - \int_t^3 \frac{1}{x-1} dx + \int_t^3 \frac{1}{x-2} dx \\ &= -\ln|t-1| - \ln|t-2|. \end{aligned}$$

Fazendo agora  $t \rightarrow 1^+$ , concluímos com base na 'regra simbólica'  $\ln(0^+) = -\infty$  que

$$I_1 = \lim_{t \rightarrow 2^+} (-\ln(2) + \ln|t-1| - \ln|t-2|) = +\infty.$$

Portanto, o integral impróprio [de segunda espécie] é divergente. ■

**Desafio 8.3 — Função descontínua nas extremidades do intervalo.** Determine a natureza do integral

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x} dx.$$

**Definição 8.1.10 — Integração de uma Função Não-Limitada.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, c[$  e em  $]c, b]$ , mas não limitada em cada um dos intervalos. Diz-se que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^c f(x) dx + \lim_{u \rightarrow c^+} \int_u^b f(x) dx \end{aligned}$$

é um integral impróprio.

■ **Exemplo 8.10 — Integração de uma Função Não-Limitada.**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 1^-} [\arcsin x]_0^t \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 1^-} \arcsin t \\ &= \pi \end{aligned}$$

O integral impróprio é convergente. ■

■ **Exemplo 8.11 — Integração de uma Função Não-Limitada.** A respeito de  $\int_0^4 \frac{1}{x^2 - 4} dx$ , comece por observar que este se trata de um integral impróprio, uma vez que:

- $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$ .
- A função  $\frac{1}{x^2 - 4}$  exibe uma descontinuidade no intervalo  $2 \in [0, 4]$ ;

Neste sentido, a natureza do integral impróprio deverá ser analisada com base na seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{x^2-4} dx &= \int_0^2 \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx + \int_2^4 \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx + \lim_{u \rightarrow 2^+} \int_u^4 \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx.\end{aligned}$$

Para tal, precisamos de calcular a primitiva associada a  $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$  usando a decomposição em frações simples. Após alguns cálculos auxiliares, segue que

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}.$$

Esta última igualdade permite-nos concluir que

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx &= \frac{1}{4} \ln|t-2| - \frac{1}{4} \ln|t+2|; \\ \int_u^4 \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx &= \frac{1}{4} \ln(2) - \frac{1}{4} \ln(6) + \frac{1}{4} \ln|u+2| - \frac{1}{4} \ln|u-2|.\end{aligned}$$

e, por conseguinte, que integral impróprio é divergente sem sinal definido, uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx &= -\infty; \\ \lim_{u \rightarrow 2^+} \int_u^4 \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx &= +\infty.\end{aligned}$$

■

**Desafio 8.4 — Frequência Matemática I, 14/01/2021.** Determine a natureza do integral

$$\int_0^2 \frac{1}{|x^2-1|} dx.$$

■ **Exemplo 8.12 — Integração de uma Função Não-Limitada.**

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t (x-1)^{-2} dx + \lim_{u \rightarrow 1^+} \int_u^2 (x-1)^{-2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [-(x-1)^{-1}]_0^t + \lim_{u \rightarrow 1^+} [-(x-1)^{-1}]_u^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left( -1 - \frac{1}{t-1} \right) + \lim_{u \rightarrow 1^+} \left( -1 + \frac{1}{u-1} \right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

O integral é divergente. ■

**Desafio 8.5 — Teste os seus conhecimentos sobre integrais impróprios.** Para cada uma das questões abaixo assinale apenas a letra correcta.

1. A respeito de  $I = \int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^5}} dx$ , podemos afirmar que:

- (A) é um integral impróprio divergente para  $-\infty$
- (B) é um integral impróprio divergente para  $+\infty$
- (C) é um integral impróprio convergente
- (D) nada se pode concluir acerca da sua natureza.

**Resposta:** \_\_\_\_\_

2. A respeito de  $I = \int_0^1 \frac{1}{x^5} dx$ , podemos afirmar que:

- (A) não é um integral impróprio
- (B) é um integral impróprio convergente
- (C) é um integral impróprio divergente para  $-\infty$
- (D) é um integral impróprio divergente para  $+\infty$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

3. Relativamente a  $I = \int_8^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{(x-7)^3}} dx$ , podemos afirmar que:

- (A) é um integral impróprio divergente para  $-\infty$
- (B) é um integral impróprio divergente para  $+\infty$
- (C) é um integral impróprio convergente
- (D) nada se conclui acerca da natureza deste integral

**Resposta:** \_\_\_\_\_

4. Considere o seguinte integral impróprio convergente  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-2|} dx$ . Podemos afirmar que:

- |   |  |
|---|--|
| (A) $I = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x+2} dx$                            | (B) $I = \int_{-\infty}^{-2} e^{x-2} dx + \int_{-2}^{+\infty} e^{-x+2} dx$ |
| (C) $I = \int_{-\infty}^2 e^{2-x} dx + \int_2^{+\infty} e^{x-2} dx$ | (D) $I = \int_{-\infty}^2 e^{x-2} dx + \int_2^{+\infty} e^{-x+2} dx$       |

**Resposta:** \_\_\_\_\_

5. Seja  $a > 0$  uma constante. Relativamente a  $I = \int_{-a}^a \operatorname{tg}(\pi x) dx$ , podemos afirmar que:

- (A) é um integral definido se  $a \leq \frac{1}{2}$  e um integral impróprio se  $a > \frac{1}{2}$
- (B) é um integral definido de valor  $I = 0$ , uma vez que a função tangente é ímpar
- (C) é um integral impróprio divergente para  $+\infty$  se  $a \geq \frac{1}{2}$
- (D) é um integral impróprio divergente sem sinal definido, se escolhermos  $a = \frac{1}{2}$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

## 8.2 Aplicações

### 8.2.1 Áreas de Regiões Ilimitadas

■ **Exemplo 8.13 — Área de uma função exibindo descontinuidades.** Para determinar a área da região

$$R_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1] \wedge -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq y \leq 0 \right\}.$$

como um integral impróprio convergente, comece por observar que no intervalo  $[0, 1]$  a função  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  exibe uma descontinuidade em  $x = 1$  – raiz de  $1 - x^2$ .

Assim, sendo  $A_1$  o integral impróprio que define a área da região  $R_1$ , segue que  $A_1$  é um integral impróprio, dado por

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \left( 0 - \left( -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o facto de que  $F(x) = \arcsin(x)$  é uma primitiva [imediata] de  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , segue que *Teorema Fundamental do Cálculo Integral* que

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(t).$$

Assim, o facto de  $F$  ser contínua em  $x = 1$  e de  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ , leva-nos a concluir via as propriedades dos limites que

$$A_1 = \lim_{t \rightarrow 1^-} \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}.$$

■

■ **Exemplo 8.14 — Complementar ao Exemplo 8.13.** Na sequência do **Exemplo 8.13**, podemos ainda verificar que a área definida pelo integral impróprio

$$\int_1^e \frac{1}{t \sqrt{1 - \ln^2(t)}} dt$$

coincide com a área da região  $R_1$ . Para tal, comece por observar que a função  $g(t) = \frac{1}{t \sqrt{1 - \ln^2(t)}}$  exibe uma descontinuidade no intervalo  $[1, e]$  – ponto  $t = e$ , uma vez que  $1 - \ln^2(e) = 0$ .

Da substituição  $x = \ln(t)$  segue que

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow e^-} \int_1^u \frac{1}{t \sqrt{1 - \ln^2(t)}} dt &= \lim_{u \rightarrow e^-} \int_0^{\ln(u)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \lim_{v \rightarrow 1^-} \int_0^v \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Comparando o integral impróprio que representa a área da região  $R_1$  ( $A_1$  tal como definido no **Exemplo 8.13**) concluímos que

$$\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2(t)}} dt = A_1,$$

como pretendido. ■



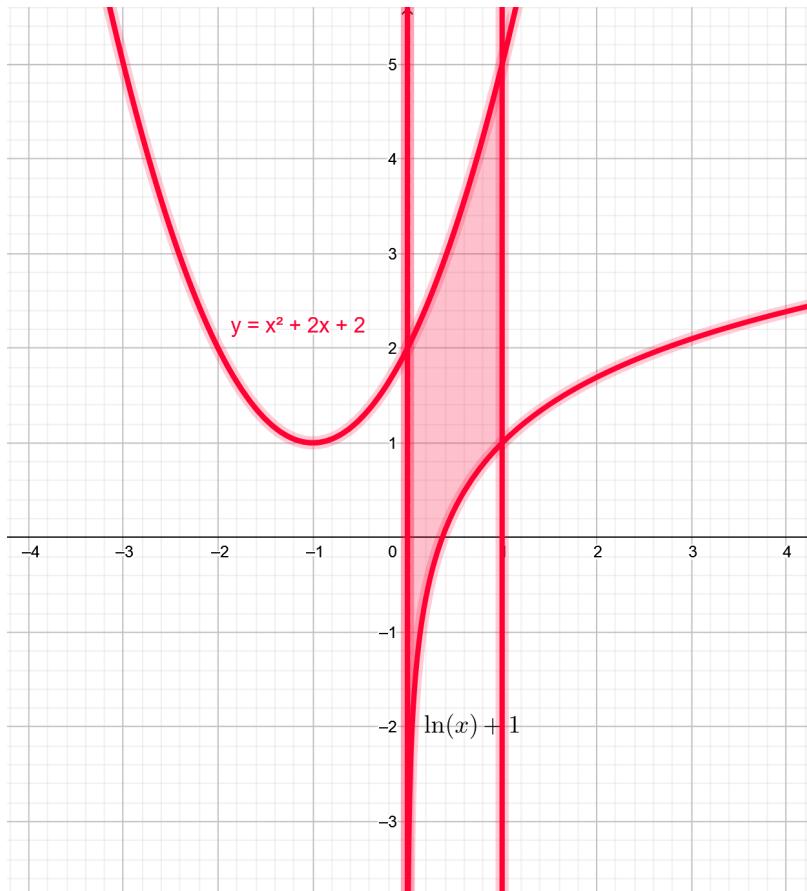
Na última igualdade envolvendo o integral impróprio do **Exemplo 8.14** usámos a substituição  $v = \ln(u)$  no cálculo do limite. Para usarmos tal argumento tomámos em linha o facto de  $x = \ln(t)$  ser contínua, para todo o  $t \in [1, e]$ .

■ **Exemplo 8.15 — Vide Exemplo 8.7.** A figura abaixo corresponde à região plana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \wedge \ln(x) + 1 \leq y \leq x^2 - 2x + 2\}$$

cuja área pode ser expressa pelo integral impróprio

$$\int_0^1 ((x^2 - 2x + 2) - (\ln(x) + 1)) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 ((x^2 - 2x + 1) - \ln(x)) dx.$$



Com base no **Exemplo 8.7** pode-se facilmente verificar que o integral impróprio acima é convergente, de valor igual a  $\frac{4}{3} [= \frac{1}{3} - (-1)]$ . ■

■ **Exemplo 8.16 — Integral impróprio que não define área.** A respeito do integral  $I_1 = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , note que:

- A função  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  exibe uma descontinuidade  $x = -1$  no intervalo  $[-1, 0]$ ;
- $F(x) = -\sqrt{1-x^2}$  é uma primitiva imediata de  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  no intervalo  $[t, 0]$ , para valores de  $t > -1$ .

Segue então que por combinação da definição de integral impróprio com o *Teorema Fundamental do Cálculo Integral* que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \int_t^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \left[ -\sqrt{1-x^2} \right]_t^0 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Portanto, o integral impróprio  $I_1$  é convergente, de valor  $I_1 = -1$ . No entanto, este não define uma área de uma região plana, uma vez que  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \leq 0$  no intervalo  $[-1, 0]$ . ■

■ **Exemplo 8.17 — Integral impróprio que não define área II.** A respeito do integral  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$ , note que

- A função  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$  exibe uma descontinuidade no intervalo  $[0, 1]$  – ponto  $x = 1$ ;
- $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  é uma primitiva imediata de  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$  no intervalo  $[0, t]$ , para valores de  $t > -1$ .

Segue então que por combinação da definição de integral impróprio com o *Teorema Fundamental do Cálculo Integral* que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]_0^t \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, o integral impróprio dado é divergente e, por conseguinte, não define a área de uma região plana. ■

**Desafio 8.6 — Consolide os seus conhecimentos teóricos a respeito de propriedades de integrais impróprios.** Para cada uma das questões abaixo assinale apenas a letra correcta.

1. Sendo  $f$  uma função contínua e não nula em  $[3, +\infty[$ , podemos afirmar que o integral impróprio  $I = \int_3^{+\infty} f(x) dx$ : É necessariamente verdade que:
  - representa a área de uma região
  - representa a área de uma região se for convergente e  $f$  for não negativa em  $[3, +\infty[$
  - diverge para  $+\infty$
  - diverge sem sinal definido.

**Resposta:** \_\_\_\_\_

2. Considere uma função  $f$ , contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ , e

$I = \int_7^{+\infty} |f(x)|dx$  um integral impróprio convergente. Então é necessariamente verdade que:

(A)  $\int_4^7 |f(x)|dx$  é um integral definido

(B)  $\int_5^7 f(x)dx$

(C)  $\int_7^{+\infty} |f(x)|dx$  representa a área de uma região plana ilimitada em  $[7, +\infty[$

(D)  $\int_7^{+\infty} f(x)dx$  representa a área de uma região plana ilimitada em  $[7, +\infty[$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

### 8.3 Exercícios Propostos

77. Justifique que os seguintes integrais são impróprios e calcule os seus valores para determinar a natureza:

(a)  $\int_{1/e}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$

(b)  $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

(c)  $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$

(d)  $\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx$

(e)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$

(f)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

(g)  $\int_{-\infty}^0 \cos^2 x dx$

(h)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$

(i)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1} dx$

78. Sendo  $p$  um parâmetro real positivo, mostre que:

(a) Se  $p > 1$  então  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  é convergente

(b) Se  $p \leq 1$  então  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  é divergente ( $+\infty$ )

(c) Se  $p \geq 1$  então  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  é divergente ( $+\infty$ )

(d) Se  $p < 1$  então  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  é convergente

79. Seja  $f$  uma função contínua em  $\mathbb{R}$ . Diz-se que  $f$  é uma densidade de probabilidade se é não-negativa e se satisfaz  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ . Para cada uma das seguintes funções, determine o parâmetro  $k > 0$  de modo a obter uma densidade de probabilidade:

(a)  $f(x) = ke^{-|x|}$

(b)  $f(x) = e^{-k|x|}$

(c)  $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$

(d)  $f(x) = \frac{k}{1+e^x}$



# Álgebra Linear

# IV

<b>9</b>	<b>Vectores e Matrizes</b>	329
9.1	Conceito de matriz	
9.2	Operações com matrizes	
<b>10</b>	<b>Sistemas de Equações Lineares</b>	347
<b>11</b>	<b>Inversa de uma Matriz</b>	349
11.1	Definição e propriedades	
11.2	Tipos especiais de matrizes	
11.3	Método de Gauss-Jordan	
11.4	Matrizes singulares vs Sistemas homogéneos	
11.5	Equações Matriciais	
<b>12</b>	<b>Determinante de uma Matriz</b>	359





## 9. Vectores e Matrizes

### 9.1 Conceito de matriz

Diz-se que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz de números reais do tipo  $m$  por  $n$  ou  $(m, n)$  ou  $m \times n$ . A matriz pode ser representada de forma simplificada por  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Notação 9.1 — Conjunto de todas as matrizes.** Iremos pontualmente escrever

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ ou } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

para nos referirmos a matrizes  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  cujos coeficientes  $a_{ij}$  são números reais.

#### 9.1.1 Vectores linha e vectores coluna

A submatriz  $1 \times n$  de  $A$  da forma

$$A_{(i)} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$$

denota a  $i$ —ésima linha de  $A$ , ao par a submatriz  $m \times 1$  de  $A$ :

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

denota a  $j$ —ésima coluna de  $A$ .

### 9.1.2 Diagonal principal e diagonal secundária

No caso de  $A$  ser uma matriz quadrada i.e.  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  ( $m = n$ ), a **diagonal principal de  $A$**  é constituída pelos elementos principais, isto é, pelos elementos do conjunto finito

$$\{a_{ii} : i = 1, 2, \dots, n\} = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\},$$

enquanto que a **diagonal secundária de  $A$**  é constituída pelos elementos do conjunto finito:

$$\{a_{i(n-i+1)} : i = 1, 2, \dots, n\} = \{a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{(n-1)2}, a_{n1}\}.$$

### 9.1.3 Matrizes especiais

**Definição 9.1.1 — Matriz nula.** Diz-se que a matriz  $A$  de dimensão  $m \times n$  é um **matriz nula** se  $a_{ij} = 0$ , para todos os  $i = 1, 2, \dots, m$  &  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Notação 9.2 — Matriz nula.** Por uma questão de simplicidade, iremos usar a notação

$$\mathbf{0}_{m \times n} = [0]_{m \times n}$$

para denotar a matriz nula, de dimensão  $m \times n$ .

**Definição 9.1.2 — Matriz identidade.** Diz-se que  $A$  é uma **matriz identidade** se  $a_{ii} = 1$  e  $a_{ij} = 0$  para todo o  $i \neq j$ , isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Notação 9.3 — Matriz Identidade.** Iremos usar a notação  $I_n$  para denotar a matriz identidade  $n \times n$ .

■ **Exemplo 9.1 — Matriz identidade.** A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

corresponde à matriz identidade  $3 \times 3$ .

No entanto as matrizes

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não definem matrizes identidade.

No caso da matriz  $B$  – matriz quadrada – a conclusão segue do facto de  $b_{33} = 0 \neq 1$ . No caso da matriz  $C$  – matriz rectangular – tem-se que a 4<sup>a</sup> coluna é nula, i.e.

$$C^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■

### 9.1.4 Matriz diagonal

**Definição 9.1.3 — Matriz diagonal e escalar.** Diz-se que  $A$  é uma **matriz diagonal** se  $a_{ij} = 0$  para todo o  $i \neq j$ , isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, se  $a_{ii} = \lambda$ , para todo o  $i = 1, 2, \dots, n$ , então a matriz  $A$  é uma **matriz escalar**.

**Notação 9.4 — Matriz diagonal.** No caso de  $A$  ser uma matriz diagonal, costumamos abreviar

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$



Com base na definição de matriz diagonal, é fácil de verificar que a **matriz identidade**

$$I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

ao par que a **matriz escalar** de ordem  $n$  corresponde a

$$A = \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda).$$

■ **Exemplo 9.2 — Matrizes diagonais.** A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

corresponde a uma matriz escalar  $3 \times 3$  – logo diagonal – uma vez que  $A = \sqrt{2}I_3$ .

Por outro lado, as matrizes

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1.41 \end{bmatrix}$$

são apenas matrizes diagonais.

A conclusão segue do facto  $b_{33} = 0 \neq \sqrt{2}$  e de  $c_{33} = 1.41 \neq \sqrt{2}$  – mesmo sendo uma aproximação de  $\sqrt{2}$  às centésimas. ■

### 9.1.5 Matrizes triangulares

**Definição 9.1.4 — Matriz triangular superior.** Diz-se que  $A$  é uma matriz triangular superior se  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ , isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Definição 9.1.5 — Matriz triangular inferior.** Diz-se que  $A$  é uma matriz triangular inferior se  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ , isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

As matrizes **identidade, diagonal e escalar** são simultaneamente matrizes triangular superiores e triangular inferiores.

■ **Exemplo 9.3 — Matrizes triangulares inferior e superior.** As matrizes de ordem 3

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -2 & 2 & 1/3 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

definem matrizes triangulares, sendo  $L$  uma matriz triangular inferior e  $U$  uma matriz triangular inferior, ao contrário das matrizes  $Q$  e  $R$  definidas abaixo:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0.0001 \\ -2 & 2 & 0.33 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0.0001 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

## 9.2 Operações com matrizes

### 9.2.1 Adição de matrizes

**Definição 9.2.1 — Matriz soma.** Sejam

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ e } B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

duas matrizes do tipo  $m$  por  $n$ . À matriz  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  do mesmo tipo tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

chama-se a matriz soma de  $A$  e  $B$  e escreve-se  $C = A + B$ .

■ **Exemplo 9.4 — Adição de matrizes.** Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+1 & 0-1 \\ 2+1 & 1+0 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 9.2.1 — Propriedades da adição de matrizes.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três matrizes  $m \times n$ .

Então, as seguintes propriedades são sempre satisfeitas

- **Adição é comutativa:**  $A + B = B + A$ ;
- **Adição é associativa:**  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- **Elemento neutro da soma:**  $A + \mathbf{O}_{m \times n} = A$ , onde  $\mathbf{O}_{m \times n}$  denota a matriz nula.

### 9.2.2 Multiplicação de uma matriz por um escalar

**Definição 9.2.2** Sejam  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  uma matriz do tipo  $m$  por  $n$  e  $\lambda$  um número real. O produto de  $A$  por  $\lambda$  é a matriz  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  do tipo  $m$  por  $n$  tal que

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$



É fácil de verificar pela **Definição 9.2.2** que, sendo  $A$  uma matriz  $m \times n$ , se tem

$$0A = \mathbf{O}_{m \times n}.$$

**Teorema 9.2.2 — Soma vs. Multiplicação por escalar.** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes  $m \times n$ , e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  dois escalares.

Então as seguintes propriedades são sempre satisfeitas:

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ;
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ .

**Notação 9.5 — Matriz escalar.** Observe que usando a multiplicação de um escalar por uma matriz, podemos representar a **matriz escalar**

$$A = \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$$

na forma compacta

$$A = \lambda I_n,$$

onde  $I_n$  denota a **matriz identidade** de ordem  $n$ .

■ **Exemplo 9.5** Para as matrizes  $A$  e  $B$  do **Exemplo 9.4**, temos

$$5A = \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 0 & 5 \times 0 \\ 5 \times 2 & 5 \times 1 & 5 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$(-1)B = \begin{bmatrix} (-1) \times 0 & (-1) \times 1 & (-1) \times (-1) \\ (-1) \times 1 & (-1) \times 0 & (-1) \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

■

**Notação 9.6 — Matriz  $-A$ .** Iremos usar ao longo do texto a notação

$$-A = (-1)A$$

para denotar a multiplicação da matriz

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

pelo escalar  $\lambda = -1$ .



É fácil de verificar pelo **Teorema 9.2.2** que

$$\begin{aligned} A - A &= (1 - 1)A \\ &= 0A \\ &= \mathbf{0}_{m \times n}. \end{aligned}$$

■ **Exemplo 9.6** Para a matriz  $B$  do **Exemplo 9.4**, e para a matriz  $-B$  calculada no **Exemplo 9.5** podemos facilmente verificar que  $B - B$  é a matriz nula  $2 \times 3$ , i.e.

$$B - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De modo análogo, é fácil de verificar que para a matriz  $5A$  calculada **Exemplo 9.5** se obtém a igualdade

$$5A + (-5A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$-5A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -20 \end{bmatrix}.$$

■

### 9.2.3 Multiplicação de matrizes

**Definição 9.2.3 — Produto linha-coluna.** Seja

$$L = [\ell_1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n]$$

um vector linha e

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

um vector coluna. Definimos o produto  $LC$  como sendo o número real dado pela igualdade

$$LC = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 + \dots + \ell_n c_n.$$



Sendo por definição

$$\langle \vec{\ell}, \vec{c} \rangle = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 + \dots + \ell_n c_n$$

o produto escalar entre dois vectores

$$\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \quad \& \quad \vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

de  $\mathbb{R}^n$ , tem-se que o **produto linha-coluna**  $LC$  corresponde a uma representação canónica do produto escalar  $\langle \vec{\ell}, \vec{c} \rangle$ .

**Definição 9.2.4 — Produto de duas matrizes.** Se

$$A = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \dots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}$$

é uma matriz  $m \times n$  formada por  $m$  linhas  $A_{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) &

$$B = \begin{bmatrix} B^{(1)} & B^{(2)} & \dots & B^{(p)} \end{bmatrix}$$

uma matriz  $n \times p$  formada por  $p$  colunas  $B^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ), então

$$AB = [c_{ij}]_{m \times p}$$

é uma matriz  $m \times p$ , cujos coeficientes  $c_{ij}$  são determinados a partir do **produto linha-coluna**

$$c_{ij} = A_{(i)} B^{(j)}.$$

■ **Exemplo 9.7** Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se que o produto  $AB$  é uma matriz  $2 \times 3$  enquanto que o produto  $BA$  não pode ser calculado, dado que o número de colunas de  $B$  (3) difere do número de linhas de  $A$  (2).

Para o leitor deixamos a verificação da igualdade

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

**Desafio 9.1 — Cálculo do produto de matrizes.** Efectue, se possível, o produto entre as matrizes abaixo

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \& \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Desafio 9.2 — Operações envolvendo matrizes.** Dadas matrizes  $A, B, C, D, E, F, G$  tais que:

- $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ;
- $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ;
- $C, E \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ;
- $F \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ ;
- $D, G \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

diga, justificando:

1. Se as igualdades abaixo fazem sentido:
  - (a)  $BC = CB$ ;
  - (b)  $DG = GD$ .
2. Se é possível efectuar as seguintes operações:
  - (a)  $CA + F$ ;

- (b)  $CF - 3AD$ ;  
 (c)  $C + 0A$ , onde  $0A$  denota a multiplicação do escalar  $\gamma = 0$  por todos os elementos da matriz  $A$ .

**Teorema 9.2.3 — Multiplicação de matrizes como combinação linear.** Sejam  $A^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) as colunas da matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $B_{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) as linhas da matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Então:

- O produto  $A^{(j)}B_{(i)}$  é uma matriz  $m \times p$
- O produto  $AB$  pode ser escrito como a combinação linear

$$AB = A^{(1)}B_{(1)} + A^{(2)}B_{(2)} + \dots + A^{(n)}B_{(n)}.$$

■ **Exemplo 9.8** Voltemos a abordar as matrizes do **Exemplo 9.7**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denotando por  $A^{(j)}$  as colunas da matriz  $A$  e por  $B_{(i)}$  as linhas da matriz  $B$ , note que

$$\begin{aligned} A^{(1)}B_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{(2)}B_{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{(3)}B_{(3)} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fica agora para o leitor a verificação da igualdade envolvendo a soma das matrizes acima:

$$A^{(1)}B_{(1)} + A^{(2)}B_{(2)} + A^{(3)}B_{(3)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

**Teorema 9.2.4 — Operações envolvendo soma e produto de matrizes.** Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$ ,  $B, B'$  duas matrizes  $n \times p$  e  $C$  uma matriz  $p \times q$ .

Então são válidas as seguintes igualdades:

1. **Associatividade:**  $(AB)C = A(BC)$ ;
2. **Distributividade:**  $A(B + B') = AB + AB'$ ;
3. **Multiplicação por escalar:**  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ , para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
4. **Elemento neutro multiplicação:**  $I_m A = A I_n = A$ , onde  $I_m$  e  $I_n$  denotam as matrizes identidade  $m \times m$  e  $n \times n$ , respectivamente.



Usando as matrizes identidade  $I_m$  e  $I_n$ , tem-se que para uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , e um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  a sequência de igualdades abaixo é sempre satisfeita:

$$\lambda A = (\lambda I_m)A = A(\lambda I_n).$$

**Desafio 9.3 — Operações com matrizes.** Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

calcule  $2(A + B) - AB$ .

No próximo exemplo vamos ilustrar que, ao contrário de números reais, a implicação

$$AB = \mathbf{0}_{m \times m} \implies A = \mathbf{0}_{m \times n} \vee B = \mathbf{0}_{n \times m}$$

não é satisfeita, em geral.

■ **Exemplo 9.9 — Existência de divisores de zero.** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que o produto de  $A$  por  $B$  é a matriz nula  $2 \times 2$ , no entanto nem  $A$  nem  $B$  são matrizes nulas.

■

No próximo exemplo vamos verificar que a **lei do corte** não se aplica a matrizes, em geral.

■ **Exemplo 9.10 — Lei do corte.** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AX = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = AY$$

Note-se que o produto de  $A$  por  $X$  coincide com o produto de  $A$  por  $Y$ , no entanto  $X$  é diferente de  $Y$ .

■ **Desafio 9.4** Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \& \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Verifique que  $AB = BA = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ ;
2. Verifique que  $AC = A$  e  $CA = C$ ;
3. Use os dois itens anteriores para mostrar as seguintes igualdades:
  - (a)  $ACB = CBA$ ;
  - (b)  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ;
  - (c)  $(A - B)^2 = (A + B)^2 = A^2 + B^2$ .

■ **Exemplo 9.11 — Quantidade de vitaminas ingeridas.** Suponhamos que a matriz  $2 \times 3$

$$V = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

fornecem as quantidades de vitaminas  $A$ ,  $B$  e  $C$  – colunas 1, 2 e 3 de  $V$ , respectivamente – obtidas em cada unidade dos alimentos I e II – linhas 1 e 2 de  $V$ .

Se definirmos por

$$C = [c_1 \ c_2]$$

a matriz ‘consumo’ de unidades ingeridas do alimento I e do alimento II (por esta ordem), então a matriz  $1 \times 3$  dada pelo produto

$$Q = CV$$

permite-nos determinar a quantidade ingerida de cada vitamina.

Adicionalmente, se o custo dos alimentos depender única e exclusivamente do seu conteúdo vitamínico, e se soubermos que o preço de cada unidade de vitamina é dado pelo vetor coluna

$$P = \begin{bmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \end{bmatrix}$$

então o custo total, em unidades monetárias (u.m.), seria dado pelo produto de matrizes

$$QP = (CV)P.$$

■

**Desafio 9.5 — Quantidade de vitaminas ingeridas.** Na sequência do **Exemplo 9.11**, resolva o seguinte problema:

*Se consumirmos 4 unidades do alimento I e 3 unidades do alimento II, quantas unidades de cada vitamina serão ingeridas?*

*Se soubermos ainda que os preços de cada unidade de vitamina A, B e C são 1.5, 3 e 5, quanto pagaríamos pela porção de alimentos ingerida?*

#### 9.2.4 Matrizes quadradas

Consideremos agora  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B$  uma matriz  $n \times m$ . Tem-se então que ambos os produtos  $AB$  e  $BA$  definem matrizes quadradas, sendo

1.  $AB$  uma matriz quadrada  $m \times m$
2.  $BA$  uma matriz quadrada  $n \times n$ .

Portanto, apenas faz sentido na igualdade  $AB = BA$ , apenas se  $m = n$ , i.e. se ambas as matrizes são quadradas.



Para o caso de  $m = n$ , é fácil encontrar exemplos concretos que justificam, em geral,  $AB \neq BA$ . As matrizes  $A$  e  $B$  do **Desafio 9.8** que se encontra mais adiante são apenas um deles.

**Corolário 9.2.5 — Identidades envolvendo matrizes.** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes quadradas  $n \times n$ . Então as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2; \\ (A-B)(A+B) &= A^2 + AB - BA - B^2.\end{aligned}$$



Sempre que  $AB = BA$  (matrizes comutam entre si), o resultado anterior conduz-nos às identidades

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2; \\ (A-B)(A+B) &= A^2 - B^2.\end{aligned}$$

### 9.2.5 Matrizes diagonais e escalares

**Desafio 9.6 — Efeito de multiplicação por matriz diagonal.** Calcule os produtos  $AD$  e  $DA$ , sendo

- $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$  uma matriz diagonal  $3 \times 3$  genérica;
- $A$  a matriz  $3 \times 3$  do **Desafio 9.3**.

Após calcular os produtos supramencionados:

1. Verifique que a multiplicação  $DA$  corresponde à multiplicação de cada linha  $i$  da matriz  $A$  pela constante  $d_i$ ;
2. Verifique que a multiplicação  $AD$  corresponde à multiplicação de cada coluna  $j$  da matriz  $A$  pela constante  $d_j$ ;
3. Verifique que  $AD = DA$  se  $D$  for uma matriz escalar.

■ **Exemplo 9.12 — Matriz anti-diagonal vs matriz escalar.** Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$  pode-se verificar que  $A^2$  é uma matriz escalar.

De facto, usando propriedade de multiplicação entre matrizes, obtemos

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{bmatrix},$$

ou seja,  $A^2 = (\alpha\beta)I_2$ , sendo  $I_2$  a matriz identidade de ordem 2.

Em particular,

- $A^2$  é a matriz nula  $2 \times 2$  se pelo menos uma das constantes é zero.
- $A^2 = -I_2$  se  $\alpha\beta = -1$ .

Possíveis escolhas para se obter a igualdade  $A^2 = -I_2$  são:

- **Escolha trivial:**  $\alpha = 1$  &  $\beta = -1$ ;
- **Escolha não-trivial:**  $\alpha = e^x$  &  $\beta = -e^{-x}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

■ **Desafio 9.7 — Matriz escalar  $3 \times 3$ .** Dado  $x \in \mathbb{R}$ , verifique que quadrado da matriz  $A$  ( $A^2$ ):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-x} \\ 0 & e^{-2x} & 0 \\ e^{-3x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz escalar.

**Desafio 9.8 — Matrizes escalares**  $2 \times 2$ . Para as matrizes  $A$  e  $B$  da forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & 0 \end{bmatrix},$$

com  $x \in \mathbb{R}$ , verifique se as matrizes abaixo são escalares:

1.  $AB$ ;
2.  $BA$ ;
3.  $AB + BA$ ;
4.  $AB - BA$ .

### 9.2.6 Potência de matrizes quadradas

**Definição 9.2.5** Sejam  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  uma matriz de ordem  $n$  e  $k$  um número natural. A potência de  $A$  com expoente  $k$  é uma matriz de ordem  $n$  definida por

$$A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ vezes}}$$



Da **Definição 9.2.5** segue que para valores de  $k \geq 2$ , a matriz  $A^k$  pode ser escrita como o produto da matriz  $A$  pela matriz  $A^{k-1}$ , uma vez que

$$A^k = A(A)^{k-1} = A^{k-1}A.$$

**Teorema 9.2.6 — Matrizes Idempotentes.** Se  $A$  for uma matriz de ordem  $n$  que satisfaz a propriedade

$$A^2 = I_n,$$

então as matrizes  $P$  e  $Q$  definidas por

$$P = \frac{1}{2}(I_n + A) \quad \& \quad Q = \frac{1}{2}(I_n - A)$$

são idempotentes, i.e.

$$P^2 = P \quad \text{e} \quad Q^2 = Q.$$

Adicionalmente, as igualdades

$$P^k = P \quad \text{e} \quad Q^k = Q.$$

são satisfeitas para todo o  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* De facto, segue do **Corolário 9.2.5** e do facto de as matrizes  $I_n$  e  $A$  comuta-

rem/permутarem entre si, que

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \frac{1}{4}(I_n + A)^2 \\
 &= \frac{1}{4}(I_n + A)(I_n + A) \\
 &= \frac{1}{4}(I_n^2 + A^2 + 2AI_n) \\
 &= \frac{1}{4}(2I_n + 2A) \\
 &= \frac{1}{2}(I_n + A) \\
 &= P.
 \end{aligned}$$

De modo análogo, é também possível demonstrar que

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= \frac{1}{4}(I_n - A)^2 \\
 &= \frac{1}{4}(I_n - A)(I_n - A) \\
 &= \frac{1}{4}(I_n^2 + A^2 - 2AI_n) \\
 &= \frac{1}{4}(2I_n - 2A) \\
 &= \frac{1}{2}(I_n - A) \\
 &= Q.
 \end{aligned}$$

Usando agora indução em  $k \in \mathbb{N}$ , podemos concluir que as igualdades

$$P^k = P \quad \text{e} \quad Q^k = Q.$$

são sempre satisfeitas. ■

**Desafio 9.9 — Matrizes Idempotentes de ordem 2.** Verifique que a matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

satisfaz a igualdade

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De seguida, verifique que as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \& \quad Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

satisfazem as seguintes igualdades

- $P + Q = I_2$ ;
- $P - Q = A$ ;
- $P^2 = P$ ;
- $Q^2 = Q$ .

■ **Exemplo 9.13 — Teoria de probabilidades.** Próximo do local de residência do seu professor de Matemática I existem 3 padarias: Padaria 1, Padaria 2 e Padaria 3.

Na matriz abaixo

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

os termos  $p_{ii}$  da diagonal principal correspondem à probabilidade de continuar a comprar pão na mesma padaria, ao par que os termos  $p_{ij}$  fora da diagonal principal ( $i \neq j$ ) representam a probabilidade de um frequentador da Padaria  $i$  passar a frequentar a Padaria  $j$  quando efectuar uma nova compra [de pão].

Com base na matriz  $P$ , podemos chegar facilmente nas seguintes conclusões:

- A Padaria I é a apresenta maior probabilidade de fidelizar os clientes ( $p_{11} = 0.7$  é a maior probabilidade na diagonal principal);
- Existe uma baixa probabilidade de os frequentadores da Padaria I & Padaria II passarem a frequentar a Padaria III ( $p_{13} = 0.1$  e  $p_{23} = 0.2$ );
- (Obtenha por você mesmo outro tipo de conclusões interessantes);
- ...

■

**Desafio 9.10 — Teoria de probabilidades.** Como continuação do **Exemplo 9.13** resolva o seguinte problema:

*Sabendo  $P^k$  representa a matriz de probabilidades de passar a frequentar cada uma das padarias ao fim de  $k$  compras, determine:*

(i) *A probabilidade do frequentador da Padaria 2 passar a frequentar a Padaria 1 ao fim de 2 compras.*

(ii) *Qual a padaria mais propensa a ganhar novos clientes ao fim de 3 compras.*

**Desafio 9.11 — Níveis de escolaridade.** Num estudo sociológico procurou-se estabelecer um modelo teórico que correlacione os níveis de escolaridade de pais e filhos, com base na seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Estabelecendo como:

- **Índice 1** – concluiu ensino primário;
- **Índice 2** – concluiu ensino secundário;
- **Índice 3** – concluiu ensino universitário;
- **Coeficiente  $a_{ij}$  da matriz  $A$**  – probabilidade de filho concluir nível de ensino  $i$ , supondo que o pai conclui o grau de ensino  $j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

determine qual a probabilidade de um neto de um indivíduo que concluiu o ensino secundário ser um universitário.

### 9.2.7 Transposta de uma matriz

Dada uma matriz  $A = [a_{ij}]$  de dimensão  $m \times n$ , podemos construir uma nova matriz  $B = [b_{ij}]$  de dimensão  $n \times m$  cuja  $k$ -ésima coluna ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) corresponde à  $k$ -ésima linha de  $A$ . Esta matriz designa-se por matriz transposta de  $A$ .

**Notação 9.7 — Matriz transposta.** Sendo  $A$  de dimensão  $m \times n$  de entradas  $a_{ij}$  Denotamos por  $A^T$  a matriz  $B$  de dimensão  $n \times m$ , cujas entradas  $b_{ij}$  satisfazem a igualdade

$$b_{ij} = a_{ji}.$$



Com base na construção da matriz transposta, é fácil de constatar que

$$(A^T)^T = A,$$

isto é, que a transposta da transposta é a própria matriz.

■ **Exemplo 9.14** Para as matrizes transpostas 9.3

■

**Teorema 9.2.7** Seja  $A$  uma matriz de dimensão  $m \times n$ . Então as seguintes propriedades são válidas:

1. Se  $B$  é uma matriz de dimensão  $m \times n$ , então

$$(A + B)^T = A^T + B^T;$$

2. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ;

3. Se  $B$  é uma matriz de dimensão  $m \times n$ , então

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

**Desafio 9.12 — Cálculo Matrizes Transpostas.** Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

calcule  $AB$ ,  $(AB)^T$  &  $B^T A^T$  e compare-as.

**Desafio 9.13 — Transposição envolvendo o produto de matrizes quadradas.** Se  $X, Y, Z$  e  $W$  forem quatro matrizes de dimensão  $n \times n$ , mostre que:

1.  $(XYZ)^T = Z^T Y^T X^T$ ;
2.  $(XYZW)^T = W^T Z^T Y^T X^T$ .



As igualdades enunciadas no desafio acima podem ser facilmente deduzidas partir da associatividade do produto de matrizes e do item 3. do **Teorema 9.2.7**.

### 9.2.8 Matrizes simétricas

**Definição 9.2.6 — Matriz simétrica.** Dizemos que uma matriz quadrada  $A$  de dimensão é simétrica, e escrevemos

$$A = A^T$$

quando as entradas  $a_{ij}$  da matriz  $A$  satisfazem a igualdade

$$a_{ij} = a_{ji}.$$



Só faz sentido se falar de matrizes simétricas no caso de estarmos perantes matrizes quadradas.

■ **Exemplo 9.15** Sendo  $x \in \mathbb{R}$  um parâmetro, podemos verificar que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4^x - 2 \\ 2^{x+1} - 3 & 5 \end{bmatrix}$$

é simétrica desde que a igualdade

$$4^x - 2 = 2^{x+1} - 3$$

seja sempre satisfeita.

Considerando a mudança de variável  $y = 2^x$ , segue que a solução da equação acima pode ser descrita em termos do sistema de equações

$$y^2 - 2 = 2y - 3 \quad \& \quad y = 2^x.$$

Fica ao cargo do leitor determinar o conjunto solução da equação acima. ■

■ **Exemplo 9.16 — Simetria como reflexão relativamente à diagonal principal.** É fácil de verificar que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{g} \\ \mathbf{c} & \mathbf{f} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \\ \mathbf{d} & \mathbf{g} & \mathbf{i} & \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica, uma vez que a parte superior – situada acima da diagonal principal (**a negrito**) – corresponde a uma ‘reflexão’ da parte inferior em relação à diagonal principal. ■

■ **Exemplo 9.17 — ‘Um Poema Quadrado’ por Lewis Carroll.** Outro exemplo de matriz simétrica é um célebre poema do matemático Charles Lutwidge Dodgson – a.k.a. Lewis Carroll, autor do célebre livro ‘Alice no País das Maravilhas’:

*I often wondered when I cursed,  
Often feared where I would be –  
Wondered where she'd yield her love  
When I yield, so will she,  
I would her will be pitied!  
Cursed be love! She pitied me ...*

Se repararmos o poema lê-se da mesma forma, quer seja lido na horizontal ou na vertical.

Ao agruparmos cada frase do poema como uma matriz, onde:

- Cada parágrafo do poema é uma linha da matriz;
- Cada palavra corresponde a um coeficiente da matriz.

obtemos uma matriz  $6 \times 6$  simétrica:

$$\begin{bmatrix} \text{I} & \text{often} & \text{wondered} & \text{when} & \text{I} & \text{cursed} \\ \text{Often} & \text{feared} & \text{where} & \text{I} & \text{would} & \text{be} \\ \text{Wondered} & \text{where} & \text{she'd} & \text{yield} & \text{her} & \text{love} \\ \text{When} & \text{I} & \text{yield} & \text{so} & \text{will} & \text{she} \\ \text{I} & \text{would} & \text{her} & \text{will} & \text{be} & \text{pitied} \\ \text{Cursed} & \text{be} & \text{love} & \text{she} & \text{pitied} & \text{me} \end{bmatrix}.$$



É fácil de verificar que as **matrizes diagonais [e escalares]** são casos particulares de matrizes simétricas.

**Desafio 9.14 — Matrizes simétricas.** Para uma matriz quadrada  $A$ , diga justificando qual das matrizes abaixo não é simétrica:

1.  $B = A + A^T$ ;
2.  $C = A - A^T$ ;
3.  $D = AA^T$ ;
4.  $E = A^T A$ .



O **Teorema 9.2.7** permite-lhe verificar se as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  enunciadas no desafio acima são simétricas.

**Desafio 9.15 — Teste 2 (2020/2021), Escolha Múltipla.** Assinale apenas a letra correcta.

Se  $A$  e  $B$  são duas matrizes simétricas de ordem  $n$ , qual das matrizes abaixo é simétrica?

- |                |                |
|----------------|----------------|
| (A) $A(A + B)$ | (B) $A(A - B)$ |
| (C) $ABB$      | (D) $ABBA$ .   |

**Resposta:** \_\_\_\_\_

**Desafio 9.16 — Matrizes anti-simétricas vs simétricas.** Supondo que as matrizes quadradas  $A$  e  $B$  de dimensão  $n \times n$  são anti-simétricas, i.e.

$$A^T = -A \quad \& \quad B^T = -B$$

prove que:

1. a matriz  $C = AB$  é simétrica;
2. as matrizes  $D = ABA$  e  $E = BAB$  são anti-simétricas;
3. diga, justificando, o que pode concluir acerca da matriz  $F = ABBA$ .



As matrizes  $A$  e  $B$  do **Desafio 9.8** são casos particulares de matrizes anti-simétricas.

**Desafio 9.17 — Matriz de Hilbert.** A matriz de Hilbert  $H$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  introduzida por David Hilbert em 1894, em que os coeficientes  $h_{ij}$  correspondem aos integrais

$$h_{ij} = \int_0^1 x^{i+j-2} dx.$$

**Como exercício:**

- (i) Justifique porque a matriz  $H$  é simétrica.
- (ii) Construa a matriz de Hilbert  $4 \times 4$ , calculando os integrais associados aos coeficientes  $h_{ij}$ .

**Teorema 9.2.8 — Produto de matrizes simétricas.** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes simétricas. Então  $AB$  é uma matriz simétrica se, e só se,

$$AB = BA.$$

*Demonstração.* Assumindo que  $AB$  é uma matriz simétrica, i.e.  $(AB)^T = AB$ , segue pelo item 3. do **Teorema 9.2.7** a sequência de igualdades

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$$

A última igualdade segue do facto de tanto  $A$  quanto  $B$  serem matrizes simétricas (i.e.  $A = A^T$  &  $B = B^T$ ).

Reciprocamente, se  $AB = BA$ , segue novamente pelo item 3. do **Teorema 9.2.7** a igualdade

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Do facto de  $A$  e  $B$  serem simétricas, concluímos que

$$(AB)^T = AB,$$

como pretendido. ■



As matrizes  $A$  e  $B$  do **Desafio 9.8** não são simétricas. No entanto os produtos  $AB$  e  $BA$  correspondem a matrizes simétricas.

**Corolário 9.2.9** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes simétricas  $n \times n$ . Então  $AB$  é simétrica se, e só se,

$$AB = \frac{1}{4}(A+B)^2 - \frac{1}{4}(A-B)^2$$

*Demonstração.* Por aplicação do **Corolário 9.2.5** obtemos

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ (A-B)^2 &= A^2 - AB - BA + B^2 \end{aligned}$$

Segue então que

$$(A+B)^2 - (A-B)^2 = 2AB + 2BA.$$

Em particular, sendo  $A$  e  $B$  duas matrizes simétricas tem-se nas condições do **Teorema 9.2.8** que  $AB$  é simétrica se, e só se  $AB = BA$ .

Logo, a igualdade anterior é equivalente a termos

$$(A+B)^2 - (A-B)^2 = 4AB.$$

Finalmente, multiplicando ambos os lados da igualdade à esquerda pelo escalar  $\lambda = \frac{1}{4}$ , obtemos a identidade

$$AB = \frac{1}{4}(A+B)^2 - \frac{1}{4}(A-B)^2,$$

como pretendido. ■



## 10. Sistemas de Equações Lineares





## 11. Inversa de uma Matriz

### 11.1 Definição e propriedades

**Definição 11.1.1 — Matriz inversa.** Dada a matriz  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  de ordem  $n$ , diz-se que  $A$  é invertível se existe uma matriz  $X = [x_{ij}]_{n \times n}$  de ordem  $n$ , tal que

$$AX = I_n \wedge XA = I_n$$

sendo  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ .

**Notação 11.1 — Matriz Inversa.** Caso a matriz  $A$  seja invertível, iremos denotar por  $A^{-1}$  a inversa da matriz  $A$ .

**Teorema 11.1 — Unicidade da matriz inversa.** Se a matriz inversa de  $A$  existir então  $A^{-1}$  é a única matriz que verifica

$$AX = I_n \text{ e } XA = I_n$$

*Demonstração.* Suponhamos que as matrizes  $X$  e  $Y$  de ordem  $n$  são inversas de  $A$ , i.e.

$$AX = I_n \wedge XA = I_n$$

$$AY = I_n \wedge YA = I_n.$$

Por aplicação directa do **Teorema 9.2.4**, segue então que

$$\begin{aligned} X &= XI_n && (I_n \text{ elemento neutro multiplicação matrizes}) \\ &= X(AY) && (Y \text{ inversa de } A : AY = I_n) \\ &= (XA)Y && (\text{associatividade da multiplicação de matrizes}) \\ &= I_n Y && (X \text{ inversa de } A : XA = I_n) \\ &= Y && (I_n \text{ elemento neutro multiplicação matrizes}) \end{aligned}$$

Portanto  $X = Y$  e, por conseguinte,  $X = A^{-1}$  é única. ■

■ **Exemplo 11.1 — Inversa da matriz diagonal.** A matriz diagonal

$$D = \text{diag}(-1, 3, 1/2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

é invertível e a inversa de  $D$  é a matriz diagonal

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{diag}(-1, 1/3, 2)$$

visto que  $DX = XD = I_3$ .

Neste caso,  $D^{-1} = \text{diag}(-1, 1/3, 2)$ . ■

■ **Exemplo 11.2 — Vide Desafio 9.7.** Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-x} \\ 0 & e^{-2x} & 0 \\ e^{-3x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R})$$

podemos facilmente verificar com base na multiplicação de matrizes, e das propriedades da função exponencial segue que

$$A^2 = e^{-4x}I_3,$$

onde  $I_3$  denota a matriz identidade.

A igualdade anterior permite-nos concluir que:

- $A^2$  é uma matriz escalar;
- Para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , se tem  $(A^2)^{-1} = e^{4x}I_3$ .

Por outro, da igualdade anterior envolvendo a matriz  $A^2$ , segue ainda que a matriz  $X = e^{4x}A_3$  está nas condições da **Definição 11.1.1** e, por conseguinte, se tem que

$$A^{-1} = e^{4x}I_3,$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ . ■

**Desafio 11.1 — Exame de Recurso 2020/2021 (adaptação).** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule  $A^2$  e  $B^2$ .

(b) Verifique, por definição, que a matriz  $X = BA$  é a inversa da matriz  $Y = AB$ , i.e.  $(AB)^{-1} = BA$ .

■ **Exemplo 11.3 — Matriz de Hadamard.** A matriz de ordem de ordem 4

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é um exemplo de uma matriz de Hadamard – vide p.e. o link

<https://mathworld.wolfram.com/HadamardMatrix.html>.

Esta matriz é simétrica (i.e.  $H^T = H$ ). Por outro lado, podemos verificar que a matriz  $H^2 = 4I_4$  (matriz escalar), uma vez que

$$\begin{aligned} H^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Do produto de matrizes calculado acima, podemos facilmente deduzir que a matriz  $X = \frac{1}{4}H$  satisfaz as igualdades

$$HX = I_4 \quad \& \quad XH = I_4. \quad (11.1)$$

Portanto,  $H$  admite inversa e  $H^{-1} = \frac{1}{4}H$ . ■

**Desafio 11.2 — vide subseção 9.2.6.** Para a matriz de Hadamard  $H$  do **Exemplo 11.3**, determine:

1. as matrizes potência  $H^3$  e  $H^4$ ;
2. a inversa de  $H^3$  e  $H^4$ .

■ **Exemplo 11.4 — Continuação do Desafio 9.2.6.** Nas condições do **Desafio 9.2.6**, é fácil de constatar que as matrizes

$$P = \frac{1}{2}(I_n + A) \quad \& \quad Q = \frac{1}{2}(I_n - A)$$

satisfazem as igualdades

$$P^2 = P \quad \& \quad Q^2 = Q$$

desde que  $A^{-1} = A$ .

Adicionalmente, pode ainda ser verificado as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{1}{4}(I_n + A)(I_n - A) \\ &= \frac{1}{4}(I_n - A^2) \\ &= \mathbf{O}_{n \times n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QP &= \frac{1}{4}(I_n - A)(I_n + A) \\ &= \frac{1}{4}(I_n - A^2) \\ &= \mathbf{O}_{n \times n}. \end{aligned}$$

■

**Desafio 11.3 — Teste 2 (2020/2021), Escolha Múltipla.** Para cada uma das questões abaixo assinale apenas a letra correcta.

1. Seja  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ , e  $A, B, C$  três matrizes quadradas de ordem  $n$  tais que

$$AB = I_n \text{ e } BC = -I_n.$$

Então:

- (A)  $A = C$       (B)  $B = C$   
 (C)  $A = -C$       (D)  $B = -C.$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

2. Dadas duas matrizes invertíveis de ordem  $n$ ,  $A$  e  $B$  respectivamente, indique qual das igualdades abaixo não se verifica:

- (A)  $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$       (B)  $A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - A)A^{-1}$   
 (C)  $A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$       (D)  $A^{-1} + B^{-1} = B^{-1}(A + B)A^{-1}.$

**Resposta:** \_\_\_\_\_

**Desafio 11.4 — Inversa da matriz potência.** Se  $A^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) corresponde à matriz potência introduzida na **Definição 9.2.5**, mostre que se a igualdade

$$A^k = I_n$$

é satisfeita para algum  $k \geq 2$ , então  $A$  admite inversa. **Qual a inversa de  $A$ ?**

**Corolário 11.1.2 — Propriedades da matriz inversa.** Suponhamos que  $A$  e  $B$  são duas matrizes invertíveis. Então as seguintes propriedades também são satisfeitas:

1.  $A^{-1}$  também é invertível e

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2.  $A^T$  também é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3. O produto  $AB$  define também uma matriz invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$



Sendo  $A$  e  $B$  duas matrizes invertíveis, a soma  $A + B$  não é necessariamente uma matriz invertível (p.e. quando  $A = \text{diag}(-1, 3, \frac{1}{2})$  e  $B = I_3$ ).

*Demonstração.* **Igualdade**  $(A^{-1})^{-1} = A$ . Das igualdades matriciais

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

segue automaticamente, pela **Definição 11.1.1**, que  $X = A$  é a inversa de  $A^{-1}$ . Que é única, pelo **Teorema 11.1.1**. ■

**Igualdade**  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ . Aplicando a transposta às igualdades matriciais

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

e da segue automaticamente, pelo **Teorema 9.2.7**:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T \quad \wedge \quad (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T$$

e pela propriedade  $I_n^T = I_n$  que as igualdades

$$(A^{-1})^T A^T = I_n \quad \wedge \quad A^T (A^{-1})^T = I_n$$

também são satisfeitas.

Escolhendo  $X = (A^{-1})^T$ , concluímos pela **Definição 11.1.1** que  $X$  é inversa da matriz  $A^T$ . Adicionalmente, pelo **Teorema 11.1.1** segue que

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$$

como pretendido. ■

**Igualdade**  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Suponhamos que pretendemos determinar uma matriz  $X$  de ordem  $n$  tal que

$$(AB)X = I_n \quad \wedge \quad X(AB) = I_n$$

Comecemos pela equação matricial

$$(AB)X = I_n$$

Multiplicando ambos os lados equação à esquerda por  $A^{-1}$ , obtemos

$$A^{-1}(AB)X = A^{-1}I_n \iff BX = A^{-1}.$$

Multiplicando agora ambos os lados da equação matricial  $BX = A^{-1}$ , à esquerda por  $B^{-1}$ , concluímos ainda que

$$B^{-1}(BX) = B^{-1}A^{-1} \iff X = B^{-1}A^{-1}.$$

Esta última igualdade diz-nos que  $X = B^{-1}A^{-1}$  é candidata a inversa da matriz  $AB$ .

Finalmente, substituindo  $X = B^{-1}A^{-1}$  no produto de matrizes  $X(AB)$ , obtemos a sequência de igualdades

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n})B = B^{-1}B = I_n.$$

que nos permite concluir que a matriz  $X = B^{-1}A^{-1}$  está nas condições da **Definição 11.1.1**. Adicionalmente, pelo **Teorema 11.1.1** concluímos que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

com pretendido. ■

■

■

**Desafio 11.5 — Propriedades da matriz inversa.** Sendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e  $D = \text{diag}(-1, 3, \frac{1}{2})$  a matriz do **Exemplo 11.1**:

1. Verifique, por definição, que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

2. Determine  $(A^T)^{-1}$  &  $(AD)^{-1}$ .

3. Calcule o produto  $A^{-1}D^{-1}$  e descreva o efeito da multiplicação à direita de  $A^{-1}$  por  $D^{-1}$  – vide **Desafio 9.6**.

**Desafio 11.6 — Inversa da matriz transposta.** Se  $A$  é uma matriz de ordem  $n$  que satisfaz a sequência de igualdades

$$AA^T = \lambda I_n, \quad A^T A = \lambda I_n \quad (\lambda \neq 0)$$

o que posso concluir acerca da inversa de  $A^T$ ?

## 11.2 Tipos especiais de matrizes

### 11.2.1 Matrizes Diagonais

O **Exemplo 11.1** corresponde essencialmente a uma aplicação do seguinte resultado:

**Teorema 11.2.1 — Inversa de uma matriz diagonal.** Seja

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

uma matriz diagonal de ordem  $n$ .

Então  $D$  admite inversa se, e só se, todos os coeficientes  $d_1, d_2, \dots, d_n$  são não-nulos (i.e.  $d_i \neq 0$ , para todo o  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Adicionalmente,

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_n}\right).$$

### 11.2.2 Matrizes Ortogonais

**Definição 11.2.1 — Matriz ortogonal.** Uma matriz  $A$  de ordem  $n$  é ortogonal se, e só se,  $A^{-1} = A^T$ , i.e.

$$AA^T = I_n \quad \wedge \quad A^T A = I_n.$$

■ **Exemplo 11.5 — Matriz de rotação.** É fácil de verificar, com recurso à identidade trigonométrica

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

que

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal.

De facto, da sequência de igualdades

$$\begin{aligned} RR^T &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^T R &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

segue que  $R^{-1} = R^T$ . ■



Com base na construção obtida no **Exemplo 11.3**, podemos facilmente verificar que a matriz

$$\frac{1}{2}H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é, para além de simétrica, uma matriz ortogonal, uma vez que

$$\left(\frac{1}{2}H\right)^2 = \frac{1}{2^2}H^2 = \frac{1}{4}(4I_4) = I_4.$$



Nas condições do **Desafio 11.6**, é fácil de verificar que a matriz

$$S = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}A$$

é ortogonal, desde que  $\lambda > 0$ .

**Desafio 11.7 — Matriz simétrica vs matriz ortogonal.** Mostre que se  $A$  é uma matriz ortogonal de ordem  $n$  que satisfaz a identidade

$$A^2 = I_n,$$

então  $A$  é uma matriz simétrica.

**Desafio 11.8 — Matriz de Householder ordem 2.** Verifique que a matriz

$$H = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

é simétrica e ortogonal. O que posso concluir quanto à inversa de  $H$ ?

**Desafio 11.9 — Matriz de Householder ordem 3.** Proceda aos seguintes passos:

1. Escolha um vector coluna  $b$  não nulo de dimensão  $3 \times 1$  ao seu critério;
2. Calcule a matriz  $M = bb^T$  e o escalar  $\mu = b^T b$ ;
3. De seguida, calcule a matriz  $Q = I_3 - \frac{2}{\mu}M$ ;
4. Para finalizar verifique que a matriz  $Q$  que construiu é simétrica e ortogonal.

**Desafio 11.10 — Matriz de Hadamard de ordem 4.** A partir da matriz do  $H$  do **Exemplo 11.3**, considere a matriz

$$K = [H^{(1)} \ H^{(3)} \ H^{(2)} \ H^{(4)}]$$

onde  $H^{(j)}$  denota a  $j$ -ésima coluna de  $H$ . Para esta nova matriz  $K$ :

1. Verifique que  $K = HP_{2,3}$ , onde

$$P_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

denota a matriz de permutação obtida a partir da troca das linhas 2 e 3 da matriz identidade de ordem 4 ( $I_4$ ).

2. Use a identidade anterior para calcular  $K^T$  e para averiguar se  $K$  é uma matriz simétrica.
3. Use a identidade anterior para mostrar que a matriz  $J = \frac{1}{2}K$  é ortogonal.

### 11.2.3 Matrizes Nilpotentes

**Definição 11.2.2 — Matriz nilpotente de ordem  $k$ .** Dizemos que a matriz  $A$  não nula é uma matriz nilpotente se existe  $k \geq 2$  natural tal que

- $A^j \neq \mathbf{0}_{n \times n}$ , para valores de  $j < k$ ;
- $A^k = \mathbf{0}_{n \times n}$ .



**Se a matriz  $A$  é uma matriz nilpotente [de ordem  $k$ ], então  $A$  não admite inversa.**

De facto, caso  $X = A^{-1}$  existisse obteríamos pela **Definição 11.1.1** que

$$AX = I_n.$$

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por  $A^{k-1}$ , à esquerda, obteríamos

$$AX = I_n \implies A^k X = A^{k-1}.$$

Da condição  $A^k = \mathbf{0}_{n \times n}$  segue que  $\mathbf{0}_{n \times n} = A^{k-1}$ , o que é absurdo uma vez que  $A^{k-1} \neq \mathbf{0}_{n \times n}$  por definição.

**■ Exemplo 11.6 — Matrizes Nilpotentes.** Supondo que  $A$  uma matriz de ordem  $n$  que satisfaz a igualdade

$$A^2 = \mathbf{0}_{n \times n},$$

onde  $\mathbf{0}_{n \times n}$  denota a matriz nula  $n \times n$  é fácil verificar que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A \quad \& \quad (I_n + A)^{-1} = I_n - A.$$

De facto, com recurso ao **Corolário 9.2.5**, é possível obter a seguinte sequência de identidades:

$$\begin{aligned} (I_n - A)(I_n + A) &= I_n^2 + I_n A - A I_n + A^2 \\ &= I_n + A - A - A^2 \\ &= I_n - A^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I_n + A)(I_n - A) &= I_n^2 - I_n A + A I_n + A^2 \\ &= I_n - A + A - A^2 \\ &= I_n - A^2. \end{aligned}$$

Da hipótese  $A^2 = \mathbf{0}_{n \times n}$ , obtemos com base nas equações matriciais anteriores que

$$(I_n - A)(I_n + A) = I_n \quad \text{e} \quad (I_n + A)(I_n - A) = I_n.$$

Deste sistema de equações, segue que ambas as matrizes,  $I_n - A$  &  $I_n + A$ , respectivamente, admitem inversa. Da unicidade da matriz inversa, retiramos que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A \quad \text{e} \quad (I_n + A)^{-1} = I_n - A$$

■

**Desafio 11.11 — Matrizes Nilpotentes.** Supondo que  $A$  uma matriz de ordem  $n$  que satisfaz a igualdade

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A,$$

onde  $I_n$  denota a matriz identidade de ordem  $n$ , verifique que

$$A^2 = \mathbf{0}_{n \times n}.$$

### 11.3 Método de Gauss-Jordan

**Desafio 11.12 — Vide Exemplo 11.5.** Use o método de Gauss-Jordan para verificar que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

é a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

De seguida, use  $A^{-1}$  para determinar a solução do sistema de equações

$$\begin{cases} -x + 2y + -z = 1 \\ 2x - y = -2 \\ -y + 2z = 1 \end{cases}.$$

### 11.4 Matrizes singulares vs Sistemas homogéneos

**Definição 11.4.1 — Matriz singular.** Dada uma matriz  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  dizemos que  $A$  é uma matriz singular se, e só se,  $A$  não admite inversa.

■ **Exemplo 11.7 — Matrizes singulares.** São exemplos de matrizes singulares:

1. As matrizes  $A$  e  $B$  do **Exemplo 9.9**.
2. As matrizes diagonais  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  em que pelo menos um dos coeficientes  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) é nulo – compare com **Teorema 11.1**
3. A soma de matrizes  $\text{diag}(-1, 1/3, 2) + I_3$  de ordem 3.
4. As matrizes nilpotentes – vide **Exemplo 11.6**.

■

- **Exemplo 11.8 — Matriz singular vs. Sistema Homogéneo.** Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 4 & 21 & 64 \\ 3 & 0 & 48 \end{bmatrix}.$$

pode-se verificar que, para além do vector coluna nulo de dimensão  $3 \times 1$ , os vectores da forma

$$X = \begin{bmatrix} -16\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} (\alpha \neq 0)$$

são soluções do sistema homogéneo

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui resulta que  $A^{-1}$  não existe, ou seja,  $A$  é **uma matriz singular**. ■

## 11.5 Equações Matriciais

O seguinte resultado é uma consequência da unicidade da matriz inversa, abordada no **Teorema 11.1.1**.

**Corolário 11.5.1 — Lei do corte.** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  invertível.

- Se  $Z$  e  $W$  são duas matrizes  $n \times m$ , então a implicação

$$AZ = AW \implies Z = W$$

é sempre satisfeita.

- Se  $Z$  e  $W$  são duas matrizes  $m \times n$ , então a implicação

$$ZA = WA \implies Z = W$$

é sempre satisfeita.



O **Corolário 11.5.1** diz-nos essencialmente que a lei do corte verifica-se apenas se

- $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ ;
- $A^{-1}$  existe.



O **Corolário 11.5.1** permite-nos ainda concluir que uma matriz quadrada  $A$  **não admite inversa** sempre que a lei do corte não se verifica.

- **Exemplo 11.9 — Lei do corte vs matrizes singulares.** Voltando às matrizes  $A, X$  e  $Y$  do **Exemplo 9.10**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

é agora fácil de argumentar, com base nas condições

$$AX = AY \text{ e } X \neq Y.$$

que  $A$  é **uma matriz singular**. ■

## 12. Determinante de uma Matriz







## Exercícios Propostos de Álgebra Linear

80. Considere os seguintes sistemas de duas equações a duas incógnitas:

$$(i) \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} 3y + 2x = 8 \\ x = 1 \end{cases}$$

(a) Verifique que os sistemas são equivalentes.

(b) Represente no plano  $XoY$  as duas rectas cujas equações estão indicadas em cada um dos sistemas.

81. Resolva os seguintes sistemas de duas equações a duas incógnitas pelo método de eliminação de Gauss:

$$(i) \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} -6x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} -6x + 3y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} -6x + 3y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$(vi) \begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

82. Resolva os seguintes sistemas de três equações a três incógnitas pelo método de eliminação de Gauss:

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 4x - y - z = 7 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 3x + 3y - z = 6 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ -3x + 2y + z = -7 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$(vi) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 1 \end{cases}$$

83. Classifique os seguintes sistemas para todos os valores reais do parâmetro  $k$ :

(i) 
$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

(ii) 
$$\begin{cases} x + ky + z = 0 \\ kx + y + kz = 1 \\ x + ky = k \end{cases}$$

(iii) 
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (k^2 - 14)z = k + 2 \end{cases}$$

(iv) 
$$\begin{cases} x + ky + z = k \\ x - y + kz = 0 \\ x - ky + z = k \end{cases}$$

(v) 
$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 2 \\ x + ky + z = 3 \end{cases}$$

(vi) 
$$\begin{cases} -x + ky = -k \\ -ky + kz = 2 \\ x - kz = -1 \end{cases}$$

84. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz  $C = 2(A + B) - AB$ .

85. Calcule os produtos  $AB$  e  $BA$ , quando definidos, nos seguintes casos:

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  (b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

86. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que  $AB = AC$  e  $BD = CD$ .

87. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolha uma maneira de as ordenar, de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

88. Sendo  $\alpha$  e  $\beta$  números reais, calcule o produto

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}.$$

89. Calcule:

(i)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$

(ii)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$

(iii)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^4$

(iv)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$

90. Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores (resp. inferiores) da mesma ordem é ainda uma matriz triangular superior (resp. inferior). A que são iguais os elementos diagonais do produto neste caso?

91. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e as três matrizes de permutação  $P_{i,j}$  com  $i < j, j = 2, 3$ . Calcule:

(i)  $P_{12}A$

(ii)  $AP_{12}$

(iii)  $P_{12}AP_{12}$

(iv)  $P_{13}b$

(v)  $P_{23}Ab$

(vi)  $(P_{13}P_{23})^T AP_{13}P_{23}$

92. Duas matrizes quadradas  $A$  e  $B$  dizem-se permutáveis se  $AB = BA$ .

(a) Mostre que:

(i)  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$  se e só se  $A$  e  $B$  são permutáveis;

(ii)  $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$  se e só se  $A$  e  $B$  são permutáveis;

(iii)  $(AB)^2 = A^2B^2$  se e só se  $A$  e  $B$  são permutáveis.

(b) Verifique se as seguintes matrizes  $A$  e  $B$  são permutáveis:

(b.1)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  (b.2)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

93. Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$  e  $D$  a matriz diagonal de ordem 3 dada por  $D = \text{diag}(2, 1, -3)$ .

(a) Calcule o produto  $DA$  e descreva o efeito da multiplicação à esquerda de  $A$  por  $D$ .

(b) Calcule o produto  $AD$  e descreva o efeito da multiplicação à direita de  $A$  por  $D$ .

(c) Determine quais as matrizes diagonais que são permutáveis com  $A$ .

94. Calcule os determinantes das seguintes matrizes de segunda ordem:

(i)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (ii)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$  (iii)  $C = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$

95. Calcule os determinantes das seguintes matrizes de terceira ordem:

(i)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$  (ii)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$  (iii)  $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

96. Considerando a matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ , calcule:

(i)  $\det(A)$  (ii)  $\det(3A)$  (iii)  $\det(A^2)$

97. Utilize as propriedades dos determinantes para concluir que:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

98. Calcule os determinantes das seguintes matrizes de quarta ordem:

(i)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  (ii)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  (iii)  $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

99. Sendo  $a, b$  e  $c$  parâmetros reais não-nulos, considere as seguintes matrizes elementares de ordem 3:

$$E_{21}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{31}(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{32}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule:

(i)  $E_{21}(a)E_{31}(b)$  (ii)  $E_{31}(b)E_{21}(a)$  (iii)  $E_{21}(a)E_{31}(b)E_{32}(c)$

(iv)  $(E_{31}(b)E_{32}(c))^T$  (v)  $E_{31}(b)^T E_{32}(c)^T$  (vi)  $E_{31}(b)^T E_{21}(a)^T$

(b) Mostre que:

(i)  $E_{21}(a)E_{21}(-a) = I_3$  (ii)  $E_{31}(-b)E_{31}(b) = I_3$  (iii)  $E_{32}(-c)E_{32}(c) = I_3$

(c) Verifique que  $E_{21}(-a)E_{31}(-b)$  é a inversa de  $E_{21}(a)E_{31}(b)$ .

(d) Calcule a inversa de  $E_{21}(a)E_{31}(b)E_{32}(c)$ .

100. Determine, se possível, as inversas das seguintes matrizes:

(i)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(ii)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii)  $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

(iv)  $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(v)  $E = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(vi)  $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

101. Determine os determinantes das inversas das matrizes dadas no exercício anterior.

102. Que mudança se dá em  $A^{-1}$  se em  $A$ :

a) Trocarmos as linhas  $i$  e  $j$ ?

b) Multiplicarmos a linha  $i$  por um número  $\alpha \neq 0$ ?

c) À linha  $i$  adicionarmos a linha  $j$  multiplicada por um número  $\alpha \neq 0$ ?

103. Sabendo que

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

determine as inversas das matrizes:

(i)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii)  $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

(iii)  $C = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

104. Mostre que se  $ad - bc \neq 0$  então a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é não-singular e determine a sua inversa.

105. Dados os parâmetros reais  $a$  e  $b$ , mostre que a matriz  $\begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$  tem inversa se e só se  $a \neq 0 \wedge a \neq b$ .

106. Considere os seguintes sistemas de equações lineares:

(i)  $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

(ii)  $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$

(a) Escreva os sistemas na forma matricial  $Ax = b$ .

(b) Estude a singularidade da matriz  $A$  do sistema.

(c) Resolva os sistemas pela regra de Cramer.