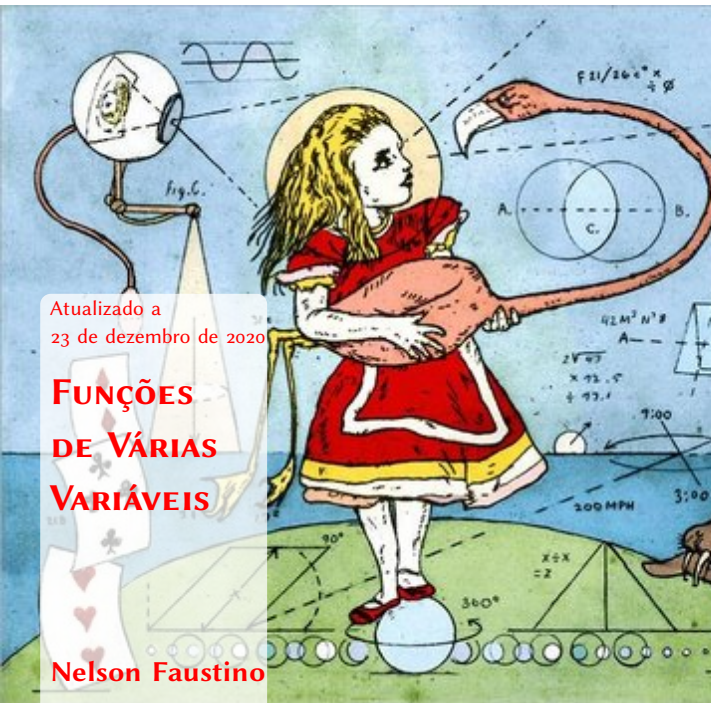


Atualizado a  
23 de dezembro de 2020

# FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Nelson Faustino



# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>2</b>
----------------	----------

<b>I Cálculo Diferencial de Funções Reais de Várias Variáveis</b>	<b>12</b>
---	-----------

<b>1 Vetores e a Geometria do Espaço <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>15</b>
1.1 Representação Cartesiana . . . . .	15
1.2 Espaço Vetorial . . . . .	19
1.3 Produto Escalar, Norma e Distância .	22

1.4	Projeção Ortogonal . . . . .	30
1.5	Ângulos entre Vetores . . . . .	35
1.6	Produto Vetorial e Produto Misto . .	40
1.7	Exercícios . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível</b>	<b>58</b>
2.1	Função e Gráfico . . . . .	59
2.2	Gráficos de Superfícies Cilíndricas . .	64
2.3	Gráficos de Superfícies de Revolução	75
2.4	Conjuntos de Nível . . . . .	83
2.5	Domínios . . . . .	90
2.6	Exercícios . . . . .	94
<b>3</b>	<b>Limites e Continuidade</b>	<b>105</b>
3.1	Definição de Limite . . . . .	106
3.2	Limites segundo Caminhos . . . . .	110
3.3	Limites vs Conjuntos de Nível . . . .	122
3.4	Propriedades dos Limites . . . . .	132
3.5	Teorema do Confronto . . . . .	162
3.6	Limites vs Continuidade . . . . .	175

3.7	Exercícios . . . . .	191
<b>4</b>	<b>Derivação e Diferenciabilidade</b>	<b>210</b>
4.1	Conceito de Derivada Direcional . . .	211
4.2	Derivadas Parciais e Vetor Gradiente	229
4.3	Diferenciabilidade . . . . .	247
4.4	Derivada Direcional vs Gradiente . .	267
4.5	Aproximação Linear e Equação do (Hiper)plano Tangente . . . . .	282
4.6	Regra da Cadeia . . . . .	308
4.7	Exercícios . . . . .	337
<b>5</b>	<b>Máximos e Mínimos</b>	<b>356</b>
5.1	Derivadas de Ordem Superior . . . .	357
5.2	Extremos Locais e Globais . . . . .	381
5.3	Multiplicadores de Lagrange . . . . .	399
5.4	Exercícios . . . . .	406

## **II    Integrais Múltiplas** **418**

### **6    Integrais Duplas e Triplas** **420**

- 6.1    Integrais Duplas sobre Retângulos . . . 421
- 6.2    Integrais Duplas sobre Regiões Gené-  
ricas . . . . . 452
- 6.3    Mudança da Ordem de Integração em  
Integrais Duplas . . . . . 475
- 6.4    Introdução às Integrais Triplas . . . . 493
- 6.5    Exercícios . . . . . 518

### **7    Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas** **526**

- 7.1    Teorema da Mudança de Variáveis . . 529
- 7.2    Integração em Coordenadas Polares . 534
- 7.3    Integração em Coordenadas Cilíndricas 546
- 7.4    Integração em Coordenadas Esféricas 549
- 7.5    Aplicações . . . . . 550
- 7.6    Problemas em Aberto . . . . . 551
- 7.7    Sobre os Problemas em Aberto . . . . 555

## 7.8 Exercícios . . . . . 558

# Prefácio ao eBook

*As - deep - as lay - the workers' - city below the - earth, so high above - it towered the complex - known as the "Club of the - Sons," with its lecture halls and - libraries, its theaters and stadiums.*

*—fala do filme Metropolis (1927) de Fritz Lang*

Sendo vastíssima a coleção de exercícios que podem ser encontrados em livros de autores consagrados, e na página do GRADMAT da disciplina, a produção de uma lista de exercícios em forma de eBook

tem uma justificação simples: a necessidade de nós, professores, nos ajustarmos a uma nova realidade, na qual o acesso tradicional ao conhecimento em livros já foi em grande parte substituído pela consulta *on-line* a plataformas de edição *wiki*, e em que o formato em papel tem vindo a ser substituído gradativamente pelo formato digital.

Quando na década passada o Youtube, a blogosfera e as redes sociais davam os primeiros passos, estávamos longe de imaginar o quão tamanha seria a sua importância, na disseminação de conteúdos informativos e pedagógicos. A bem da verdade, nunca se tinha equacionado que estes viriam a ser de extrema importância no reciclar do antigo conceito de Tele-Escola, a que muitos dos nossos pais tiveram [provavelmente] acesso, nos primórdios da televisão a preto e branco.

Há uns anos atrás se começou a idealizar o conceito de *Ambiente Virtual de Aprendizagem*, assente na plataforma *Second Life*, onde em que os docen-



tes/discentes eram embutidos numa espécie de sala de aula virtual. No entanto esta ideia foi colocada de parte, uma vez que nem todos os computadores pessoais possuem de placas gráficas robustas que lhes permita executar módulos de ensino, em tempo real.

Acidentalmente, foi nos últimos anos que o fenómeno *Web 2.0*, assente numa edição de conteúdos em formato *wiki*, começou a ser incorporado nas plataformas de ensino. O *MIT Open Course Ware*, do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), assim como a plataforma *Wolfram Mathworld*, da empresa responsável pelo desenvolvimento do software *Mathematica*, são dois entre vários casos de sucesso que nos devem levar a fazer uma reflexão profunda do impacto da tecnologia no ensino universitário. [Sim, o seu *smartphone* de última geração é bem-vindo na sala de aula, desde que seja para consultar a informação que consta no site da disciplina, para abrir as listas de exercícios, para consultar este eBook, para utilizar a *applet* do GeoGebra – <https://www.geogebra.org/apps/>

– ou até mesmo para consultar o horário dos fretados em <http://www.ufabc.edu.br/> – porque poderá haver dias em que as aulas se poderão prolongar até bem próximo das 23:00– etc, etc, etc.]

Acessibilidade e Portabilidade – Resumindo em duas palavras, foi isto que as ferramentas *Web 2.0* têm vindo a acrescentar ao ambiente tradicional de aprendizagem. Visto de uma outra forma, a distância geográfica e a falta de meios financeiros deixou de ser uma limitação para quem pretende aprender sobre um novo tema, ou simplesmente fazer um *upgrade* dos seus conhecimentos. Trabalhar neste sentido é, a meu entender, um bem necessário. Mais ainda numa universidade de cariz interdisciplinar como a UFABC, que completou recentemente 10 anos de existência.

Este eBook divide-se em duas (02) partes, sendo que cada parte corresponderá a dois dos momentos de avaliação previstos – **16 de março de 2017 (Prova 1)** & **24 de abril de 2017 (Prova 2)**. Cada capítulo corresponderá [aproximadamente] ao conteúdo a ser

ministrado por cada aula.

O seu conteúdo será disponibilizado gradativamente ao longo do quadrimestre. Nele irão ser inseridos curtas explicações sobre cada tema e alguns exercícios resolvidos, de modo a ilustrar os conceitos que serão ministrados em sala de aula. No final de cada capítulo, é deixado ao cargo do aluno alguns exercícios suplementares, com vista à consolidação de conceitos, e ao aprimoramento de técnicas adquiridas ao longo das aulas, e com a leitura da bibliografia recomendada.

Uma grande maioria dos exercícios que irá encontrar ao longo deste eBook foram idealizados pelo Professor Maurício Richartz, quando ministrou esta disciplina em 2015, e pelo Professor Gil Bernardes, que já ministrou por diversas vezes o equivalente desta disciplina na Universidade de Coimbra (Portugal). Desde já agradeço a ambos por me terem cedido gentilmente os seus arquivos.

# Parte I

# I

# **Cálculo Diferencial de Funções Reais de Várias Variáveis**

1

# Vetores e a Geometria do Espaço $\mathbb{R}^n$

*Equations are just the boring part of mathematics. I attempt to see things in terms of geometry.*

*–Stephen Hawking*

## 1.1 Representação Cartesiana

Em *Bases Matemáticas* (BM) e *Funções de Uma Variável* (FUV) você representou a solução de equações e inequações com recurso à reta numérica, a qual designou por conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , e representou o gráfico de uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de domínio  $\Omega$ :

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$$

como sendo um subconjunto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Este último conjunto corresponde ao referencial cartesiano de eixos  $Ox$  e  $Oy$ , e denota-se usualmente por  $\mathbb{R}^2$ . A origem do plano cartesiano é usualmente denotada pela letra  $O = (0, 0)$ , o eixo  $Ox$  é representado pelo *par ordenado*  $(x, 0)$ , e o eixo  $Oy$  é representado pelo *par ordenado*  $(0, y)$ .

Recorrendo à equação genérico de um plano  $\Pi$  gerado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e que contém o ponto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\Pi : (x, y) = (a, b) + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

podemos identificar os eixos  $Ox$  e  $Oy$  pelos vetores diretores  $\vec{i} = (1, 0)$  e  $\vec{j} = (0, 1)$ , respetivamente, e o ponto  $P = (x, y)$  pela equação do plano gerado por  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , que contém  $O$ :

$$P = O + x \vec{i} + y \vec{j}.$$

Em dimensões superiores, podemos definir o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  como sendo o conjunto formado



por todas as  $n$ -uplas da forma

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

À semelhança do que foi feito para o caso de  $\mathbb{R}^2$ , podemos descrever o espaço tridimensional (dimensão 3), gerado pelos eixos  $Ox \sim \vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $Oy \sim \vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $Oz \sim \vec{k} = (0, 0, 1)$ , a partir da equação

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

o espaço de dimensão<sup>1</sup> 4, gerado pelos eixos  $Ox \sim \vec{i} = (1, 0, 0, 0)$ ,  $Oy \sim \vec{j} = (0, 1, 0, 0)$ ,  $Oz \sim \vec{k} = (0, 0, 1, 0)$  e  $Ot \sim \vec{l} = (0, 0, 0, 1)$  a partir da equação

$$(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + t\vec{l},$$

e assim por diante.

<sup>1</sup> Também conhecido por espaço-tempo, ou por espaço de Minkowski.

O processo de se representar geometricamente um ponto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é análogo ao que já costumávamos fazer para representar pictoricamente os elementos do produto cartesiano entre dois conjuntos  $W_1$  e  $W_2$ :

$$W_1 \times W_2 = \{(w_1, w_2) : w_1 \in W_1 \text{ \& } w_2 \in W_2\}.$$

Vamos exemplificar para o caso tridimensional: Para determinar a representação cartesiana do ponto  $(a, b, c)$ , começamos por representar o ponto  $(a, b)$  no plano cartesiano  $xy$  (escolhemos  $W_1 = \mathbb{R}^2$  e  $W_2 = \mathbb{R}$ ).

Se  $c = 0$ , então o ponto  $(a, b, 0)$  está contido no plano, definido pela equação

$$\Pi_{xy} : z = 0.$$

Caso contrário, 'desloque'  $|c|$  unidades o ponto  $(a, b)$ , na direção paralela ao eixo  $Oz$ . Este deslocamento deverá ser efetuado no *sentido positivo*, se  $c > 0$ , ou no *sentido negativo*, caso contrário.

De modo análogo, podemos determinar a representação cartesiana do ponto  $(a, b, c)$  no espaço tridimensional, começando por identificar  $(b, c)$  resp.  $(a, c)$  no plano  $yz$  resp.  $xz$ .

## 1.2 Espaço Vetorial

Até agora identificámos essencialmente um  $n$ -uplo  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  como sendo um ponto determinado pela equação de um plano que passa pela origem

$$O = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ vezes}}.$$

Alternativamente, ao identificarmos os  $n$ -uplos  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  pelo vetor,  $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ , podemos induzir as seguintes operações em  $\mathbb{R}^n$ :

**A. ADIÇÃO DE VETORES:**

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

**M. MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR:**

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Usando o fato de  $\mathbb{R}$  ser um corpo ordenado, podemos facilmente concluir que o espaço  $\mathbb{R}^n$  munido das operações **A.** e **M.** satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer vetores  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  de  $\mathbb{R}^n$ , e escalares  $\lambda, \nu$  de  $\mathbb{R}$ :

**A1. PROPRIEDADE COMUTATIVA:**

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}.$$

**A2. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA:**

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).$$

**A3. EXISTÊNCIA DE ELEMENTO NEUTRO:**

O vetor  $\vec{0} := \overrightarrow{XX}$  satisfaz a igualdade

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}.$$

**A4.** EXISTÊNCIA DE INVERSO PARA A SOMA:

Para os vetores  $\vec{0} := \overrightarrow{XX}$ , e  $-\vec{x} := (-1)\vec{x}$ , é válida a igualdade

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}.$$

**M1.** ASSOCIATIVIDADE VETOR-ESCALARES:

$$\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}.$$

**M2.** PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA I:

$$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}.$$

**M3.** PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA II:

$$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}.$$

**M<sub>4</sub>.** ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICAÇÃO VETOR-ESCALAR: Para a equação  $\lambda = 1$ , é válida a igualdade

$$1 \vec{x} = \vec{x}.$$

### 1.3 *Produto Escalar, Norma e Distância*

O conceito geométrico mais elementar é o de distância ou de comprimento. Esta medida está associada a segmentos de reta  $[PQ]$ , definidos a partir de dois pontos  $P$  e  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$ .

No caso da reta numérica ( $n = 1$ ), podemos construir a partir de dois pontos  $a$  e  $b$  o segmento de reta

$$[ab] := \{a + t(b - a) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Observe-se que  $[ab]$  é equivalente ao seguinte intervalo de  $\mathbb{R}$ :

$$I = \{x \in \mathbb{R} : \min\{a, b\} \leq x \leq \max\{a, b\}\}.$$

Este intervalo é fechado<sup>2</sup> e limitado<sup>3</sup>, logo compacto.

Em termos da linguagem de vetores,  $\overrightarrow{ab} := b - a$  é o vetor de origem em  $a$ , e extremidade em  $b$  e  $\overrightarrow{ba} := a - b$  o vetor de origem  $b$  e extremidade  $a$ . A quantidade  $\max\{a, b\} - \min\{a, b\}$  corresponde ao comprimento do intervalo  $I$ .

Decorre naturalmente da definição de módulo que mesmo os vetores  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ba}$  tendo sentidos opostos,  $\overrightarrow{ab}$  e  $\overrightarrow{ba}$  têm o mesmo comprimento, uma vez que

$$|b - a| = |a - b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}.$$

No caso do plano cartesiano definido pelos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , o comprimento do segmento de reta  $[PQ]$

<sup>2</sup> Dizemos que  $I$  é um intervalo fechado se para todo o  $x \in I$ , e para todo o  $\varepsilon > 0$ , a interseção  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap I$  é não vazia.

<sup>3</sup> Dizemos que um intervalo  $I$  é limitado se existe uma constante  $M > 0$  tal que a desigualdade  $|x| \leq M$  se verifica para todo o  $x \in I$ .

pode ser determinado com recurso ao *Teorema de Pitágoras*.

Para tal, observe que o segmento de reta que une os pontos  $P = (p_1, p_2)$  e  $Q = (q_1, q_2)$  corresponde à diagonal de um triângulo retângulo, de catetos de comprimento  $|q_1 - p_1|$  (eixo  $Ox$ ) e  $|q_2 - p_2|$  (eixo  $Oy$ ), respetivamente.

Aplicando o *Teorema de Pitágoras*, concluímos que o comprimento de  $[PQ]$  é igual a  $\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$ .

No caso geral, a distância entre dois pontos genéricos de  $\mathbb{R}^n$ , de coordenadas  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  e  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , pode ser definida como a medida  $d(P, Q)$  induzida pela igualdade

$$d(P, Q)^2 = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2.$$

Esta pode ser reescrita em termos do *produto escalar* entre dois vetores de  $\mathbb{R}^n$ :



**Definição 1.3.1 (Produto Escalar)** Sejam  $\vec{x} = (x_1-0, x_2-0, \dots, x_n-0)$  e  $\vec{y} = (y_1-0, y_2-0, \dots, y_n-0)$  dois vetores  $\mathbb{R}^n$ . Definimos o produto escalar de  $\vec{x}$  por  $\vec{y}$ , e denotamos  $\vec{x} \bullet \vec{y}$ , como sendo o somatório

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Decorre naturalmente da definição de *produto escalar* que a quantidade  $\vec{x} \bullet \vec{y}$  é um número real, e que para  $\vec{y} = \vec{x}$ , a quantidade  $\vec{x} \bullet \vec{x}$  é não negativa. Em particular, para as substituições  $\vec{x} = \vec{y} = \overrightarrow{PQ}$  obtemos  $d(P, Q)^2 = \overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PQ}$ .

À custa do produto escalar, podemos assim definir a *norma Euclidiana* (ou *comprimento*) do vetor  $\vec{x}$  do seguinte modo:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}.$$

Esta noção permite-nos representar  $d(P, Q)$  como

sendo a norma de um vetor  $\overrightarrow{PQ}$  de  $\mathbb{R}^n$ , i.e.

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

A proposição a seguir resume as propriedades analíticas elementares do *produto escalar*:

**Proposição 1.3.1** *Sejam  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$  três vetores genéricos de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$  um escalar. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(i) *COMUTATIVIDADE:*

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{y} \bullet \vec{x}.$$

(ii) *LINEARIDADE:*

$$\vec{x} \bullet (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \bullet \vec{y} + \vec{x} \bullet \vec{z}.$$

(iii) *MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR:*

$$\lambda(\vec{x} \bullet \vec{y}) = (\lambda \vec{x}) \bullet \vec{y}.$$

(iv) *FORMA BILINEAR POSITIVA DEFINIDA:*

$$\vec{x} \bullet \vec{x} \geq 0.$$

(v) *VETOR NULO COMO ÚNICO VETOR DE VALOR NULO:*

$$\vec{x} \bullet \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Podemos agora avaliar de uma forma mais sucinta as ações geométricas, correspondentes à soma/subtração de vetores, assim como à multiplicação de um escalar por um vetor. Para o primeiro caso, decorre das propriedades (i) (ii) do produto escalar

que<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 \\ \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= 4\vec{x} \bullet \vec{y}.\end{aligned}$$

A primeira fórmula é conhecida na literatura como *regra do paralelogramo*, regra essa corresponde à *generalização indutiva* da propriedade

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2$$

envolvendo o quadrado dos números reais  $x$  e  $y$ , e os binômios  $(x \pm y)^2$ .

A segunda fórmula, que corresponde a uma *generalização indutiva* da propriedade

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy,$$

envolvendo os números reais  $x$  e  $y$ , permite-nos estabelecer um critério para verificar se dois vetores  $\vec{x}$  e

<sup>4</sup> Veja o **exercício 1** da seção **1.7 Exercícios**.

$\vec{y}$  de  $\mathbb{R}^n$  são perpendiculares<sup>5</sup> entre si. Decorre das propriedades (i) e (iii) de *produto escalar* que

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|.$$

Pelas propriedades de produto escalar, podemos concluir que  $\|\lambda \vec{x}\| = 0$  se e somente se  $\lambda = 0$  ou  $\vec{x} = \vec{0}$ . Para o caso de  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , podemos considerar constantes  $\lambda$  da forma  $\lambda = \frac{1}{\|\vec{x}\|}$ . Para esta escolha particular, concluímos que o vetor  $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$  satisfaz a equação  $\|\vec{y}\| = 1$ . A este tipo de vetores, designamos por *vetores unitários*.

<sup>5</sup> Em diversos livros de texto é comum adotar-se a noção de ortogonalidade, ao invés da noção de perpendicularidade. Esta noção faz apenas sentido no espaço Euclidiano, uma vez que é possível descrever este conceito em termos do ângulo formado por dois vetores, como iremos ver mais à frente na seção **1.5 Ângulos e Vetores**.

## 1.4 *Projeção Ortogonal*

O problema da determinação da projeção ortogonal de um vetor  $\vec{x}$  relativamente a um vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  corresponde essencialmente à resolução do seguinte problema de minimização:

**Problema 1.4.1 (Distância Ponto-Reta)** *Para um vetor  $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$  de origem  $P$  e extremidade  $Q$ , e  $\vec{v}$  um vetor diretor da reta de equação*

$$\mathcal{R} : X = P + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

*determine o vetor  $\vec{y}$  tal que a distância do ponto  $Q$  à reta  $\mathcal{R}$  é dada por*

$$d(Q, \mathcal{R}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

*i.e. que  $\|\vec{x} - \vec{y}\|$  é a menor das distâncias entre  $Q$  e  $\mathcal{R}$ .*

O problema acima pode ser resolvido com recurso à noções de perpendicularidade e projeção ortogonal:

**Definição 1.4.1 (Vetores Perpendiculares)**

Sejam  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  dois vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  são perpendiculares, e escrevemos  $\vec{x} \perp \vec{y}$ , quando

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = 0.$$

**Definição 1.4.2 (Projeção Ortogonal)** Sejam  $\vec{x}$  e  $\vec{v}$  dois vetores de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ . Dizemos que o vetor  $\mu \vec{v}$  (paralelo a  $\vec{v}$ ) define uma projeção ortogonal, e escrevemos

$$\mu \vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{x},$$

quando  $\vec{v} \perp \vec{x} - \mu \vec{v}$ .

Com efeito, se  $\vec{v} \perp \vec{x} - \mu \vec{v}$ , temos que as quantidades  $\|\vec{x}\|$  e  $\|\mu \vec{v}\|$  podem ser interpretadas no caso bidimensional ( $n = 2$ ) como a hipotenusa e o cateto adjacente de um triângulo retângulo.

Das propriedades de produto escalar deduzidas anteriormente, obtemos a seguinte sequência de igual-

dades:

$$\begin{aligned}0 &= \vec{v} \bullet (\vec{x} - \mu \vec{v}) \\&= \vec{v} \bullet \vec{x} - \mu \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|^2 &= \|(\vec{x} - \mu \vec{v}) + \mu \vec{v}\|^2 \\&= \|\vec{x} - \mu \vec{v}\|^2 + 2\mu \vec{v} \bullet (\vec{x} - \mu \vec{v}) + \|\mu \vec{v}\|^2 \\&= \|\vec{x} - \mu \vec{v}\|^2 + \|\mu \vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

Ou seja:

- (i) Para  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , a constante  $\mu$  é unicamente determinada pelo rácio  $\mu = \frac{\vec{v} \bullet \vec{x}}{\|\vec{v}\|^2}$ .

Adicionalmente

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{x} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{x}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

- (ii) A relação  $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x} - \mu \vec{v}\|^2 + \|\mu \vec{v}\|^2$  dá-nos uma generalização para o *Teorema de Pitágoras*



em  $\mathbb{R}^n$ . Em particular, uma vez que a condição  $\|\mu \vec{v}\| \geq 0$  é sempre satisfeita, é possível estabelecer a seguinte desigualdade:

$$\|\vec{x}\| \geq \|\vec{x} - \mu \vec{v}\|.$$

Ou seja, para  $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$ , a quantidade  $\|\vec{x} - \mu \vec{v}\|$  dá-nos a menor das distâncias entre um ponto genérico  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$ , e um ponto genérico da reta  $\mathcal{R}$ , que passa pelo ponto  $P$ .

Em suma:  $d(Q, \mathcal{R}) = \|\overrightarrow{PQ} - \text{proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{PQ}\|$  corresponde à solução<sup>6</sup> para o **Problema 1.4.1**.

**Exemplo 1.4.1 (Eixos Coordenados)** Em  $\mathbb{R}^2$ , tem-se que os vetores  $\vec{i} = (1, 0)$  e  $\vec{j} = (0, 1)$  que geram os eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  satisfazem as seguintes propriedades:

$$1. \vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{i} = 0.$$

<sup>6</sup> Veja o **exercício 4** da **Seção 1.7 Exercícios**.

$$2. \operatorname{proj}_{\vec{i}} \vec{j} = \operatorname{proj}_{\vec{j}} \vec{i} = (0, 0).$$

$$3. \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1.$$

De modo análogo, podemos verificar via a definição de produto escalar e de norma que os vetores  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , que geram os eixos coordenados  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente, são vetores unitários, perpendiculares dois a dois:

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{j} \perp \vec{k} \quad \& \quad \vec{k} \perp \vec{i}.$$

**Exemplo 1.4.2** Para três vetores<sup>7</sup>  $\vec{x} = (1, 2, -5)$ ,  $\vec{y} = (4, 0, 1)$  e  $\vec{z} = (-2, 1, 0)$  de  $\mathbb{R}^3$ , obtemos

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 = -1.$$

$$\vec{x} \bullet \vec{z} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 = 0,$$

ou seja,  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  não são perpendiculares entre si, ao par que  $\vec{x}$  e  $\vec{z}$  já são. Por outro lado, a projeção ortogonal

<sup>7</sup> veja o **exercício 3** da Seção 1.7 **Exercícios**.

de  $\vec{x}$  sobre  $\vec{y}$  é dada por

$$\text{proj}_{\vec{y}} \vec{x} = \frac{-1}{4^2 + 0^2 + 1^2} (4, 0, 1) = \left(-\frac{4}{17}, 0, -\frac{1}{17}\right).$$

Usando novamente a definição de produto escalar, concluímos facilmente que  $\vec{y} \perp \vec{x} - \text{proj}_{\vec{y}} \vec{x}$ , uma vez que

$$\vec{y} \bullet (\vec{x} - \text{proj}_{\vec{y}} \vec{x}) = (4, 0, 1) \bullet \left(\frac{21}{17}, 2, -\frac{84}{17}\right) = 0.$$

## 1.5 Ângulos entre Vetores

Dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , é sempre possível definir um plano que contenha ambos os vetores. Este plano pode ser definido com base na seguinte representação paramétrica:

$$\Pi : X = O + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Para este plano podemos deduzir expressão analítica para cálculo do ângulo formado entre os  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,

com base na projeção ortogonal  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ . Para tal, comecemos por considerar a função real de variável real<sup>8</sup>  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\varphi(t) = \|\vec{u} - t\vec{v}\|^2.$$

Usando as propriedades de produto escalar, podemos reescrever<sup>9</sup>  $\varphi(t)$  como um polinômio de grau 2, da forma

$$\varphi(t) = at^2 + bt + c,$$

de constantes

$$a = \|\vec{v}\|^2, \quad b = 2\vec{u} \bullet \vec{v} \quad \& \quad c = \|\vec{u}\|^2.$$

Ora, das propriedades de norma de um vetor, resulta que  $\varphi(t) \geq 0$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , ou seja, o polinômio  $\varphi(t)$  intersesta, no máximo, uma vez o eixo  $Ot$ . Em termos do discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ , isto corresponde a afirmar que  $\Delta \leq 0$ , ou equivalentemente

<sup>8</sup> Veja o **exercício 4** da seção **1.7 Exercícios**.

<sup>9</sup> Veja o **exercício 1** da seção **1.7 Exercícios**.

que

$$(\vec{u} \bullet \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2,$$

Aplicando a função raiz a ambos os lados da desigualdade, concluímos ainda que a desigualdade anterior pode ser reescrita<sup>10</sup> na forma

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Esta desigualdade anterior é conhecida na literatura por *desigualdade de Cauchy-Schwartz*.

No caso de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  serem vetores não nulos temos que a desigualdade anterior é equivalente<sup>11</sup> a

$$-1 \leq \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1.$$

<sup>10</sup> Observe que  $a = \vec{u} \bullet \vec{v}$  é um número real, e que a igualdade  $\sqrt{a^2} = |a|$  é verdadeira para todo o  $a \in \mathbb{R}$ .

<sup>11</sup> Para chegarmos nesta desigualdade, primeiro dividimos ambos os membros da desigualdade por  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$  – obtivemos a inequação  $\frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1$ . Por fim, para  $a = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ , fez-se uso equivalência  $|a| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1$ .

Lembrando que  $\cos(\theta)$  pode ser determinado como o rácio entre a cateto adjacente e a hipotenusa de um triângulo retângulo, concluímos que o rácio

$$\frac{\|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

dá-nos o *menor dos ângulos* entre as retas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  que passam pela origem:

$$\mathcal{R} : X = O + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{S} : X = O + \mu \vec{v}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Esse ângulo está compreendido entre 0 (radianos) e  $\frac{\pi}{2}$  (radianos).

Em suma:

- (i) O ângulo  $\theta$  pode ser calculado a partir da relação

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

- (ii)  $\theta$  é um ângulo reto (i.e.  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) se e somente se  $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ .

Para este caso as retas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  são perpendiculares entre si.

- (iii)  $\theta$  é um ângulo agudo (i.e.  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ) se e somente se  $\vec{u} \bullet \vec{v} > 0$ . Para este caso as retas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  formam entre si um ângulo de  $\theta$  radianos. Adicionalmente

$$\cos(\theta) = \frac{\|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

- (iv)  $\theta$  é um ângulo obtuso (i.e.  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ ) se e somente se  $\vec{u} \bullet \vec{v} < 0$ .

Para este caso as retas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  formam entre si um ângulo de  $\pi - \theta$  radianos. Adicionalmente

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

## 1.6 Produto Vetorial e Produto Misto

Na seção **1.5 Ângulos entre Vetores** mostrámos que o ângulo entre dois vetores pode ser determinado a partir da fórmula

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Alternativamente, e atendendo a que  $\sin(\theta) \geq 0$ , para valores de  $\theta$  compreendidos entre 0 e  $\pi$ , obtemos<sup>12</sup> a seguinte igualdade

$$\sin(\theta) = \sqrt{1 - \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2}}.$$

Esta quantidade corresponde pode ser expressa em termos do rácio igualdades, envolvendo a projeção ortogonal

<sup>12</sup> Observe que para  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $\sin(\theta) \geq 0$ . Logo, com base na fórmula fundamental da trigonometria ( $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ ) resulta que  $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$ .



$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

Lembrando que  $\sin(\theta)$  pode ser determinado como o rácio entre entre cateto oposto e hipotenusa de um triângulo retângulo, podemos facilmente concluir que

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{\|\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - |\vec{u} \bullet \vec{v}|^2}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.\end{aligned}$$

Geometricamente, podemos definir o *produto vetorial* de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$ , como sendo um vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $\vec{u} \times \vec{v}$  é perpendicular aos vetores  $\vec{u}$  &  $\vec{v}$ .
- (ii)  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  dá-nos a área de um paralelogramo, de lados  $\|\vec{u}\|$  e  $\|\vec{v}\|$ .

Da primeira condição resulta que  $\vec{u} \times \vec{v}$  é perpendicular ao plano de equação

$$\Pi : X = O + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Dizemos assim que  $\vec{u} \times \vec{v}$  é o *vetor normal* ao plano  $\Pi$ .

Para fazermos uso da segunda condição, suponhamos que  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  dá-nos a área de um paralelogramo de base  $b = \|\vec{v}\|$  e altura  $h = \|\vec{u}\| \sin(\theta)$ . Desta interpretação resulta que a medida  $\|\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\|$  dá-nos a altura do paralelogramo. Em particular:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\|$$

Portanto a quantidade  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  pode ser determinada partir de uma das seguintes relações abaixo:

(i)

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\theta).$$

(ii)

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - |\vec{u} \bullet \vec{v}|^2}.$$

**Observação 1.6.1** *O mesmo tipo de construção geométrica poderia ter sido obtido se ao invés da projeção ortogonal  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ , tivéssemos considerado a projeção ortogonal*

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

*Para este caso, iríamos concluir com base na relação*

$$\sin(\theta) = \frac{\|\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

*que  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  corresponde à área de um paralelogramo de base  $b = \|\vec{u}\|$  e altura  $h = \|\vec{v}\| \sin(\theta)$ .*

Para o caso bidimensional ( $n = 2$ ) temos que para dois vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  que  $\vec{u} \times \vec{v}$  pode ser explicitamente calculado<sup>13</sup> por  $\vec{u} \times \vec{v} =$

<sup>13</sup> Veja o **exercício 9** da seção **1.7 Exercícios**.

$u_1 v_2 - u_2 v_1$ . Ou seja, em  $\mathbb{R}^2$  tanto o produto escalar como o produto vetorial são números reais.

Para o caso tridimensional ( $n = 3$ ), este pode ser explicitamente calculado a partir do determinante simbólico

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + \\ &\quad + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k},\end{aligned}$$

onde  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  correspondem aos vetores unitários, que definem os eixos coordenados  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respetivamente.

Desta última equação facilmente se conclui as seguintes propriedades:

**Proposição 1.6.1** *Para quaisquer três vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , e  $\vec{z}$  de  $\mathbb{R}^3$ , e um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , as seguintes propriedades são sempre satisfeitas:*

(i) *ANTI-COMUTATIVIDADE:*

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}.$$

(ii) *MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR:*

$$\lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = (\lambda \vec{x}) \times \vec{y}.$$

(iii) *CONDIÇÃO DE PARALELISMO:*

$$\vec{x} \times \vec{y} = (0, 0, 0)$$

se e somente se  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  são vetores paralelos.

(iv) *CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE:*

$$\vec{x} \bullet (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{y} \bullet (\vec{x} \times \vec{y}) = 0.$$

(v) *DISTRIBUTIVIDADE:*

$$\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}.$$

Em  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) podemos também definir, para um ponto genérico  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , o hiperplano  $\Pi_{n-1}$  de dimensão  $n - 1$ , que contém os pontos  $P$  e  $X$ , com base na equação normal

$$\overrightarrow{PX} \bullet \vec{w} = 0,$$

onde  $\vec{w}$  denota o vetor normal ao hiperplano  $\Pi_{n-1}$ .

No caso bidimensional ( $n = 2$ ), o hiperplano  $\Pi_1$ , definido em termos do ponto  $P = (x_0, y_0)$ , e do vetor normal  $\vec{w} = (a, b)$ , corresponde a uma reta, de equação<sup>14</sup>

$$\Pi_1 : a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

No caso tridimensional ( $n = 3$ ), o hiperplano definido em termos do ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , e do vetor normal  $\vec{w}$  é dado por  $\vec{u} \times \vec{v} = (a, b, c)$ , é dado pela equação

$$\Pi_2 : ax + by + cz + d = 0,$$

<sup>14</sup> Veja o **exercício 8** da seção **1.7 Exercícios**.

onde  $d = -ax_0 - by_0 - cy_0$ .

À semelhança do já foi feito para o produto vetorial no caso tridimensional, a quantidade  $\overrightarrow{PX} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$  – conhecida na literatura por *produto misto* – pode ser calculada a partir do determinante  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PX} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) &= \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - x_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(u_2 v_3 - v_3 u_2)(x - x_0)}_{=a} - \\ &\quad - \underbrace{(u_1 v_3 - v_3 u_1)(y - y_0)}_{=-b} + \\ &\quad + \underbrace{(u_1 v_2 - v_2 u_1)(z - z_0)}_{=c}. \end{aligned}$$

**Observação 1.6.2** De acordo com a definição de produto escalar, o produto misto entre os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e

$\overrightarrow{PX}$  de  $\mathbb{R}^3$  pode ser reescrito na forma

$$\overrightarrow{PX} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\overrightarrow{PX}\| \cos(\theta).$$

No caso de  $\overrightarrow{PX} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ , concluímos que os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\overrightarrow{PX}$  são coplanares<sup>15</sup>. No caso de  $\overrightarrow{PX} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) \neq 0$ , o módulo de  $\overrightarrow{PX} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$  corresponde ao volume de um paralelepípedo, de arestas  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  e  $\|\overrightarrow{PX}\|$ , cuja área da base é determinada pela norma  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ , ao par que a altura é determinada pela quantidade

$$h = \|\overrightarrow{PX}\| \cos(\theta).$$

Adicionalmente, o rácio

$$\frac{|\overrightarrow{PX} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

<sup>15</sup> Dizemos que um conjunto de vetores são coplanares no caso de estes estarem todos contidos no mesmo plano  $\Pi_2$ .



permite-nos determinar a distância  $d(X, \Pi_2)$  de um ponto genérico  $X$  de  $\mathbb{R}^3$  a um plano<sup>16</sup>  $\Pi_2$ .

**Exemplo 1.6.1** Para os vetores unitários  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  facilmente se verifica, pelo cálculo do determinante simbólico, que

$$(i) \quad \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}.$$

$$(ii) \quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}.$$

$$(iii) \quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.$$

Adicionalmente, das identidades

$$\vec{k} \bullet (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \bullet (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{j} \bullet (\vec{k} \times \vec{i}) = 1,$$

concluimos que os eixos coordenados  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  de  $\mathbb{R}^3$  formam um cubo de lado 1, uma vez que  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ .

<sup>16</sup> Plano é o conceito utilizado quando nos referimos a hiperplanos de dimensão 2.

**Exemplo 1.6.2** *O processo de determinar geometricamente um cubo de lado 1 pode ser pictoricamente ilustrado do seguinte modo:*

*Começemos por considerar uma rotação de  $\theta$  radianos no plano  $xy$  dos eixos  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , no sentido anti-horário. Esta rotação induz os vetores  $\vec{u}(\theta)$  e  $\vec{v}(\theta)$ , de coordenadas*

$$\vec{u}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \quad \& \quad \vec{v}(\theta) = \vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

*Destas últimas relações, facilmente se conclui que:*

(i)  $\vec{u}(\theta)$  e  $\vec{v}(\theta)$  são vetores unitários:

$$\|\vec{u}(\theta)\|^2 = \|\vec{v}(\theta)\|^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

(ii)  $\vec{u}(\theta)$  e  $\vec{v}(\theta)$  são perpendiculares entre si:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\theta) \bullet \vec{v}(\theta) &= \cos(\theta).(-\sin(\theta)) + \\ &+ \sin(\theta).\cos(\theta) + 0.0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Adicionalmente, com base nas propriedades de produto vetorial, concluímos que*

$$\|\vec{u}(\theta) \times \vec{v}(\theta)\| = \|\vec{u}(\theta)\| \|\vec{v}(\theta)\| = 1,$$

*ou seja, os vetores  $\vec{u}(\theta)$  e  $\vec{v}(\theta)$  definem um paralelogramo no plano  $xy$ , de lado 1.*

*Finalmente, calculando o produto misto dos vetores os vetores  $\vec{u}(\theta)$ ,  $\vec{v}(\theta)$  e  $\vec{k}$ , facilmente concluímos que as arestas  $\|\vec{u}(\theta)\|$ ,  $\|\vec{v}(\theta)\|$  e  $\|\vec{k}\|$  definem um cubo de lado 1.*

**Observação 1.6.3** *A conclusão obtida no Exemplo 1.6.2 poderia ter sido obtida diretamente<sup>17</sup> através do cálculo do determinante da matriz  $3 \times 3$ :*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>17</sup> Veja o **Exercício 10** da seção 1.7 **Exercícios**.

## 1.7 Exercícios

1. Para dois vetores genéricos  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  de  $\mathbb{R}^n$ , mostre as seguintes propriedades:

(a)  $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\vec{x} \bullet \vec{y}$ .

(b)  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \bullet \vec{y}$ .

(c)  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$

(d)  $\vec{x} \perp \vec{y}$  sse  $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ .

(e)  $\vec{x} \perp \vec{y}$  sse  $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} + \vec{y}\|$ .

(f)  $\vec{x} \perp \vec{y}$  sse  $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ .

2. Para um vetor  $\vec{u} = (a, b)$  não nulo de  $\mathbb{R}^2$ , mostre que existe um  $r \geq 0$ , e um  $0 \leq \theta \leq \pi$  tal que:

(a)  $\text{proj}_{\vec{i}} \vec{u} = (r \cos(\theta), 0)$  e

$$\text{proj}_{\vec{j}} \vec{u} = (0, r \sin(\theta)).$$

(b)  $\vec{u} - \text{proj}_{\vec{i}} \vec{u} = (-r \sin(\theta), r \cos(\theta))$  e

$$\vec{u} - \text{proj}_{\vec{j}} \vec{u} = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

(c) Estabeleça<sup>18</sup> uma relação entre os resultados demonstrados nos itens anteriores, e os resultados demonstrados nos itens (d), (e) e (f) do **exercício 1**. Interprete-os geometricamente.

3. Para os vetores  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$  do **Exemplo 1.4.2**:

(a) Calcule as quantidades  $\vec{y} \bullet \vec{z}$ ,  $\text{proj}_{\vec{y}} \vec{z}$  e  $\text{proj}_{\vec{z}} \vec{y}$ .

(b) Calcule a distância do ponto  $Q = O + \vec{y}$  à reta  $\mathcal{R}$  de equação

$$\mathcal{R} : (x_1, x_2, x_3) = t \vec{z}, t \in \mathbb{R}.$$

(c) Calcule a distância do ponto  $R = O + \vec{z}$  à reta  $\mathcal{S}$  de equação

$$\mathcal{S} : (x_1, x_2, x_3) = t \vec{y}, t \in \mathbb{R}.$$

<sup>18</sup> O **exercício 1** & o **exercício 2** correspondem a uma reformulação de um exercício gentilmente cedido pelo Professor Gil Bernardes, da Universidade de Coimbra (Portugal).

- (d) Calcule os ângulos formados pelos vetores  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ , e entre as retas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  dos itens anteriores.
  - (e) Calcule o produto vetorial  $\vec{y} \times \vec{z}$  e a equação do plano  $\Pi$  que contém os vetores  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ .
  - (f) Calcule o produto misto  $\vec{x} \bullet (\vec{y} \times \vec{z})$ , e o ângulo formado pelos vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{z} \times \vec{y}$ .
4. Para a função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida na **Seção 1.5 Ângulos entre Vetores**:

- (a) Calcule a primeira e a segunda derivada de  $\varphi$ .
- (b) Mostre que a função  $\varphi$  atinge o seu mínimo no ponto  $t = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ .
- (c) Estabeleça uma relação tangível entre o problema de minimização  $t =$

$\operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}} \phi(t)$ , resolvido no item anterior, e o **Problema 1.4.1** da **Seção 1.4** **Projeção Ortogonal**.

5. Averigue em cada item se os ângulos formados pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^4$  são agudos, retos ou obtusos.

(a)  $\vec{u} = (2, 1, -1, 2)$  e  $\vec{v} = (3, -1, -2, 1)$ .

(b)  $\vec{u} = (1, 2, 1, -1)$  e  $\vec{v} = (-2, 3, -5, -1)$ .

6. Determine  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  para os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dos itens (a) e (b) do exercício anterior.

7. Dado um vetor  $\vec{u} = (1, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ , determine o vetor  $\vec{v} = (a, b, c)$  tal que:

(a) O ângulo formado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é de  $\frac{\pi}{4}$  radianos.

(b) O ângulo formado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é de  $\frac{3\pi}{4}$  radianos.

- (c) O volume do paralelepípedo, de arestas  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  e  $\|(-1, \sqrt{3}, 0)\|$  é igual a 1.
8. Estabeleça a relação o hiperplano  $\Pi_1$ , de equação  $ax + by + c = 0$  e:
- (a) A reta secante ao gráfico de uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , que passa pelos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ .
- (b) A reta tangente ao gráfico de uma função [derivável]  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$ .
9. Para dois vetores genéricos  $\vec{u} = (a, b)$  e  $\vec{v} = (c, d)$  de  $\mathbb{R}^2$ :
- (a) Determine a relação entre  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  e o determinante da matriz  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .
- (b) Determine para que valores  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  se tem  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 1$ .



DICA: Use o **exercício 2**.

10. Para o produto misto  $\vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$  entre os vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ , mostre que o volume do paralelepípedo de arestas  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  e  $\|\vec{w}\|$  é igual a  $|\det M|$ , onde  $M$  denota a matriz

$$M = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

# Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível

*There are more things in heaven and earth, Horatio,  
than are dreamt of in your philosophy.*

*—em 'A Tragédia de Hamlet, Príncipe da Dinamarca'  
de William Shakespeare*

## 2.1 Função e Gráfico

Iniciaremos o estudo de funções de várias variáveis começando pela introdução dos conceitos de *função* e *gráfico*:

**Definição 2.1.1 (Função)** *Seja  $\Omega$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Uma função de  $n$  variáveis é uma correspondência que associa cada  $n$ -uplo  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  do conjunto  $\Omega$  único número real  $f(X) \in \mathbb{R}$ .*

O conjunto  $\Omega$  é o domínio de  $f$  e o seu contradomínio (ou conjunto imagem) é o conjunto de pontos

$$f(\Omega) := \{f(X) : X \in \Omega\}$$

**Exemplo 2.1.1** *Seja  $h(P)$  a altitude de um ponto  $P$  da superfície terrestre. Se considerarmos como coordenadas a latitude  $\theta$  e a longitude  $\varphi$  vem que  $P = (\theta, \varphi)$  e que  $h(P) = h(\theta, \varphi)$  é uma função de duas variáveis que toma valores reais.*

**Exemplo 2.1.2** *A temperatura  $T$ , num determinado ponto no espaço, de coordenadas  $(x, y, z)$  pode ser associada a uma função real de três variáveis, que a cada  $(x, y, z)$  associa o valor  $T = f(x, y, z)$ . Se adicionalmente quisermos medir a temperatura  $T$  no ponto de coordenadas  $(x, y, z)$ , num determinado instante  $t$ , teremos de definir  $f$  como uma função de quatro variáveis  $x, y, z$  e  $t$ , que a cada 4-tuplo  $(x, y, z, t)$  associamos um valor  $T = f(x, y, z, t)$ .*

O gráfico de uma função de várias variáveis pode assim ser definido, de modo análogo ao que já foi feito para função de uma só variável. Para tal, comecemos por observar que o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  pode ser

definido recursivamente como o *produto cartesiano* do conjunto  $W_1 = \mathbb{R}^n$  com o conjunto  $W_2 = \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{ (X, x_{n+1}) : X \in \mathbb{R}^n \text{ \& } x_{n+1} \in \mathbb{R} \}.$$

**Definição 2.1.2 (Gráfico de uma Função)** *Dada uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , o gráfico de  $f$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dado por:*

$$G_f = \{ (X, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : X \in \Omega \text{ \& } x_{n+1} = f(X) \}.$$

Usualmente, escrevemos  $x_{n+1} = f(X)$  para tornarmos explícito que o valor que  $f$  toma no ponto  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  corresponde a uma coordenada do eixo  $Ox_{n+1}$ .

### Exemplo 2.1.3 (Equação da Circunferência)

Em  $\mathbb{R}^2$ , considere a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$ . Note que  $y$  pode apenas ser escrito como uma função de  $x$  para valores de  $y \geq 0$  ou  $y \leq 0$ .

No primeiro caso, temos  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . No segundo caso temos  $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ . Em ambos os

casos, o valor de  $f$  corresponde a uma coordenada do eixo  $Oy$ .

No caso de pretendermos escrever  $x$  como uma função de  $y$ , teremos de usar o mesmo raciocínio que utilizámos no caso anterior. Para tal, teremos de considerar uma das seguintes restrições:  $x \geq 0$  ou  $x \leq 0$ .

Estas restrições conduzem naturalmente a funções definidas pontualmente pelas equações  $x = \sqrt{1 - y^2}$  ( $x \geq 0$ ) e  $x = -\sqrt{1 - y^2}$  ( $x \leq 0$ ), ou seja, o valor das funções obtidas pode ser representado como uma coordenada positiva/negativa do eixo  $Ox$ .

### Exemplo 2.1.4 (Equação do Plano)

Consideremos a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = -x - 2y + 1$ . O gráfico  $G_f \subseteq \mathbb{R}^3$  é dado por

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z - 1 = 0\}. \end{aligned}$$

Recordando as noções de geometria analítica introduzidas na seção 1.6 do **Capítulo 1**, vemos que  $G_f$

*representa a equação de um plano perpendicular ao vetor  $\vec{v} = (1, 2, 1)$  que intersesta os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  nos pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . A interseção de  $G_f$  com o planos  $xy$  ( $z = 0$ ),  $xz$  ( $y = 0$ ) &  $yz$  ( $x = 0$ ) corresponde às retas de equação  $x = 1 - 2y$ ,  $z = 1 - x$  e  $z = 1 - 2y$ , respetivamente.*

**Observação 2.1.1 (Gráficos de Planos)** *A representação gráfica de qualquer plano, de equação*

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0$$

*pode ser obtida, ou a partir de três pontos do plano – pontos esses que permitem determinar dois vetores diretores do plano– ou aternativamente, a partir a interseção de  $\Pi$  com dois dos eixos coordenados, tal como ilustrado no ficheiro GeoGebra*

***EquacaoPlano.ggb***

## 2.2 Gráficos de Superfícies Cilíndricas

Nesta seção iremos estudar o gráfico de *superfícies cilíndricas* (ou simplesmente cilindros). Estas superfícies podem ser representadas em  $\mathbb{R}^3$  como superfícies geradas por uma curva plana – denominada por *diretriz* – paralelamente a uma reta fixa – denominada por *geratriz*.

Por uma questão de simplicidade iremos apenas considerar as *diretrizes* situadas nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , e *geratriz* como sendo uma reta paralela aos eixos coordenados  $Oz$ ,  $Oy$  e  $Ox$ . Para estes casos, uma superfície cilíndrica é definida por uma equação onde figuram apenas duas das três coordenadas do plano  $xyz$ .

Em concreto, para um ponto  $P = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  e um plano  $\Pi$  definido em termos do vetor normal  $\vec{v}$ , definimos o eixo  $\mathcal{E}_{\vec{v}}$  de uma superfície cilíndrica com



base na *equação normal*<sup>1</sup>

$$\overrightarrow{PX} \bullet \vec{v} = 0.$$

Na notação acima  $X = (x, y, z)$  denota um ponto genérico de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v}$  um dos vetores diretores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , e  $\overrightarrow{PX}$  o vetor de coordenadas

$$\overrightarrow{PX} = (x - a, y - b, z - c).$$

Decorre naturalmente condição de perpendicularidade<sup>2</sup>

$$\overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{PX} - \text{proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{PX}$$

que os vetores  $\overrightarrow{PX} - \text{proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{PX}$  e  $\vec{v}$  são paralelos entre si, e por conseguinte o eixo  $\mathcal{E}_{\vec{v}}$  pode ser repre-

<sup>1</sup> Reveja a seção **1.5 Ângulos e Vetores** do Capítulo **1 Vetores e a Geometria do Espaço**  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup> Reveja a construção de projeção ortogonal obtida na seção **1.4 Projeção Ortogonal** do Capítulo **1 Vetores e a Geometria do Espaço**  $\mathbb{R}^n$ .

sentado em termos da equação paramétrica

$$\mathcal{E}_{\vec{v}} : \overrightarrow{PX} - \text{proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{PX} = \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Iremos de seguida classificar as famílias de superfícies cilíndricas, geradas a partir de uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Estes casos podem ser catalogados do seguinte modo:

(i) **Plano  $xy$  e eixo  $\mathcal{E}_{\vec{k}}$ :**

A equação  $f(x-a, y-b) = 0$ , ou  $y-b = g(x-a)$  na forma explícita, representa uma *superfície cilíndrica* com *reta geratriz* paralela ao eixo  $Oz$ , e *diretriz*

$$\gamma_{xy} : f(x-a, y-b) = 0 \text{ e } z = 0.$$

Para este caso escolhemos  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  como vetor diretor da *reta geratriz*. Em particular,

$$\mathcal{E}_{\vec{k}} : (x, y, z) = (a, b, 0) + \lambda \vec{k}, \lambda \in \mathbb{R}$$

corresponde ao eixo da *superfície cilíndrica*<sup>3</sup>, de equação

$$\mathcal{S} : f(x - a, y - b) = 0.$$

(ii) **Plano  $xz$  e eixo  $\vec{\mathcal{E}}_j$ :**

A equação  $f(x - a, z - c) = 0$ , ou  $z - c = g(x - a)$  na forma explícita, representa uma *superfície cilíndrica* com *reta geratriz* paralela ao eixo  $Oy$ , e *diretriz*

$$\gamma_{xz} : f(x - a, z - c) = 0 \text{ e } y = 0.$$

Para este caso, escolhemos  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  como vetor diretor da *reta geratriz*. Em particular,

$$\vec{\mathcal{E}}_j : (x, y, z) = (a, 0, c) + \lambda \vec{j}, \lambda \in \mathbb{R}$$

<sup>3</sup> ou  $\mathcal{S} : y - b = g(x - a)$  para o caso de  $f(x - a, y - b) = y - b - g(x - a)$ .

corresponde ao eixo da *superfície cilíndrica*<sup>4</sup>, de equação

$$\mathcal{S} : f(x - a, z - c) = 0.$$

(iii) **Plano  $yz$  e eixo  $\mathcal{E}_{\vec{i}}$ :**

A equação  $f(y - b, z - c) = 0$ , ou  $z - c = g(y - b)$  na forma explícita, representa uma *superfície cilíndrica* com *reta geratriz* paralela ao eixo  $Ox$ , e *diretriz*

$$\gamma_{yz} : f(y - b, z - c) = 0 \text{ e } x = 0.$$

Para este caso escolhemos  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  como vetor diretor da *reta geratriz*. Em particular,

$$\mathcal{E}_{\vec{i}} : (x, y, z) = (0, b, c) + \lambda \vec{i}, \lambda \in \mathbb{R}$$

<sup>4</sup> ou  $\mathcal{S} : z - c = g(x - a)$  para o caso de  $f(x - a, z - c) = z - c - g(x - a)$ .

é o eixo da *superfície cilíndrica*<sup>5</sup>, de equação

$$\mathcal{S} : f(y - b, z - c) = 0.$$

### Exemplo 2.2.1 (Cilindros vs. Circunferências)

Para um ponto  $P = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$ , e para a constante  $r > 0$ , as retas diretrizes

$$\gamma_{xy} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad e \quad z = 0$$

$$\gamma_{yz} : (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad e \quad x = 0$$

$$\gamma_{xz} : (x - a)^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad e \quad y = 0$$

correspondem a representações da equação da circunferência de raio  $r$  nos planos  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$  respetivamente.

Estas induzem cilindros em torno dos eixos  $\mathcal{E}_{\vec{k}}$ ,  $\mathcal{E}_{\vec{i}}$  e  $\mathcal{E}_{\vec{j}}$ , respetivamente. Este resultado pode ser visualizado, a partir do Ficheiro GeoGebra

**CilindrosElípticos.ggb.**

<sup>5</sup> ou  $\mathcal{S} : z - c = g(y - b)$  para o caso de  $f(x - a, z - c) = z - c - g(y - b)$ .

**Exemplo 2.2.2 (Cilindros vs. Cônicas)** *As superfícies cônicas (elipses, parábolas e hipérboles) também nos permitem definir superfícies cilíndricas dos seguintes tipos:*

- (i) *CILINDROS ELÍPTICOS: Se a interseção de  $S$  com um dos eixos coordenados (diretriz) nos dá a equação de uma elipse.*
- (ii) *CILINDROS PARABÔLICOS: Se a interseção de  $S$  com um dos eixos coordenados (diretriz) nos dá a equação de uma parábola.*
- (iii) *CILINDROS HIPERBÔLICOS: Se a interseção de  $S$  com um dos eixos coordenados (diretriz) nos dá a equação de uma hipérbole.*

No ficheiro GeoGebra

***CilindrosElípticos2.ggb***

*poderá encontrar exemplos de CILINDROS ELÍPTICOS, cujas diretrizes são os próprios eixos coordenados  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ .*

*No ficheiro GeoGebra*

### ***CilindrosParabolicos.ggb***

*poderá visualizar o gráfico de dois CILINDROS PARABÓLICOS, gerado a partir das parábolas, de equação*

$$x - a = (y - b)^2 \quad \& \quad z - c = (y - b)^2.$$

*Finalmente, no ficheiro GeoGebra*

### ***CilindrosHiperbolicos.ggb***

*poderá encontrar um gráfico de um CILINDRO HIPERBÓLICO, gerado a partir da hipérbole de equação*

$$(x - a)^2 - (y - b)^2 = r^2.$$

**Exemplo 2.2.3 (Funções Trigonométricas)**

Considere as seguintes diretrizes<sup>6</sup> no plano  $xy$  :

$$\gamma_{xy} : y - b = \cos(x - a), \text{ e } z = 0$$

$$\Gamma_{xy} : x - a = \cos(y - b), \text{ e } z = 0$$

No primeiro caso, a geratriz  $\gamma_{xy}$  é induzida pelo gráfico da função  $g(x) = b + \cos(x - a)$ , enquanto que a geratriz  $\Gamma_{xy}$  é induzida pelo gráfico da função  $h(y) = a + \cos(y - b)$ . Em ambos os casos, as geratrizes são obtida por translações horizontais e verticais da função cosseno no plano  $xy$ .

Para o caso de termos  $a \leq x \leq a + \pi$ , tem-se que  $\Gamma_{xy}$  dá-nos o gráfico da inversa de  $g$ , no plano  $xy$ .

Pese embora o fato de o conjunto

$$\{(\cos(x - a) + b, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

<sup>6</sup> Para representar  $\gamma_{xy}$  e  $\Gamma_{xy}$  em GeoGebra, foi utilizado o comando `CurvaImplícita[ <f(x, y)> ]`.



não definir, em geral, o gráfico de uma função no plano  $xy$ , podemos obter o gráfico da superfície cilíndrica associada a  $\Gamma_{xy}$ , fazendo uma permuta entre a primeira e a segunda coordenada do ponto  $P = (a, b, 0)$ , na equação da reta diretriz (eixo da superfície cilíndrica  $\mathcal{E}_{\vec{k}}$ ).

Ou seja,

$$\mathcal{F}_{\vec{k}} : (x, y, z) = (b, a, 0) + \lambda \vec{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

corresponde ao eixo da superfície cilíndrica, de equação

$$T : x - a = \cos(y - b).$$

Este fato encontra-se ilustrado no ficheiro GeoGebra

### **CilindrosCos.ggb**

Analogamente, podemos usar o mesmo raciocínio para encontrar o eixo de uma superfície cilíndrica, de equação

$$T : x - a = g(y - b),$$

a partir do eixo da superfície cilíndrica

$$S : y - b = g(x - a),$$

como foi ilustrado em

**CilindrosSin.ggb**

para a função seno.

**Observação 2.2.1** Ao contrário do **Exemplo 2.2.1**, e do **Exemplo 2.2.2**, em que foi possível representar computacionalmente o gráfico das superfícies cônicas, o recurso a softwares computacionais não nos permite, em geral, representar graficamente o gráfico de tais superfícies, embora no caso particular do **Exemplo 2.2.3** pudéssemos desejar manualmente o gráfico das superfícies cilíndricas, 'deslocando' continuamente o gráfico das diretrizes  $\gamma_{xy}$  e  $\Gamma_{xy}$ , perpendicularmente aos eixos  $\mathcal{E}_{\vec{k}}$  e  $\mathcal{F}_{\vec{k}}$ , respetivamente.

Para contornar esta limitação, iremos abordar mais à frente, na seção **2.4 Conjuntos de Nível**, uma forma

*alternativa de representar alguns dos valores do gráfico de uma função, de duas ou três variáveis.*

## 2.3 Gráficos de Superfícies de Revolução

Uma *superfície de revolução* corresponde essencialmente a uma superfície obtida pela rotação da *geratriz* em torno do *eixo de rotação*  $Ot$ , denominado por *eixo de revolução*.

A equação da *superfície de revolução*  $\mathcal{S}$  é definida para funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ), com base na equação

$$\mathcal{S} : f(r, t - c) = 0$$

nas variáveis  $r$  e  $t$ , onde  $r$  é, a menos de um sinal ( $\pm$ ), a distância Euclidiana  $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{u^2 + v^2}$  entre o ponto<sup>7</sup>  $O = (0, 0)$  e um ponto genérico de  $\mathbb{R}^2$ , de coordenadas  $P = (u, v)$ .

<sup>7</sup> Origem do referencial cartesiano, de eixos  $Ou$  e  $Ov$ .

Em  $\mathbb{R}^3$  os eixos de revolução correspondem aos eixos coordenados  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , gerados pelos vetores diretores  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , respetivamente. Por seu turno, uma vez que os planos coordenados  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  admitem  $\vec{k}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{i}$ , respetivamente, como vetores normais resulta que:

- (i)  $Oz$  é perpendicular ao plano  $xy$ .
- (ii)  $Oy$  é perpendicular ao plano  $xz$ .
- (iii)  $Ox$  é perpendicular ao plano  $yz$ .

Daqui resulta que:

- (i) As equações da forma  $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z - c) = 0$  definem *superfícies de revolução* em torno de  $Oz$ .

Em particular,  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 = g(z - c)^2$  para o caso da geratriz ser dada por uma das seguintes equações:

$$x = g(z - c) \text{ ou } y = g(z - c).$$

- (ii) As equações da forma  $f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y - c) = 0$  definem *superfícies de revolução* em torno de  $Oy$ .

Em particular,  $\mathcal{S} : x^2 + z^2 = g(y - c)^2$  para o caso da geratriz ser dada por uma das seguintes equações:

$$x = g(y - c) \text{ ou } z = g(y - c).$$

- (iii) As equações da forma  $f(\pm\sqrt{y^2 + z^2}, x - c) = 0$  definem *superfícies de revolução* em torno de  $Ox$ .

Em particular,  $\mathcal{S} : y^2 + z^2 = g(x - c)^2$  para o caso da geratriz ser dada por uma das seguintes equações:

$$y = g(x - c) \text{ ou } z = g(x - c).$$

**Exemplo 2.3.1 (Parabolóide Elíptico)** O gráfico da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida pontualmente por

$$f(x, y) = a(x^2 + y^2) + c$$

representa um parabolóide elíptico.

Note que a interseção de

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = a(x^2 + y^2) + c\}$$

com os eixos  $xz$  e  $yz$  correspondem às parábolas de equação  $z = ay^2 + c$  e  $z = ax^2 + c$ , respetivamente.

Note ainda que o mínimo [global] de função  $f$  é atingido no plano de equação  $z = c$  para o caso de  $a > 0$ . Para o caso de  $a < 0$ , temos que máximo [global] de função  $f$  é atingido no plano de equação  $z = c$ .

No ficheiro

***Paraboloides.ggb***

pode encontrar representações de  $G_f$ , para diferentes valores de  $a$  e  $c$ .

**Observação 2.3.1** *O problema de encontrar uma geratriz a partir de uma superfície de revolução  $S$  consiste essencialmente em zerar uma das variáveis  $u$  e  $v$  do termo quadrático  $r^2 = u^2 + v^2$ .*

### **Exemplo 2.3.2 (Cone de Revolução)**

Consideremos a função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definida pontualmente por  $f(x, y) = 2 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$ , de domínio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 121\}.$$

Neste caso tanto o domínio  $\Omega$  como os valores de  $f(x, y)$  são apenas especificados em termos da distância de  $(x, y)$  à origem  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . De fato, os conjuntos

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega \text{ \& } z = f(x, y)\}$$

e

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y)\| \leq 11 \text{ \& } z = 2 - 3\|(x, y)\|\}$$

são iguais.

Se considerarmos agora o semi-plano<sup>8</sup>  $(r, z)$ ,  $r \geq 0$ , temos que  $z = 2 - 3r$  ( $0 \leq r \leq 11$ ) dá-nos no plano  $rz$  um segmento de reta definido pelos pontos  $(0, 2)$  (para  $r = 0$ ) e  $(11, -31)$  (para  $r = 11$ ).

Podemos então concluir que  $G_f$  é uma superfície de revolução que se obtém rodado p.e. o segmento de reta  $z = 2 - 3x$ ,  $0 \leq x \leq 11$ , em torno do eixo  $Oz$ .

Como resultado obtemos uma superfície cônica, de vértice  $(0, 0, 2)$ , que pode ser visualido a partir do ficheiro GeoGebra

### ***ConeRevolucão.ggb***

**Observação 2.3.2 (Cone de Revolução)** A superfície de revolução associada ao exemplo anterior, corresponde à parte inferior de um cone elíptico.

<sup>8</sup> Note que  $r = \|(x, y)\| \geq 0$ .



*Este tipo de superfície quádrlica pode ser definido a partir de uma das seguintes equações:*

$$(z - c)^2 = d(x^2 + y^2),$$

$$(y - c)^2 = d(x^2 + z^2),$$

$$(x - c)^2 = d(y^2 + z^2),$$

*onde  $d > 0$ .*

*Reciprocamente, para determinar a representação gráfica dos cones elípticos ilustrados no ficheiro GeoGebra*

### ***ConesElípticos.ggb***

*terá de considerar uma das seguintes equações para a reta geratriz:*

(a) *SUPERFÍCIE EM TORNO DO EIXO  $Ox \perp yz$*

(i) **Para valores de  $x \geq c$  :** Geratriz de equação  
 $y = d|x - c|.$

(ii) **Para valores de  $x < c$  :** Geratriz de equação  
 $y = -d|x - c|.$

(b) *SUPERFÍCIE EM TORNO DO EIXO  $Oy \perp xz$*

(i) **Para valores de  $y \geq c$  :** Geratriz de equação  
 $z = d|y - c|.$

(ii) **Para valores de  $y < c$  :** Geratriz de equação  
 $z = -d|y - c|.$

(c) *SUPERFÍCIE EM TORNO DO EIXO  $Oz \perp xy$*

(i) **Para valores de  $z \geq c$  :** Geratriz de equação  
 $x = d|z - c|.$

(ii) **Para valores de  $z < c$  :** Geratriz de equação  
 $x = -d|z - c|.$

## 2.4 Conjuntos de Nível

Como alternativa ao gráfico, podemos recorrer aos chamados *conjuntos de nível* da função para visualizar o seu comportamento. Tais conjuntos correspondem os pontos do domínio onde o valor de uma função é igual a uma constante.

**Definição 2.4.1** *Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $k$  uma constante real pertencente a  $f(\Omega)$  – contradomínio (ou conjunto imagem) de  $f$ . O conjunto de nível associado a  $k$  é dado por*

$$\mathcal{C}_k = \{X \in \Omega : f(X) = k\}.$$

**Observação 2.4.1** *Convém realçar que, ao contrário do gráfico de  $f$ , os conjuntos de nível são pontos de  $\mathbb{R}^n$ , que formam um subconjunto de  $\Omega$ .*

*Em concreto,  $\mathcal{C}_k \subseteq \Omega$  corresponde à interseção do*

gráfico de  $f$  (conjunto  $G_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ )<sup>9</sup> com o hiperplano

$$\Pi = \{(X, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \kappa\}.$$

**Exemplo 2.4.1** Para a função  $f(x, y) = -x - 2y + 1$  do **Exemplo 2.1.4**, os conjuntos de nível de  $f$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\kappa &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x - 2y + 1 = \kappa \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1 - \kappa}{2} \right\}, \end{aligned}$$

Por outras palavras, para cada  $\kappa \in \mathbb{R}$  o conjunto de nível  $\mathcal{C}_\kappa$  corresponde ao gráfico da reta, de declive  $-\frac{1}{2}$ , e ordenada na origem igual a  $\frac{1-\kappa}{2}$ .

Ao esboçarmos alguns dos conjuntos de níveis para alguns valores de  $\kappa \in \mathbb{R}$  (por exemplo, para  $\kappa =$

<sup>9</sup> Reveja a definição de  $G_f$  no início da seção **2.1 Função e Gráfico**.

$-2, -1, 0, 1, 2$ ), podemos facilmente perceber que  $C_\kappa$  gera uma família de retas paralelas<sup>10</sup> entre si.

**Exemplo 2.4.2** A função  $f(x, y) = 1 - 2x^2 - 2y^2$  define no plano  $xyz$  um parabolóide elíptico (veja **Exemplo 2.3.1**).

Os conjuntos de nível associados  $f$  correspondem a

$$\begin{aligned} C_\kappa &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2x^2 - 2y^2 = \kappa \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1 - \kappa}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Note-se que para valores de  $\kappa > 1$ , o conjunto  $C_\kappa$  é vazio, e que para  $\kappa = 1$ , o conjunto  $C_1$  coincide com o conjunto singular<sup>11</sup>  $\{(0, 0)\}$ .

<sup>10</sup> Retas com o mesmo declive são obviamente retas paralelas entre si. De fato, todas as retas de equação  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1-\kappa}{2}$  são determinadas a partir do vetor normal  $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . Para tentar entender esta observação, resolva em paralelo o **exercício 8**, da seção 1.7 **Exercícios (Capítulo 1)** para o caso em que  $f(x) = ax + b$ .

<sup>11</sup> Dizemos que um conjunto é singular se este tem apenas um único elemento.

No caso de  $\kappa < 1$ , podemos descrever geometricamente os conjuntos  $C_\kappa$  como circunferências concêntricas de centro  $(0, 0)$ , e raio  $r = \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}}$ .

No ficheiro GeoGebra

### ***CircunferenciasConcentricas.ggb***

pode encontrar uma representação pictórica do conceito de circunferências concêntricas.

**Exemplo 2.4.3** Considere a função  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 + 2x - 2y$$

Note que no plano  $xy$  a equação anterior define uma

cônica. Com base nas identidades binomiais<sup>12</sup>

$$t^2 + 2ct = (t + c)^2 - c^2$$

$$\begin{aligned} at^2 + bt &= a \left( t^2 + \frac{b}{a}t \right) \\ &= a \left( t + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} \\ &\quad \left[ \text{substituição } c = \frac{b}{2a} \text{ na eq. anterior} \right]. \end{aligned}$$

podemos reescrever<sup>13</sup> a função  $g$  na seguinte forma:

$$g(x, y, z) = 1 - 2 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left( y + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Ou seja,  $g(x, y, z) = f \left( x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2} \right)$ , onde  $f$  é a função do **Exemplo 2.4.2**. Desta última relação podemos

<sup>12</sup>  $a \neq 0$  em  $at^2 + bt$ .

<sup>13</sup> A fórmula de Bhaskara  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ( $b^2 \geq 4ac$ ) é uma consequência da identidade  $at^2 + bt + c = a \left( t + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  ( $a \neq 0$ ).

*concluir que, para diferentes valores de  $\kappa$ , a equação*

$$g(x, y, z) - \kappa = 0$$

*define uma família de superfícies cilíndricas<sup>14</sup>. Adicionalmente, para valores de  $\kappa < 1$ , o conjunto de nível*

$$\begin{aligned} C_{\kappa} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = \kappa \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 - \kappa}{2} \right\} \end{aligned}$$

*define uma família de cilindros concêntricos em torno do eixo*

$$\mathcal{E}_{\vec{k}} : (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) + \lambda \vec{k}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

*No ficheiro GeoGebra*

***CilindrosConcentricos.ggb***

<sup>14</sup> Reveja o **Exemplo 2.2.1** da seção 62 **Gráficos de Superfícies Cilíndricas**



*pode encontrar uma representação pictórica do conceito de cilindros concêntricos.*

*Por uma questão de simplicidade na visualização<sup>15</sup>, considerámos valores inteiros de  $\frac{1-\kappa}{2}$ , compreendidos entre 1 e 10, e cilindros definidos pela equação*

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-\kappa}{2}.$$

**Exemplo 2.4.4** *Para a função  $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  de domínio*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 121\}$$

*temos que*

$$\begin{aligned} C_{\kappa} &= \{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = \kappa\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - \kappa \\ &\& \quad 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 11\}. \end{aligned}$$

<sup>15</sup> Por defeito, o Geogebra representa equações da forma  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  como circunferências no plano  $xy$ , e não como cilindros.

*Daqui se conclui que no caso de  $\kappa < -9$  ou  $\kappa > 2$ ,  $C_\kappa = \emptyset$ , e que para  $\kappa = 2$  temos  $C_2 = \{(0, 0)\}$ .*

*Para o caso de  $-9 \leq \kappa < 2$ , obtemos uma família de circunferências concêntricas, de centro  $(0, 0)$ .*

## 2.5 Domínios

Conhecer o domínio de função é de importância fundamental para representar o seu gráfico, e determinar os respetivos *conjuntos de nível*, abordados na seção

**2.4.** Seguem alguns resultados que nos permitem simplificar o nosso estudo:

- (i) SOMA/SUBTRAÇÃO DE FUNÇÕES: Se  $\Omega_f \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^n$  são os domínios das funções  $f$  e  $g$ , respetivamente, então o domínio de  $f + g$  e de  $f - g$  é dado pelo conjunto

$$\Omega_f \cap \Omega_g.$$

- (ii) MULTIPLICAÇÃO DE FUNÇÕES: Se  $\Omega_f \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^n$  são os domínios das funções  $f$  e  $g$ , respetivamente, então o domínio de  $fg$ , é dado pelo conjunto

$$\Omega_f \cap \Omega_g.$$

- (iii) DIVISÃO DE FUNÇÕES: Se  $\Omega_f \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^n$  são os domínios das funções  $f$  e  $g$ , respetivamente, então o domínio de  $\frac{f}{g}$ , é dado pelo conjunto<sup>16</sup>

$$(\Omega_f \cap \Omega_g) \setminus \{X \in \Omega_g : g(X) = 0\}.$$

<sup>16</sup> Isto é, temos de excluir os pontos  $X$  do domínio de  $g$ , para os quais  $g(X)$  dá zero.

## (iv) COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES:

Por outro lado, conhecer o domínio da composição de uma *função real de variável real*  $h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_h \subseteq \mathbb{R}$ ) por uma função  $g : \Omega_g \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^n$ ) permite-nos estudar domínios e contradomínios de funções de várias variáveis, a partir de resultados e caracterizações que teve oportunidade de estudar nos cursos de *Bases Matemáticas* (BM) e *Funções de Uma Variável* (FUV) e, por conseguinte, resolver grande parte dos exercícios da seção **2.6 Exercícios**.

Em concreto, o domínio da *função composta*  $f = hog$  é dado pelo conjunto

$$\Omega_f = \{X \in \mathbb{R}^n : X \in \Omega_g \text{ e } g(X) \in \Omega_h\}.$$

Na tabela seguinte vamos exemplificar o cálculo do domínio de  $(hog)(X) := h(g(X))$  para casos em que  $h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_h \subseteq \mathbb{R}$ ) é uma função conhecida.

$h(t)$	$(hog)(X)$	Cálculo $\Omega_{hog}$
$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{g(X)}$	$g(X) \neq 0$ e $X \in \Omega_g$
$ t $	$ g(X) $	$X \in \Omega_g$
$\sqrt{t}$	$\sqrt{g(X)}$	$g(X) \geq 0$ e $X \in \Omega_g$
$\sqrt[3]{t}$	$\sqrt[3]{g(X)}$	$X \in \Omega_g$
$\sqrt[2n]{t}$	$\sqrt[2n]{g(X)}$	$g(X) \geq 0$ e $X \in \Omega_g$
$\sqrt[2n+1]{t}$	$\sqrt[2n+1]{g(X)}$	$X \in \Omega_g$
$a^t$	$a^{g(X)}$	$X \in \Omega_g$
$\log_a(t)$	$\log_a(g(X))$	$g(X) > 0$ e $X \in \Omega_g$
$\sin(t)$	$\sin(g(X))$	$X \in \Omega_g$
$\cos(t)$	$\cos(g(X))$	$X \in \Omega_g$
$\tan(t)$	$\tan(g(X))$	$\cos(g(X)) \neq 0$ e $X \in \Omega_g$
$\cot(t)$	$\cot(g(X))$	$\sin(g(X)) \neq 0$ e $X \in \Omega_g$
$\sec(t)$	$\sec(g(X))$	$\cos(g(X)) \neq 0$ e $X \in \Omega_g$
$\operatorname{cosec}(t)$	$\operatorname{cosec}(g(X))$	$\sin(g(X)) \neq 0$ e $X \in \Omega_g$
$\arcsin(t)$	$\arcsin(g(X))$	$-1 \leq g(X) \leq 1$ e $X \in \Omega_g$
$\arccos(t)$	$\arccos(g(X))$	$-1 \leq g(X) \leq 1$ e $X \in \Omega_g$
$\arctan(t)$	$\arctan(g(X))$	$X \in \Omega_g$
$\operatorname{arccot}(t)$	$\operatorname{arccot}(g(X))$	$X \in \Omega_g$

## 2.6 Exercícios

Os primeiros oito (o8) exercícios que se seguem foram retirados da **Lista 1 de FVV (2015)**, do Prof. Maurício Richartz. Dicas para a resolução de cada exercício podem ser consultadas, clicando em **lista1dicas.pdf**. Os restantes (**exercício 9. em diante**) correspondem a adaptações de exercícios gentilmente cedidos pelo Prof. Gil Bernardes, da Universidade de Coimbra.

### EXERCÍCIOS PROF. MAURÍCIO RICHARTZ

1. Identifique e esboce as curvas abaixo no plano  $xy$ .

(a)  $9x^2 - 6x + 4y^2 + 2 = 0$

(b)  $y + 2x^2 + 4x + 3 = 0$ ,

(c)  $3x + 2y - 4 = 0$ ,

(d)  $x = -\sqrt{1 - y^2}$

(e)  $y = \sqrt{4 - 4x^2}$ ,

$$(f) \quad 16x^2 - 9y^2 = -144,$$

$$(g) \quad 2x^2 + 3y^2 = 6,$$

$$(h) \quad y^2 + 3y + x + 7 = 0,$$

$$(i) \quad 4x^2 + 4y^2 + 4y = 0,$$

$$(j) \quad -2x^2 + 4y^2 + 4y = 0,$$

2. Identifique e esboce as superfícies abaixo.

$$(a) \quad x^2 + z^2 = 5,$$

$$(b) \quad 25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100,$$

$$(c) \quad 25x^2 + 4y^2 + z^2 - 2z = 99,$$

$$(d) \quad z = 1 - y^2$$

$$(e) \quad x = y^2 + 4z^2,$$

$$(f) \quad x^2 = y^2 + 4z^2,$$

$$(g) \quad x = y^2 - z^2,$$

$$(h) \quad -x^2 + 4y^2 - z^2 = 4,$$

$$(i) \quad 9x^2 - y^2 + z^2 = 0,$$

$$(j) \quad 4x^2 + 9y^2 + z = 0,$$

$$(k) \quad 4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16,$$

$$(l) \quad z = x + y + 1,$$

$$(m) \quad z = \operatorname{sen} y,$$

$$(n) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(o) \quad x = \sqrt{1 - z^2 - y^2},$$

$$(p) \quad x + y = 1.$$

3. Esboce o gráfico e as curvas de nível das seguintes funções:

$$(a) \quad f(x, y) = 3.$$

$$(b) \quad f(x, y) = 1 - x - y.$$

$$(c) \quad f(x, y) = \cos(x).$$

$$(d) \quad f(x, y) = 1 - x^2.$$

$$(e) \quad f(x, y) = 3 - x^2 - y^2.$$

$$(f) \quad f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1.$$



$$(g) \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{16}}.$$

$$(h) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$(i) \quad f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2}.$$

4. Esboce as superfícies de nível das seguintes funções para os valores de  $k$  indicados (i.e. esboce o gráfico de  $f(x, y, z) = k$ ):

$$(a) \quad f(x, y, z) = x \quad [k = 0, \pm 1]$$

$$(b) \quad f(x, y, z) = x + y + z \quad [k = 0, \pm 2]$$

$$(c) \quad f(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{9} \quad [k = 0, 1, 4]$$

$$(d) \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad [k = 0, 1, 4]$$

$$(e) \quad f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 \quad [k = 0, \pm 1]$$

5. Determine o domínio das funções abaixo e esboce a região do plano/espço correspondente:

$$(a) \quad f(x, y) = \ln(x + 2y - 2),$$

$$(b) \quad f(x, y) = \ln\left(\sqrt{3x^2 + 2y^2 - 6}\right),$$

$$(c) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x}},$$

$$(d) \quad f(x, y) = \frac{e^{y-x^2}}{\sqrt{4x-y}},$$

$$(e) \quad f(x, y) = \sqrt{(1-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)},$$

$$(f) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt[4]{4x^2+4y^2-z^2}},$$

$$(g) \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 - 1},$$

6. Determine (i) o domínio (esboce a região correspondente) e (ii) a imagem das das funções abaixo. (iii) Esboce as curvas de nível  $C_k$  da função para os valores  $k$  indicados (i.e. esboce o gráfico de  $f(x, y) = k$ ).

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 - y^2 \quad [k = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0]$$

$$(b) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \quad \left[ k = 100, 10, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right]$$

$$(c) \quad f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4y \quad [k = -1, 0, 4, 16]$$

$$(d) \quad f(x, y) = \cos(x+y) \quad \left[ k = -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$$

$$(e) \quad f(x, y) = y^2 - x \quad [k = 0, \pm 1, \pm 2]$$

$$(f) \quad f(x, y) = e^{y^2 - x} \quad [k = 1, e^{\pm 1}, e^{\pm 2}]$$

$$(g) \quad f(x, y) = e^{xy} \quad [k = 1, e^{\pm 1}, e^{\pm 2}]$$

## 7. APLICAÇÕES EM FÍSICA

- (a) Uma camada fina de metal, localizada no plano  $xy$ , tem temperatura  $T(x, y)$  no ponto  $(x, y)$ . As curvas de nível de  $T$  são chamadas de isotérmicas porque todos os pontos em uma isotérmica tem a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função da temperatura (em  $^{\circ}\text{C}$ ) for dada por  $T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$ .
- (b) Se  $V(x, y)$  é o potencial elétrico de um ponto  $(x, y)$  do plano  $xy$ , as curvas de nível de  $V$  são chamadas curvas equipotenciais, porque nelas todos os pontos tem

o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de  $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ , onde  $c$  é uma constante positiva.

8. Nos itens abaixo é necessário utilizar algum site ou programa de manipulação matemática para fazer o esboço dos gráficos das funções de duas variáveis.

(a) Esboce o gráfico das funções  $g(x) = x$ ,  $g(x) = e^x$ ,  $g(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \operatorname{sen} x$ ,  $g(x) = 1/x$ . Em seguida, a partir de cada função  $g(x)$ , construa a função  $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$  e esboce seu gráfico no site/programa. Por exemplo, para  $g(x) = \ln x$  teremos  $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Observe as características comuns aos gráficos das funções  $f(x, y)$ . Você consegue detectar alguma simetria presente em todos os gráficos de  $f(x, y)$ ? A partir de duas

observações, conjecture como se faz para obter o gráfico de  $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$  a partir do gráfico de uma função qualquer  $g(x)$ .

- (b) As funções  $f(x, y) = xy^2 - x^3$  e  $f(x, y) = xy^3 - yx^3$  são conhecidas, respectivamente, como sela de macaco ("monkey saddle") e sela de cachorro ("dog saddle"). Esboce o gráfico dessas funções e pesquise na internet o porquê desses nomes.

### EXERCÍCIOS PROF. GIL BERNARDES

9. Descreva geometricamente o domínio das seguintes funções:

(a)  $f(x, y) = \frac{xy}{y-2x}$

(b)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(c)  $f(x, y) = \ln(xy)$

$$(d) f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \arcsin(y + 3)$$

$$(e) f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$(f) f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 2x}}$$

$$(g) f(x, y) = \ln[x \ln(y - x^2)]$$

$$(h) f(x, y) = \ln[(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)]$$

$$(i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4 + y^6)}{x^4 + y^6} & \text{se } x > 0 \\ y + \sqrt{1 - x} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

10. Esboce os gráficos das funções seguintes, e em seguida alguns dos seus conjuntos de nível.

$$(a) f(x, y) = 2 - x - x^2 - y^2$$

$$(b) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(c) f(x, y) = 2 - 4x^2 - 2y^2$$

$$(d) f(x, y) = \sqrt{2x - x^2 - y^2}$$

$$(e) f(x, y) = x^2$$

$$(f) f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

$$(g) f(x, y) = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(h) f(x, y) = y - 1.$$

11. Com recurso ao GeoGebra<sup>17</sup>, procure representar alguns dos conjuntos de nível para as seguintes funções:

$$(a) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(b) f(x, y, z) = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9}$$

$$(c) f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

$$(d) f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$(e) f(x, y, z) = \sqrt{\log(x^2 + y^2 - 2z^2)}.$$

<sup>17</sup> Tome a liberdade de baixar o GeoGebra no seu computador, a partir do link <https://www.geogebra.org/download>. Caso esteja com o seu smartphone ou tablet, procure utilizar o app de GeoGebra, disponível em <https://www.geogebra.org/apps/>.

**DICA:** Caso não esteja ainda familiarizado com o GeoGebra, passe pela página de **Ficheiros GeoGebra** do professor. Lá vai encontrar duas hiperligações para video-aulas de um curso de GeoGebra em 3D.



# Limites e Continuidade

*Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little, but nobody could discover what the infinitely little might be.*

– Bertrand Russell

*(Prémio Nobel da Literatura em 1950)*

### 3.1 Definição de Limite

De um modo natural, podemos generalizar a noção de limite para funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Começemos por introduzir os conceitos topológicos de *bola aberta* e de *ponto de acumulação*.

**Definição 3.1.1 (Bola Aberta)** *Seja  $A$  um ponto de  $\mathbb{R}^n$ , e  $r > 0$ . Definimos por bola aberta de centro em  $A$  e raio  $r$ , todo o conjunto da forma*

$$B_r(A) := \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, A) < r\},$$

onde  $d(X, A)$  distância Euclidiana  $d(X, A)$  entre os pontos  $A$  e  $X$ .

De acordo com os conceitos introduzidos ao longo da seção **1.3 Produto Escalar, Norma e Distância**, do **Capítulo 1 Vetores e a Geometria do Espaço  $\mathbb{R}^n$** , temos que para pontos  $A$  e  $X$ , de coordenadas

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \& \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

que  $d(X, A) = \|\overrightarrow{AX}\|$ , onde  $\|\overrightarrow{AX}\| = \sqrt{\overrightarrow{AX} \bullet \overrightarrow{AX}}$  corresponde à norma do vetor  $\overrightarrow{AX}$ .

Para o caso bidimensional ( $n = 2$ ), o conjunto  $B_r(A)$ , definido em termos da inequação quadrática<sup>1</sup>

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$$

dá-nos como lugar geométrico o interior da circunferência (disco)<sup>2</sup> de centro em  $(a_1, a_2)$  e raio  $r$ , ao

<sup>1</sup>  $d(X, A)^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2$ , para  $n = 2$ .

<sup>2</sup> A palavra disco é usada, em geral, para descrever geometricamente os pontos interiores ao círculo. A palavra círculo deverá ser apenas utilizada quando nos queremos referir à união entre os pontos circunferência e os pontos do disco, i.e. a todos os pontos  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  que satisfazem a inequação  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2$ .

par que no caso tridimensional ( $n = 3$ ), a inequação quadrática<sup>3</sup>

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2$$

dá-nos como lugar geométrico o interior de uma esfera<sup>4</sup> de centro em  $(a_1, a_2, a_3)$  e raio  $r$ .

**Definição 3.1.2 (Ponto de Acumulação)** *Seja  $A$  um ponto de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\Omega$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $A$  é um ponto de acumulação de  $\Omega$  se para todo o  $r > 0$ , o conjunto*

$$(B_r(A) \setminus \{A\}) \cap \Omega = \{X \in \Omega : 0 < d(X, A) < r\}$$

*é não vazio.*

<sup>3</sup>  $d(X, A)^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$ , para  $n = 3$ .

<sup>4</sup> Note que para  $y_i = x_i - a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), a equação da esfera  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = r^2$  pode ser obtida a partir da equação da circunferência  $y_1^2 + y_2^2 = r^2$ , se considerarmos p.e. o eixo  $Oy_3$  (perpendicular ao plano  $y_1y_2$ ) como eixo de revolução.

Grosso modo, dizemos que  $A$  é um *ponto de acumulação* de  $\Omega$  se existirem pontos de  $\Omega$ , que sejam pontos *arbitrariamente próximos*<sup>5</sup> de  $A$ , mas distintos<sup>6</sup> de  $A$ .

**Definição 3.1.3 (Limite)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $n$  variáveis e  $A$  um ponto de acumulação de  $\Omega$ .*

*Dizemos que o limite de  $f(X)$ , quando  $X$  tende para  $A$  dá  $\ell$ , e escrevemos*

$$\ell = \lim_{X \rightarrow A} f(X)$$

<sup>5</sup> A desigualdade  $d(X, A) < r$  garante-nos que o ponto  $X$  está sempre no interior da bola  $B_r(A)$ , para valores de  $r > 0$  tão próximos de zero quanto queiramos ( $r \rightarrow 0^+$ ).

<sup>6</sup> Uma vez que  $d(X, A) = \|\overrightarrow{AX}\|$ , a desigualdade  $d(X, A) > 0$  garante-nos que  $X \neq A$ .

se a condição **L** é sempre verificada:

$$\mathbf{L}: \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \underbrace{\forall_{X \in \Omega} 0 < d(X, A) < \delta}_{\Downarrow X \in (B_r(A) \setminus \{A\}) \cap \Omega} \implies |f(X) - \ell| < \varepsilon.$$

Geometricamente, a condição **L** da **Definição 3.1.3** diz-nos essencialmente que, para um número real arbitrário  $\varepsilon > 0$ , é possível determinar uma constante  $\delta > 0$  tal que para conjuntos  $\Omega_\delta$  da forma

$$\Omega_\delta := (B_\delta(A) \setminus \{A\}) \cap \Omega,$$

o conjunto imagem de  $f(\Omega_\delta)$  dá-nos todos os pontos do gráfico de  $f$ , situados entre os planos 'horizontais'

$$x_{n+1} = \ell - \varepsilon \text{ e } x_{n+1} = \ell + \varepsilon.$$

## 3.2 Limites segundo Caminhos

Note que a **Definição 3.1.3** incorpora apenas a noção de distância entre dois pontos, mas não a direção de aproximação entre pontos. Ou seja, sempre que o

limite  $\ell = \lim_{X \rightarrow A} f(X)$  existe, este é independente do caminho descrito por  $X$  na sua aproximação a  $A$ .

Iremos utilizar ao longo do texto a notação

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}}} f(X)$$

para designarmos o limite  $f$  em  $A$ , segundo o caminho  $\mathcal{C}$ . Este corresponde a um subconjunto de  $\Omega$ .

De acordo com a observação feita anteriormente, o seguinte resultado é deveras óbvio:

**Proposição 3.2.1 (Inexistência de limite)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de várias variáveis, e  $A$  um ponto de acumulação de  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

*Se para dois subconjuntos de  $\Omega$ ,  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  respectivamente,  $A$  é ponto de acumulação  $\mathcal{C}_1$ , e  $\mathcal{C}_2$ , e se pelo menos uma das condições abaixo se verifica:*

**L1:** *Pelo menos um dos limites*

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}_1}} f(X) \text{ e } \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}_2}} f(X)$$

111
|
565

*não existe ou dá  $\pm\infty$ .*

## ***L2: Os limites***

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ c_1}} f(X) \text{ \& } \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ c_2}} f(X).$$

*existem mas dão valores diferentes.*

*então o **limite**  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  **não existe**.*

### **Exemplo 3.2.1 (Condição L1 da Proposição 3.2.1)**

*Consideremos a função dada por*

$$f(x, y) = \frac{2}{2x^2 - 6x + 2y^2 - 10y + 17}$$

*Com base nas identidades*

$$2x^2 - 6x = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

$$2y^2 - 10y = 2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$$



*podemos reescrever  $f$  na seguinte forma*

$$f(x, y) = \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2}.$$

*Desta última representação concluímos que o domínio de  $f$  corresponde ao conjunto*

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left( \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq \frac{3}{2} \text{ e } y \neq \frac{5}{2} \right\}.$$

*Ou seja,  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$  não é um ponto do domínio. No entanto,  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$  é ponto de acumulação de  $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \right\}$  (domínio de  $f$ ) uma vez que para todo o  $r > 0$  as inequações<sup>7</sup>*

$$0 < \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 < r^2$$

<sup>7</sup> Veja a **Definição 3.1.2**

*definem como lugar geométrico um disco perfurado<sup>8</sup> pelo que faz sentido estudar o limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)} f(x, y).$$

*Decorre naturalmente do fato de as inequações*

$$0 < \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < r^2 \text{ \& } 0 < \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 < r^2$$

*admitirem conjuntos solução não vazios que o ponto  $A = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$  é também um ponto de acumulação para os seguintes<sup>9</sup> subconjuntos<sup>10</sup> de  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}$ :*

$$\mathcal{C}_1 = \left\{\left(x, \frac{5}{2}\right) : x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}\right\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \left\{\left(\frac{3}{2}, y\right) : y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}\right\}.$$

<sup>8</sup> Dizemos que um disco é perfurado quando excluimos o seu centro.

<sup>9</sup>  $(B_r(A) \setminus \{A\}) \cap \mathcal{C}_1 = \left\{\left(x, \frac{5}{2}\right) : 0 < \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < r^2\right\} \neq \emptyset.$

<sup>10</sup>  $(B_r(A) \setminus \{A\}) \cap \mathcal{C}_2 = \left\{\left(\frac{3}{2}, y\right) : 0 < \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 < r^2\right\} \neq \emptyset.$

*Para estes dois subconjuntos, obtemos que*

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow_{C_1} \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f\left(x, \frac{5}{2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow_{C_2} \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)} f(x,y) &= \lim_{y \rightarrow \frac{5}{2}} f\left(\frac{3}{2}, y\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{1}{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

*Portanto, o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)} f(x,y)$  não existe.*

### **Exemplo 3.2.2 (Condição L2 da Proposição 3.2.1)**

*Pretendemos agora investigar se a função dada por*

$$g(x, y) = \frac{2x^2 - 6x - 2y^2 + 10y - 8}{2x^2 - 6x + 2y^2 - 10y + 17}$$

*admite limite no ponto  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .*

*De modo análogo ao que realizado no exemplo anterior, as identidades*

$$2x^2 - 6x = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

$$2y^2 - 10y = 2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$$

*permitem-nos reescrever  $g(x, y)$  na seguinte forma:*

$$g(x, y) = \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2}.$$

*Desta última relação retiramos que:*

- (i) *O domínio de  $g$  coincide com o domínio da função  $f$  do **Exemplo 3.2.1** —  $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}$ .*

(ii)  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$  é um ponto de acumulação de  $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}$ , mas também para os subconjuntos  $C_1$  e  $C_2$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}$ , considerados no **Exemplo 3.2.1**.

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow_{C_1} \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)} g(x,y) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} g\left(x, \frac{5}{2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow_{C_2} \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)} g(x,y) &= \lim_{y \rightarrow \frac{5}{2}} g\left(\frac{3}{2}, y\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{-\left(y - \frac{5}{2}\right)^2}{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Portanto, o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})} g(x, y)$  não existe, uma vez que

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{c_1} (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})} g(x, y) = 1 \neq -1 = \lim_{(x,y) \xrightarrow{c_2} (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})} g(x, y).$$

**Observação 3.2.1** A **Proposição 3.2.1** corresponde a uma extensão natural de um resultado de funções de uma variável, envolvendo limites laterais.

Convém no entanto salientar que, ao contrário da reta numérica ( $n = 1$ ), em dimensões  $n \geq 2$  a condição

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell \in \mathbb{R}$$

não nos permite garantir que  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell$ , tampouco que  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  existe.

O exemplo a seguir ilustra bem o quão complicado se pode tornar a procura de caminhos nas condições da **Proposição 3.2.1**.

**Exemplo 3.2.3 (Observação 3.2.1)** *Pretende-se averiguar a existência de limite da função  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow [-1, 1]$  definida por*

$$g(x, y) = \cos\left(\frac{\pi y}{x}\right)$$

*no ponto  $O = (0, 0)$ .*

*Obviamente que  $(0, 0)$  é um ponto de acumulação, uma vez que para cada  $r > 0$ , a inequação*

$$0 < x^2 + y^2 < r^2$$

*define um conjunto não nulo de pontos, correspondentes a um disco perfurado, de centro na origem e raio  $r$ , no plano  $xy$ .*

*Para os conjuntos<sup>11</sup>*

$$C_1 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

$$C_2 = \{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

<sup>11</sup> Os conjuntos  $C_1$  e  $C_2$  correspondem no plano  $xy$  aos gráficos da reta dos quadrantes ímpares e da função seno, respetivamente.

*obtemos que*

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ C_1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x, x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi x}{x}\right) \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ C_2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x, \sin(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \sin(x)}{x}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \sin(x)}{x}\right) \\ &= -1,\end{aligned}$$

*ou seja, os limites de  $g$  para  $(0, 0)$ , segundo as caminhos  $C_1$  e  $C_2$ , coincidem.*



*Se adicionalmente, considerarmos o conjunto<sup>12</sup>*

$$\mathcal{C}_3 = \{(y^2, y) : y \in \mathbb{R} \text{ e } y < 0\},$$

*facilmente concluímos que o limite*

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{\mathcal{C}_3} (0,0)} g(x,y)$$

*não existe, uma vez que a substituição  $x = y^2$  na expressão de  $g(x,y)$  conduz-nos à expressão do limite lateral*

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \cos\left(\frac{\pi}{y}\right),$$

*limite esse que não existe.*

*Em suma, para provar que o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$  não existe, seria suficiente neste caso provar que o limite  $\lim_{(x,y) \xrightarrow{\mathcal{C}_3} (0,0)} g(x,y)$  não existe.*

<sup>12</sup> O conjunto  $\mathcal{C}_3$  dá-nos o gráfico da função  $-\sqrt{y}$ .

### 3.3 Limites vs Conjuntos de Nível

Em **Exemplo 3.2.1**, **Exemplo 3.2.2** & **Exemplo 3.2.3** ilustrámos a aplicação da **Proposição 3.2.1**. De acordo com este resultado, precisamos no caso da **condição L1** de encontrar pelo menos um caminho  $\mathcal{C}$  para o qual o limite

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}}} f(X)$$

não exista ou dê  $\pm\infty$ .

Para o caso da **condição L1** da **Proposição 3.2.1**, precisamos de encontrar dois caminhos,  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  respetivamente, para os quais os limites  $\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}_1}} f(X)$  e

$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}_2}} f(X)$  existam, mas

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}_1}} f(X) \neq \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}_2}} f(X).$$

Como tivémos de oportunidade de ilustrar ao longo do **Exemplo 3.2.3**, não existe um conjunto de regras

bem definidas que nos permita fazer uma *escolha inteligente* dos caminhos. Como iremos ver nos exemplos a seguir, a escolha do caminho  $\mathcal{C}$  de entre as curvas de nível da função nos dá, em alguns casos, uma perspectiva mais intuitiva para o estudo dos limites da forma

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ \mathcal{C}}} f(X).$$

Tendo como mote o **exercício 7** da seção **2.6 Exercícios (Capítulo 2)**, iremos dar uma interpretação física para o conceito de limite segundo um caminho, em termos de *isotérmicas* e de *superfícies equipotenciais*.

**Exemplo 3.3.1 (Isotérmicas)** *Suponha que a função*

$$T(x, y, z) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2} \text{ } (^{\circ}\text{C})$$

*descreve a temperatura do interior de uma caldeira.*

*Para valores de  $0 < \tau < 100$  as isotérmicas<sup>13</sup> de  $T$  correspondem ao conjunto de nível<sup>14</sup>*

$$\begin{aligned}C_{\tau} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = \tau\} \\&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = \frac{100}{\tau} - 1 \right\}.\end{aligned}$$

*Daqui se conclui que, para valores de  $0 < \tau < 100$ , as isotérmicas correspondem a superfícies cilíndricas concêntricas em torno do eixo  $Oz$ .*

*Podemos também concluir que para uma temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$ , as isométricas de  $T$  correspondem a pontos da forma  $(0, 0, c)$ , situados no eixo  $Oz$ , uma vez que*

$$C_{100} = \{ (0, 0, z) : z \in \mathbb{R} \}.$$

<sup>13</sup> Da condição  $x^2 + 2y^2 \geq 0$  resulta que o domínio da função  $T$  é  $\mathbb{R}^3$ , uma vez que o seu denominador nunca se anula.

<sup>14</sup> Da condição  $x^2 + 2y^2 \geq 0$ , podemos concluir ainda que  $T$  não admite isotérmicas para temperaturas superiores a  $100^{\circ}\text{C}$ . Em termos práticos, a impossibilidade de termos isotérmicas para temperaturas superiores a  $100^{\circ}\text{C}$ , deve-se ao fato de a água que alimenta a caldeira já ter atingido o ponto de ebulição.

*Em particular, este caso pode ser descrito em termos do limite*

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ c_\tau}} T(x,y,z) = 100.$$

*Ou seja, podemos encontrar uma aproximação [asintótica] para a temperatura das isotérmicas situadas no eixo Oz, em termos das isotérmicas com temperaturas muito próximas de  $100^\circ\text{C}$ .*

### **Exemplo 3.3.2 (Superfícies Equipotenciais)**

*Considere agora um potencial elétrico  $U(x,y,z)$  de um ponto  $(x,y,z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , dado por*

$$U(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2 - z^2}},$$

*onde  $r$  e  $c$  são constantes positivas.*

*Esta função tem como domínio  $\Omega$  a bola aberta  $B_r(O)$ , de centro em  $O = (0,0,0)$  e raio  $r$ :*

$$B_r(O) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < r \right\}$$

ou seja, o domínio  $\Omega = B_r(O)$  descreve como lugar geométrico interior de uma esfera centrada na origem, e de raio  $r$ .

Observe que  $U(x, y, z)$  pode ser reescrito como

$$U(x, y, z) = V\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right),$$

onde  $V$  corresponde ao potencial elétrico do item (b) do **exercício 7** da seção **2.6 Exercícios (Capítulo 2)**.

Assim, para valores de  $\varepsilon > 0$  os conjuntos de nível de  $U$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varepsilon &= \{(x, y, z) \in B_r(O) : U(x, y, z) = \varepsilon\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{\varepsilon^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < r \right\} \end{aligned}$$

podem ser descritos como superfícies de revolução dos conjuntos de nível do potencial  $V$ , em torno do eixo de revolução  $Ox \perp yz$ .

*Em particular, para o subconjunto  $\mathcal{N}_\varepsilon$  de  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , dado por*

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \left\{ (x, 0, 0) : x = \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{\varepsilon^2}} \text{ e } 0 < x < r \right\}$$

*temos que o limite*

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (r,0,0) \atop \mathcal{N}_\varepsilon} U(x,y,z) = \lim_{c \rightarrow 0} V \left( \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{\varepsilon^2}}, 0 \right)$$

*não existe.*

*Se interpretarmos fisicamente a constante  $c$  como carga elétrica, garantimos com base no limite anterior, a impossibilidade de descrever superfícies equipotenciais*

$$\mathcal{S} : U(x, y, z) = \varepsilon$$

*para cargas elétricas [assintoticamente] próximas de zero.*

Para finalizar esta seção vamos dar um exemplo um pouco mais técnico.

**Exemplo 3.3.3** *Pretende-se averiguar a existência do limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

*para a função  $f(x,y) = \frac{y}{\sin(x) - yx}$  de domínio*

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq \frac{\sin(x)}{x} \right\}.$$

**(i) CONSTRUÇÃO INTUITIVA DOS CAMINHOS**

*Analisemos primeiro o comportamento de  $f$  para subconjuntos  $C_\kappa$  descritos para valores de  $\kappa \geq 1$  em termos da equação  $y = x^\kappa$ .*



Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^\kappa) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\kappa}{\sin(x) - x^{\kappa+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(x)}{x^\kappa} - x} \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ se } \kappa > 1 \\ 1 & , \text{ se } \kappa = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Em particular, para os valores  $\kappa = 1$  e  $\kappa = 2$ :

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{c_1} (0,0)} f(x,y) = 1 \neq 0 = \lim_{(x,y) \xrightarrow{c_2} (0,0)} f(x,y).$$

(ii) **CONSTRUÇÃO DOS CAMINHOS A PARTIR DOS CONJUNTOS DE NÍVEL DE  $f$**

Podemos facilmente verificar que o conjunto de nível de  $f$  é dado por

$$C_\kappa = \left\{ (x, y) \in \Omega : y = \frac{\kappa \sin(x)}{1 + \kappa x} \right\}.$$

Além disso, o ponto  $O = (0,0)$  é um ponto de acumulação de  $C_\kappa$ , para todo o  $\kappa \in \mathbb{R}$  pelo que podemos estudar o limite de  $f(x,y)$  quando  $(x,y)$  se aproxima da origem do plano  $xy$ , segundo a família de caminhos  $C_\kappa$  ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ).

Observe-se que para cada  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $C_\kappa$  dá-nos o gráfico da função

$$g_\kappa(x) = \frac{\kappa \sin(x)}{1 + \kappa x}.$$

Esta função é contínua no ponto  $x = 0$ . Adicionalmente

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} g_\kappa(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\kappa \sin(x)}{1 + \kappa x} \\ &= \frac{\kappa \sin(0)}{1 + \kappa \cdot 0} \\ &= 0.\end{aligned}$$

*Escolhendo dois níveis diferentes  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  ( $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ), temos então que*

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \mathcal{C}_{\kappa_1}}} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, g_{\kappa_1}(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_{\kappa_1}(x)}{\sin(x) - g_{\kappa_1}(x)x} \\ &= \kappa_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \mathcal{C}_{\kappa_2}}} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, g_{\kappa_2}(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_{\kappa_2}(x)}{\sin(x) - g_{\kappa_2}(x)x} \\ &= \kappa_2.\end{aligned}$$

*Portanto:*

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \mathcal{C}_{\kappa_1}}} f(x,y) = \kappa_1 \neq \kappa_2 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \mathcal{C}_{\kappa_2}}} f(x,y).$$

*Conclui-se então, com base na **Proposição 3.2.1**, que ambas as abordagens nos conduzem à mesma conclusão:*

**O limite**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sin(x) - yx}$  **não existe.**

### 3.4 Propriedades dos Limites

Nesta seção iremos resumir algumas das propriedades elementares de limites, que podem ser provadas por definição, tendo como referência a condição **L** da **Definição 3.1.3**. As técnicas de demonstração são essencialmente as mesmas que já foram utilizadas para funções de uma variável<sup>15</sup>.

#### **Proposição 3.4.1 (Operações com Limites)**

*Sejam  $f$  e  $g$  duas funções bem definidas em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e seja ainda  $A$  um ponto de acumulação de*

<sup>15</sup> As demonstração das propriedades não irão ser abordadas ao longo deste curso. Apenas a sua aplicabilidade no cálculo de limites.

$\Omega$ . Para o caso dos limites  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  e  $\lim_{X \rightarrow A} g(X)$  existirem, são válidas as seguintes propriedades:

$$\textbf{PL1: } \lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell \iff \lim_{X \rightarrow A} |f(X) - \ell| = 0.$$

$$\textbf{PL2: } \lim_{X \rightarrow A} (\lambda f(X)) = \lambda \lim_{X \rightarrow A} f(X).$$

$$\textbf{PL3: } \lim_{X \rightarrow A} (f(X) \pm g(X)) = \lim_{X \rightarrow A} f(X) \pm \lim_{X \rightarrow A} g(X).$$

$$\textbf{PL4: } \lim_{X \rightarrow A} (f(X)g(X)) = \left( \lim_{X \rightarrow A} f(X) \right) \left( \lim_{X \rightarrow A} g(X) \right).$$

$$\textbf{PL5: } \lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\lim_{X \rightarrow A} f(X)}{\lim_{X \rightarrow A} g(X)}, \text{ se } \lim_{X \rightarrow A} g(X) \neq 0.$$

Para o caso de particular de funções de duas ou três variáveis, existe ainda um resultado prático que nos permite calcular o limite para uma função de várias variáveis, quando esta é escrita como o produto de duas ou três funções de uma variável.

Este resultado é uma consequência direta definição de limite, e da propriedade **PL4** da **Proposição 3.4.1**.

**Corolário 3.4.1 (Separação de Variáveis)**

*PARA DUAS VARIÁVEIS  $x$  E  $y$ : Se para as funções  $h_1$  e  $h_2$  de uma variável, os limites*

$$\lim_{x \rightarrow a} h_1(x) \text{ e } \lim_{y \rightarrow b} h_2(y)$$

*existem, então o limite da função*

$$f(x, y) = h_1(x)h_2(y)$$

*em  $(a, b)$  também existe e pode ser calculado como o produto*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \left( \lim_{x \rightarrow a} h_1(x) \right) \left( \lim_{y \rightarrow b} h_2(y) \right)$$

*PARA TRÊS VARIÁVEIS  $x$ ,  $y$  E  $z$ : Se para as funções  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  de uma variável, os limites*

$$\lim_{x \rightarrow a} h_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow b} h_2(y) \text{ e } \lim_{z \rightarrow c} h_3(z)$$

*existem, então o limite da função*

$$f(x, y, z) = h_1(x)h_2(y)h_3(z)$$

*em  $(a, b, c)$  também existe e pode ser calculado como o produto*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) &= \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} h_1(x) \right) \left( \lim_{y \rightarrow b} h_2(y) \right) \left( \lim_{z \rightarrow c} h_3(z) \right). \end{aligned}$$

Iremos começar por ilustrar a **Proposição 3.4.1** e o **Corolário 3.4.1** com exemplos muito próximos dos foram considerados na seção **62 Gráficos de Superfícies Cilíndricas**, do capítulo **2 Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível**.

### **Exemplo 3.4.1 (Funções que definem cônicas)**

*Como teve oportunidade de estudar em Geometria Analítica (GA), cônicas podem ser definidas como base na equação*

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^2 + \beta xy + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \varepsilon = 0,$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes reais.

### **'REVISÃO' DE GEOMETRIA ANALÍTICA (GA)**

A equação acima pode ser reescrita na forma matricial

$$X^t A X + C^t X + \varepsilon = 0,$$

onde  $A$  corresponde à matriz  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

com determinante<sup>16</sup> igual a

$$\det(A) = \alpha_1 \alpha_2 - \frac{\beta^2}{4},$$

<sup>16</sup> Observe que  $-4\det(A) = \beta^2 - 4\alpha_1 \alpha_2$  corresponde ao discriminante  $\Delta$  da equação quadrática  $\alpha_1 t^2 + \beta t + \alpha_2 = 0$  na variável  $t \in \mathbb{R}$ .



e  $C, X$  os vetores coluna  $2 \times 1$ , da forma

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De acordo com a classificação<sup>17</sup> de cônicas, estas podem ser do seguinte tipo:

- (i) *ELIPSE*: Para o caso dos coeficientes  $\alpha_1, \beta$  e  $\alpha_2$  satisfazerem a condição

$$\beta^2 < 4\alpha_1\alpha_2 \text{ (equivalente a } \det(A) > 0).$$

- (ii) *PARÁBOLA*: Para o caso dos coeficientes  $\alpha_1, \beta$  e  $\alpha_2$  satisfazerem a condição

$$\beta^2 = 4\alpha_1\alpha_2 \text{ (equivalente a } \det(A) = 0).$$

<sup>17</sup> A classificação de cônica pode ser interpretada em termos do número de zeros do polinômio  $p(t) = \alpha_1 t^2 + \beta t + \alpha_2$  variável  $t$ : **Elipse** para o caso de  $p(t)$  não admitir zeros ( $\beta^2 - 4\alpha_1\alpha_2 < 0$ ); **Parábola** para o caso de  $p(t)$  admitir um único zero ( $\beta^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = 0$ ); **Hipérbole** para o caso de  $p(t)$  admitir dois zeros ( $\beta^2 - 4\alpha_1\alpha_2 > 0$ ).

(iii) **HIPÉRBOLE:** Para o caso dos coeficientes  $\alpha_1, \beta$  e  $\alpha_2$  satisfazerem a condição

$$\beta^2 > 4\alpha_1\alpha_2 \text{ (equivalente a } \det(A) < 0\text{)}.$$

### **LIMITE DA EXPRESSÃO QUE DEFINE A CÔNICA**

Se denotarmos por  $f(x, y)$  a função

$$f(x, y) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \beta xy + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \varepsilon$$

podemos facilmente concluir com base no **Corolário 3.4.1**, e na propriedade **PL2** da **Proposição 3.4.1** que

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow a} x = a & \lim_{y \rightarrow b} y = b \\ \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 & \lim_{y \rightarrow b} y^2 = b^2 \end{array}$$

as seguintes identidades:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \alpha_1 x^2 = \alpha_1 \left( \lim_{x \rightarrow a} x^2 \right) \left( \lim_{y \rightarrow b} 1 \right) = \alpha_1 a^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \alpha_2 y^2 = \alpha_2 \left( \lim_{x \rightarrow a} 1 \right) \left( \lim_{y \rightarrow b} y^2 \right) = \alpha_2 b^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \beta xy = \beta \left( \lim_{x \rightarrow a} x \right) \left( \lim_{y \rightarrow b} y \right) = \beta ab$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \gamma_1 x = \gamma_1 \left( \lim_{x \rightarrow a} x \right) \left( \lim_{y \rightarrow b} 1 \right) = \gamma_1 a$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \gamma_2 y = \left( \lim_{x \rightarrow a} 1 \right) \left( \lim_{y \rightarrow b} y \right) = \gamma_2 b$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \varepsilon = \varepsilon \left( \lim_{x \rightarrow a} 1 \right) \left( \lim_{y \rightarrow b} 1 \right) = \varepsilon.$$

Adicionalmente, com base nas propriedade **PL3** do **Proposição 3.4.1**, podemos concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

**Exemplo 3.4.2 (Reformulação do Exemplo 3.4.1)**

*De modo análogo ao que foi feito no Exemplo 3.4.1, podemos concluir com base nas propriedades*

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow a} x = a & \lim_{y \rightarrow b} y = b & \lim_{z \rightarrow c} z = c \\ \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 & \lim_{y \rightarrow b} y^2 = b^2 & \lim_{z \rightarrow c} z^2 = c^2 \end{array}$$

*que as funções da forma*

$$\begin{aligned} g(x, y, z) = & \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + \\ & + \beta_{12} xy + \beta_{23} yz + \beta_{13} xz \\ & + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \delta \end{aligned}$$

*satisfazem a propriedade*

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} g(x, y, z) = g(a, b, c).$$

*Para o caso particular<sup>18</sup> de  $g(x, y, z) = f(x, y)$ , onde*

<sup>18</sup> Para este caso particular, a equação  $f(x, y) = 0$  define uma das superfícies cilíndricas consideradas no **Exemplo 2.2.2** da seção **62 Gráficos de Superfícies Cilíndricas** (capítulo 2 **Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível.**)

*f* denota a função quadrática considerada no **Exemplo 3.4.1**, facilmente podemos concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} g(x,y,z) &= \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right) \left( \lim_{z \rightarrow c} 1 \right) \\ &= f(a,b).\end{aligned}$$

De seguida, iremos realizar uma análise exaustiva de vários exemplos, similares aos que teve oportunidade de estudar em *Bases Matemáticas* (BM).

### **Exemplo 3.4.3 (Divisão de Polinômios)**

*Queremos determinar, caso exista, o limite da função*

$$f(x,y) = \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{x^3 + y^3}$$

*no ponto*  $A = (1, -1)$ .

*Antes de realizarmos o cálculo de*  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y)$ , *observe-se o seguinte:*

$$\text{INDETERMINAÇÃO DO TIPO } \frac{0}{0}$$

(i) Por aplicação das propriedades **PL1** e **PL3** da **Proposição 3.4.1**, obtemos a seguinte igualdade:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^3 + y^3) = 1^3 + (-1)^3 = 0.$$

(ii) Pela mesma ordem de ideias, concluímos por aplicação das propriedades **PL1**, **PL2** e **PL3** da **Proposição 3.4.1** que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = 0.$$

'DIVISÃO' DE POLINÔMIOS NAS VARIÁVEIS  $x$  E  $y$ .

(iii) O polinômio  $p(x, y) = x^3 + y^3$  – denominador de  $f(x, y)$  – anula-se para valores de  $x = -y$ . Assumindo, de forma 'simbólica', que a variável  $y$  é uma constante, obtemos com base no algoritmo da divisão que

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

(iv) O polinômio  $q(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 -$  numerador de  $f(x, y)$  – também se anula para valores de  $x = -y$ . Assumindo novamente, de forma ‘simbólica’, que a variável  $y$  é uma constante, a aplicação do algoritmo da divisão leva-nos à seguinte fatoração:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2).$$

Com base nas observações anteriores, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}.\end{aligned}$$

Da aplicação direta propriedades **PL1**, **PL2** e **PL3**, resulta que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^2 + 2xy + y^2) = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^2 - xy + y^2) = 3$$

Ora, como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^2 - xy + y^2) \neq 0$ , resulta da propriedade **PL5** da **Proposição 3.4.1** que

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \\ &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^2 + 2xy + y^2)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^2 - xy + y^2)} = \frac{0}{3} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ .

### Observação 3.4.1 (Análise do Exemplo 3.4.3)

Com base no raciocínio realizado ao longo do **Exemplo 3.4.3**, tem-se que para valores de  $x \neq -y$ , a função  $f$  pode ser reescrita na forma

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}.$$

Obviamente que a simplificação anterior não faz sentido para valores de  $x = -y$ , uma vez que o domínio



de  $f$  é dado por

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

No entanto, pelas definições de ponto de acumulação<sup>19</sup> e de limite<sup>20</sup> é possível considerar a expressão anterior para calcular os limites da forma

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-a,a)} f(x, y) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

*Das igualdades*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-a,a)} (x^2 + 2xy + y^2) = (-a)^2 + 2(-a)a + a^2 = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-a,a)} (x^2 - xy + y^2) = (-a)^2 - (-a)a + a^2 = 3a^2$$

<sup>19</sup> Veja **Definição 3.1.2** introduzida na seção 3.1 **Definição de Limite**.

<sup>20</sup> Veja **Definição 3.1.3** introduzida na seção 3.1 **Definição de Limite**.

podemos concluir, com base na propriedade **PL5** da **Proposição 3.4.1** que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-a,a)} f(x,y) = \frac{0}{3a^2} = 0 \quad (a \neq 0).$$

Para o caso de  $a = 0$ , a propriedade **PL5** da **Proposição 3.4.1** não pode ser diretamente aplicada, pelo que temos de recorrer ao resultado da **Proposição 3.2.1** para provar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe.

De fato, a inexistência<sup>21</sup> do limite acima pode ser comprovada com a escolha dos seguintes caminhos<sup>22</sup>:

$$C_1 = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

$$C_2 = \{(y, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

<sup>21</sup>  $\lim_{(x,y) \xrightarrow{C_1} (0,0)} f(x,y) = 0$  &  $\lim_{(x,y) \xrightarrow{C_2} (0,0)} f(x,y) = 4$ .

<sup>22</sup> O caminho  $C_1$  foi definido com base da bissetriz dos quadrantes pares, enquanto que o caminho  $C_2$  foi definido com base na bissetriz dos quadrantes ímpares.

**Exemplo 3.4.4 (Limite envolvendo Raízes I)**

*Pretendemos averiguar se o limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-4)} \frac{4x + 5y}{\sqrt{4x + 5y + 1} - 1}$$

*existe.*

*Fazendo a mudança de variável  $u = \sqrt{4x + 5y + 1}$ , obtemos que*

$$(x, y) \rightarrow (5, -4) \implies u \rightarrow 1.$$

*Adicionalmente, com base na igualdade  $4x + 5y = u^2 - 1$ , conclui-se que*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (5,-4)} \frac{4x + 5y}{\sqrt{4x + 5y + 1} - 1} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - 1}{u - 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u - 1)(u + 1)}{u - 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} (u + 1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

*Portanto*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-4)} \frac{4x + 5y}{\sqrt{4x + 5y + 1} - 1} = 2.$$

### **Exemplo 3.4.5 (Limite envolvendo Raízes II)**

*Pretendemos agora averiguar se o limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-4)} \frac{4x + 5y}{\sqrt{x^2 + 4y} - 3}$$

*existe.*

*Fazendo a 'mudança de variável'  $u = \sqrt{x^2 + 4y}$ , obtemos que*

$$(x, y) \rightarrow (5, -4) \implies u \rightarrow 3.$$

*Por outro lado, temos que  $y = \frac{u^2 - x^2}{4}$ .*

*Assim, com base na substituição  $y = \frac{u^2 - x^2}{4}$  o limite anterior pode ser transformado num limite, envolvendo polinômios nas variáveis  $x$  e  $u$ .*

*Em particular:*

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-4)} \frac{4x+5y}{\sqrt{x^2+4y}-3} &= \lim_{(x,u) \rightarrow (5,3)} \frac{4x + \frac{5}{4}(u^2 - x^2)}{u-3} \\ &= \lim_{(x,u) \rightarrow (5,3)} \frac{5u^2 + 16x - 5x^2}{4(u-3)}.\end{aligned}$$

Se assumirmos que  $\frac{5u^2+16x-5x^2}{4(u-3)}$  representa 'simbolicamente' o quociente entre dois polinômios na variável  $u$ , pode obter-se com base no algoritmo da divisão de polinômios que

$$5u^2 + 16x - 5x^2 = (u-3) \underbrace{(5u+15)}_{\text{quociente}} + \underbrace{(-5x^2 + 16x + 45)}_{\text{resto}},$$

ou seja, para  $(x, u) \neq (5, 3)$ :

$$\frac{5u^2 - 16x - 5x^2}{4(u-3)} = -\frac{5}{4}(u+3) + \frac{-5x^2 + 16x + 45}{4(u-3)}.$$

Ora, como o limite  $\lim_{u \rightarrow 3} \frac{1}{4(u-3)}$  não existe e

$$\lim_{x \rightarrow 5} (-5x^2 + 16x + 45) \neq 0$$

*podemos assim concluir que o limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-4)} \frac{4x + 5y}{\sqrt{x^2 + 4y} - 3} = \lim_{(x,u) \rightarrow (5,3)} \frac{5u^2 + 16x - 5x^2}{4(u - 3)}$$

*não existe.*

**Observação 3.4.2 (Limites Iterados)** *Com base na definição de limite, podemos ainda concluir que no caso de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \ell$ , que*

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow b} \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right) = \ell.$$

À semelhança da **Proposição 3.2.1**, este resultado oferece-nos um critério para provar, no caso particular de uma função de duas variáveis, que o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \text{ não existe}^{23}.$$

<sup>23</sup> Veja o **exercício 4** da **seção 3.7 Exercícios**.

*Aplicando diretamente este resultado ao **Exemplo 3.4.5**, resulta que o limite<sup>24</sup>*

$$\lim_{u \rightarrow 3} \frac{5u^2 + 16x - 5x^2}{4(u - 3)}$$

*não existe para valores de  $x \neq 5$ , pelo que o limite iterado*

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left( \lim_{u \rightarrow 3} \frac{5u^2 + 16x - 5x^2}{4(u - 3)} \right)$$

*também não existe.*

**Exemplo 3.4.6 (Limites Iterados II)** *Considere os limites da forma*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \pi)} \frac{\cot(y - x)}{\cot(y + x)}.$$

<sup>24</sup> Ao calcularmos o limite  $\lim_{u \rightarrow 3} \frac{5u^2 + 16x - 5x^2}{4(u - 3)}$ , assumimos simbolicamente que a variável  $x$  é constante.

Observe que estamos perante uma indeterminação  $\frac{0}{0}$ , uma vez que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \pi)} \cot(y-x) = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \pi)} \cot(y+x) = \cot\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Para estudarmos este limite, consideremos a mudança de variável  $u = y - x$ . Daqui facilmente se conclui que o limite anterior pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \pi)} \frac{\cot(y-x)}{\cot(y+x)} = \lim_{(x,u) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \frac{\cot(u)}{\cot(u+2x)}.$$

Adicionalmente, com base identidades trigonométricas

$$\cos(u+2x) = \cos(u)\cos(2x) - \sin(u)\sin(2x)$$

$$\sin(u+2x) = \sin(u)\cos(2x) + \cos(u)\sin(2x)$$



obtemos que

$$\frac{\cot(u)}{\cot(u+2x)} = \frac{\frac{\sin(u+2x)}{\sin(u)}}{\frac{\cos(u+2x)}{\cos(u)}} = \frac{\cos(2x) + \cot(u) \sin(2x)}{\cos(2x) - \tan(u) \sin(2x)}.$$

Atendendo ao fato que  $\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cot(u) = 0$  e que o limite

$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(u)$  não existe, podemos assim concluir que o

**Limite Iterado**<sup>25</sup>

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x) + \cot(u) \sin(2x)}{\cos(2x) - \tan(u) \sin(2x)} \right)$$

não existe.

**Em suma:** O limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \pi)} \frac{\cot(y-x)}{\cot(y+x)}$  não existe.

<sup>25</sup> A substituição  $u = x - y$  foi importante para a aplicação do critério de limite em termos de **Limites Iterados**, uma vez que nos permitiu, após algumas manipulações algébricas, proceder à separação das variáveis da função  $\frac{\cot(u)}{\cot(u+2x)} [u = x - y]$ .

A observação e exemplos a seguir vão ao encontro do que se concluiu no **Exemplo 3.4.2**, para o caso em que a equação  $f(x, y)$  é uma função quadrática nas variáveis  $x$  e  $y$ , e a função  $g$  é definida a partir da equação  $g(x, y, z) = f(x, y)$ .

### Observação 3.4.3 (Limites em Duas Variáveis)

*Decorre 'naturalmente' da definição de limite que nos casos em que a função  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ) for representada em termos de duas das três variáveis, que as seguintes propriedades também são satisfeitas:*

- (i) *FUNÇÕES DEFINIDAS EM TERMOS DA EQUAÇÃO*  
 $g(x, y, z) = f(x, y)$ :

*Se para a função  $f$  nas variáveis  $x$  e  $y$ , o limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \text{ existe,}$$

*então o limite da função  $g(x, y, z) = f(x, y)$  em*

$(a, b, c)$  também existe e pode ser calculado como

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} g(x,y,z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y).$$

(ii) FUNÇÕES DEFINIDAS EM TERMOS DA EQUAÇÃO  
 $g(x,y,z) = f(x,z)$ :

Se para a função  $f$  nas variáveis  $y$  e  $z$ , o limite

$$\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} f(y,z) \text{ existe,}$$

então o limite da função  $g(x,y,z) = f(y,z)$  em  
 $(a,b,c)$  também existe e pode ser calculado como

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} g(x,y,z) = \lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} f(y,z).$$

(iii) FUNÇÕES DEFINIDAS EM TERMOS DA EQUAÇÃO  
 $g(x,y,z) = f(x,z)$ :

Se para a função  $f$  nas variáveis  $x$  e  $z$ , o limite

$$\lim_{(x,z) \rightarrow (a,c)} f(x,z) \text{ existe,}$$

então o limite da função  $f(x,y,z) = g(x,z)$  em  $(a,b,c)$  também existe e pode ser calculado como

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} g(x,y,z) = \lim_{(x,z) \rightarrow (a,c)} f(x,z).$$

### Exemplo 3.4.7 ('Revisão' Limites Fundamentais)

Queremos determinar, caso exista, o limite da função  $g : ]-1, 1[ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida<sup>26</sup> por

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \frac{y \tan(\pi x)}{x \log(1+2y)} & , \text{ se } (x,y,z) \neq (0,0,z) \\ (1 + \tan(\pi z))^{\frac{\kappa^2}{z}} & , \text{ se } (0,0,z) \neq (0,0,0) \end{cases}$$

onde  $\kappa$  é uma constante.

<sup>26</sup> Observe que o domínio de  $g$  corresponde ao seguinte conjunto:  $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1 \text{ e } y \neq 0 \text{ e } z \neq 0\}$ .

*Para tal, temos de averiguar para que valores de  $\kappa \in \mathbb{R}$  os limites*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \tan(\pi x)}{x \log(1+2y)} \quad \& \quad \lim_{z \rightarrow 0} (1 + \tan(\pi z))^{\frac{\kappa^2}{z}}$$

*coincidem, de modo a garantirmos que*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} g(x,y,z) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \tan(\pi x)}{x \ln(1+2y)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} (1 + \tan(\pi z))^{\frac{\kappa^2}{z}}. \end{aligned}$$

**PARA VALORES DE  $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$ :**

*Observe-se que para valores de  $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$ , tem-se que  $g(x, y, z) = h_1(x)h_2(y)$ , onde*

$$h_1(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x} \quad \& \quad h_2(y) = \frac{y}{\log(1+2y)}.$$

*Ou seja, de acordo com o **Corolário 3.4.1**, o cálculo do limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \tan(\pi x)}{x \log(1+2y)}$  reduz-se ao cálculo dos limites*

$$\lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) \text{ \& } \lim_{y \rightarrow 0} h_2(y).$$

*No primeiro caso, a igualdade*

$$\lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) = \pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi x)}{\pi x} = \pi$$

*é uma consequência direta da identidade*

$$\tan(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)},$$

*da fórmula  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi x) = 1$ , e do limite fundamental*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1.$$

*No segundo caso, a igualdade*

$$\lim_{y \rightarrow 0} h_2(y) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{\ln(1 + 2y)} = \frac{1}{2}$$

*foi obtida com base no limite fundamental*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2y)}{2y} = 1.$$

158
|
565

*Portanto*

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \tan(\pi x)}{x \log(1+2y)} &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) \right) \left( \lim_{y \rightarrow 0} h_2(y) \right) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

**PARA VALORES DE**  $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$ :

*Tal como no caso anterior, o limite*

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1 + \tan(\pi z))^{\frac{\kappa^2}{z}}$$

*pode também ser calculado em termos de limites fundamentais conhecidos.*

*Primeiro, comece por observar que para valores de  $z \neq 0$ , temos*

$$(1 + \tan(\pi z))^{\frac{\kappa^2}{z}} = e^{\frac{\kappa^2 \ln(1 + \tan(\pi z))}{z}}$$

$$\frac{\ln(1 + \tan(\pi z))}{z} = \frac{\ln(1 + \tan(\pi z))}{\tan(\pi z)} \times \frac{\tan(\pi z)}{z}.$$

*Pela mesma ordem de ideias do caso anterior, obtemos que*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi z)}{z} = \pi.$$

*Por outro lado, fazendo a substituição  $t = \tan(\pi z)$ , resulta que*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan(\pi z))}{\tan(\pi z)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1.$$

*Daqui se conclui que*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\kappa^2 \ln(1 + \tan(\pi z))}{z} = \kappa^2 \pi.$$

*Logo*

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1 + \tan(\pi z))^{\frac{\kappa^2}{z}} = e^{\kappa^2 \pi}.$$

### **CONCLUSÃO:**

*Com base nos cálculos anteriores, tem-se que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \tan(\pi x)}{x \log(1 + 2y)} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + \tan(\pi z))^{\frac{\kappa}{z}}$$

160
565



se e somente se  $\kappa$  é solução da equação

$$e^{\pi\kappa^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Resolvendo a equação anterior em ordem<sup>27</sup> a  $\kappa$ , concluímos que o limite  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} g(x,y,z)$  existe<sup>28</sup>

$$\text{para } \kappa = -\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}} \text{ ou } \kappa = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}}.$$

Para os restantes valores de  $\kappa$ , i.e. para

$$\kappa \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}}, \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}} \right\}$$

<sup>27</sup> Para resolvermos a equação  $e^{\pi\kappa^2} = \frac{\pi}{2}$ , aplicámos a função logaritmo a ambos os lados da igualdade, obtendo assim a equação equivalente  $-\pi\kappa^2 = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

<sup>28</sup> Uma vez que  $\frac{\pi}{2} > 1$ , tem-se que  $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ , pelo que faz sentido calcular a raiz quadrada do número  $\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}$ . O mesmo não seria válido se procurássemos determinar as soluções da equação  $\pi\kappa^2 = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$  via radiciação  $\left[\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) < 0\right]$ . Logo, a equação  $\pi\kappa^2 = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$  não admite solução].

o limite  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} g(x,y,z)$  não existe.

### 3.5 Teorema do Confronto

Pela mesma ordem de ideias também podemos estabelecer o análogo do *Teorema do Confronto* para funções reais de várias variáveis. Este corresponde ao seguinte enunciado:

#### **Proposição 3.5.1 (Teorema do Confronto)**

Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  três funções bem definidas em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , e seja ainda  $A$  um ponto de acumulação de  $\Omega$ . Se as condições abaixo são satisfeitas

**TC1:** Existe uma bola aberta  $B_r(A)$  tal que

$$g(X) \leq f(X) \leq h(X),$$

para todo o  $X \in \Omega \cap B_r(A)$ .

**TC2:**  $\lim_{X \rightarrow A} g(X) = \lim_{X \rightarrow A} h(X) = \ell$ .

*tem-se que*

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell.$$

Nas condições da **Proposição 3.5.1** podemos ainda obter os seguintes casos particulares do *Teorema do Confronto*:

**Corolário 3.5.1** *Nas condições da Proposição 3.5.1, as seguintes propriedades são válidas:*

- (i) *Se<sup>29</sup>  $|f(X)| \leq h(X)$ , para todo o  $X \in \Omega \cap B_r(A)$  e  $\lim_{X \rightarrow A} h(X) = 0$ , então*

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = 0.$$

- (ii) *Se  $f(X)$  pode ser escrita como o produto*

$$f(X) = g(X)h(X),$$

<sup>29</sup> Este é o caso particular em que temos  $g(X) = -h(X)$ .

de uma função  $g$  que é limitada<sup>30</sup> em  $\Omega \cap B_r(A)$ , por função  $h$  de limite  $\lim_{X \rightarrow A} h(X) = 0$ ,  
 $\lim_{X \rightarrow A} h(X) = 0$ , então

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = 0.$$

### Exemplo 3.5.1 (Condição (i) do Corolário 3.5.1)

Pretende-se mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Começemos por observar que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  e que  $(0,0)$  é ponto de acumulação de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Decorre do fato da desigualdade  $y^2 < x^2 + y^2$  ser satisfeita para todo o  $(x,y) \neq (0,0)$  que

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{2|x|y^2}{x^2 + y^2} < 2|x|.$$

<sup>30</sup> Dizemos que a função  $g$  é limitada em  $\Omega \cap B_r(A)$ , se existe uma constante  $\sigma > 0$  tal que a desigualdade  $|g(X)| \leq \sigma$  é sempre satisfeita, para todo o  $X \in \Omega \cap B_r(A)$ .

Portanto, uma vez que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2|x| = 0$ , podemos concluir com base na condição (i) do **Corolário 3.5.1** que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \right| = 0.$$

e consequentemente<sup>31</sup>:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

**Exemplo 3.5.2 (Condição (ii) do Corolário 3.5.1)**  
Vamos agora ilustrar a aplicabilidade da condição (ii) do **Corolário 3.5.1**. Para tal, considere-se a função  $f$  definida por

$$f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{xy}\right).$$

<sup>31</sup> De fato, a conclusão do limite dar zero é uma consequência direta da propriedade **PL1** da **Proposição 3.4.1**.

Observe que o domínio de  $f$  – interseção dos domínios das funções definidas pelas expressões  $\frac{2xy^2}{x^2+y^2}$  e  $\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$  – é  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

Temos ainda que  $\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$  é limitada, uma vez que a desigualdade

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{xy}\right) \leq 1$$

é válida em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , e que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0,$$

tal como foi verificado no **Exemplo 3.5.1**.

Daqui resulta que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \sin\left(\frac{1}{xy}\right) = 0.$$

**Observação 3.5.1 (Funções Trigonômétricas)**

*Decorre do fato do contradomínio da função  $\arcsin$ <sup>32</sup> ser o conjunto  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  que*

$$\left| \arcsin\left(\frac{1}{xy}\right) \right| \leq \frac{\pi}{2},$$

*ou seja  $\arcsin\left(\frac{1}{xy}\right)$  é uma função limitada.*

*Pela mesma ordem de ideias podemos concluir também que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \arcsin\left(\frac{1}{xy}\right) = 0.$$

*O mesmo tipo de raciocínio é também aplicável para concluir que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \arctan\left(\frac{1}{xy}\right) = 0,$$

<sup>32</sup>  $\arcsin(\theta)$  lê-se 'o arco cujo seno vale  $\theta$ '.

*uma vez que o contradomínio<sup>33</sup> de  $\arctan\left(\frac{1}{xy}\right)$  é o conjunto*

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ = \left\{z \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

*No entanto, este tipo de raciocínio não poder ser aplicado no cálculo do limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \tan\left(\frac{1}{xy}\right),$$

*uma vez que o contradomínio da função tangente é  $\mathbb{R}$ .*

### **Exemplo 3.5.3 (Condição (ii) do Corolário 3.5.1)**

*Seja agora  $f$  a função definida por*

$$f(x, y) = \frac{2x^\kappa y^2}{x^2 + y^4},$$

*onde  $\kappa$  é uma constante que satisfaz a condição  $\kappa \geq 1$ .*

<sup>33</sup>  $\arctan(\theta)$  deve ler-se 'o arco cuja tangente vale  $\theta$ '.



Para  $\kappa = 1$ , pode-se concluir que o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$  não existe pelo simples fato<sup>34</sup> de

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = 1 \neq -1 = \lim_{y \rightarrow 0} f(-y^2, y).$$

Para valores de  $\kappa > 1$  temos que

$$f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} x^{\kappa-1}.$$

Na decomposição acima, 'isolámos' a função  $x^{\kappa-1}$ . Esta função satisfaz

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^{\kappa-1} = 0 \quad (\kappa > 1),$$

pelo que somos levados a conjecturar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

<sup>34</sup> Para provarmos para  $\kappa = 1$  que o limite não existe, considerou-se os caminhos  $C_1 = \{(y^2, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$  e  $C_2 = \{(-y^2, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ . Para ambos os casos,  $(0, 0)$  é um ponto de acumulação.

Nesse sentido, resta-nos apenas demonstrar que a função  $\frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$  é limitada, de modo podermos aplicar a condição (ii) do **Corolário 3.5.1**.

Para tal, consideremos o binômio

$$(|x| - t)^2 = x^2 - 2|x|t + t^2.$$

Da condição  $(|x| - t)^2 \geq 0$ , resulta que:

$$2|x|t \leq x^2 + t^2, \text{ para todos os } x, t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para a substituição  $t = y^2$ , obtemos que

$$2|x|y^2 \leq x^2 + y^4, \text{ para todo o } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Esta última desigualdade é equivalente a

$$\frac{2|x|y^2}{x^2 + y^4} \leq 1 \text{ para todo o } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

donde

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} \right| = \frac{2|x|y^2}{x^2 + y^4} \leq 1.$$

Da arbitrariedade de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , provamos com base na desigualdade anterior que  $\frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$  é limitada em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Portanto, com base na condição (ii) do **Corolário 3.5.1**, estão asseguradas as condições que nos permitem concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0,$$

para valores de  $\kappa$  superiores a 1.

**Exemplo 3.5.4 (Proposição 3.5.1)** Pretendemos agora calcular o limite de uma função  $f$  que satisfaz a seguinte condição em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ :

$$|f(x, y, z) - \cosh(z)| \leq \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

onde  $\cosh(z)$  denota a função

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Usando a propriedade  $|t| \leq a \Leftrightarrow -a \leq t \leq a$ , podemos reescrever a condição anterior na forma

$$g(x, y, z) \leq f(x, y, z) \leq h(x, y, z),$$

onde as funções  $g$  e  $h$  são dadas por

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \cosh(z) - \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ h(x, y, z) &= \cosh(z) + \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Primeiro, comecemos por observar que  $\cosh(z)$  é uma função de uma variável, para a qual

$$\lim_{z \rightarrow 0} \cosh(z) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1.$$

Por outro lado, a desigualdade

$$0 \leq \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq |x|$$

em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  é uma consequência direta da seguinte desigualdade<sup>35</sup> em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ :

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Portanto, uma vez  $(0, 0, 0)$  é ponto de acumulação de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , e

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} |x| = 0 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} 0,$$

podemos concluir, pelo Teorema do Confronto (**Proposição 3.5.1**) que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

Adicionalmente, com base na propriedade **PL3** da

<sup>35</sup> Essa desigualdade é uma consequência direta da desigualdade  $y^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$ , e do fato da função  $\sqrt{t}$  ser monótona crescente.

**Proposição 3.4.1**, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} g(x,y,z) &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \cosh(z) - \\ &- \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} h(x,y,z) &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \cosh(z) + \\ &+ \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= 1,\end{aligned}$$

ou seja:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} g(x,y,z) = 1 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} h(x,y,z).$$

Aplicando mais uma vez o Teorema do Confronto (**Proposição 3.5.1**), concluímos que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = 1.$$

### 3.6 Limites vs Continuidade

Ao contrário da noção de limite, que está ligada ao estudo do comportamento de uma função  $f$  numa proximidade de um ponto sem tomar em conta o que acontece no próprio ponto, a noção de continuidade relaciona o comportamento de uma função de um ponto com o valor que ela toma nesse ponto.

**Definição 3.6.1 (Função Contínua)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de várias variáveis, e  $A$  um ponto de acumulação do domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diz-se que  $f$  é contínua em  $A$  se e só se*

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A).$$

Para o caso de continuidade, a condição de limite **L**, considerada na **Definição 3.1** tem de ser reformulada do seguinte modo:

$$\text{Co: } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{X \in \Omega} \underbrace{d(X, A) < \delta}_{\substack{\uparrow \\ 175}} \implies |f(X) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\underbrace{\uparrow}_{175} X \in B_r(A) \cap \Omega \quad \underbrace{\phantom{X \in B_r(A) \cap \Omega}}_{565}$$

Note-se que as condições **L** (*limite no ponto*) e **Co** (*continuidade no ponto*) diferem apenas no seguinte fato: No caso da condição **L**, excluimos os casos em que  $X = A$ , impondo a condição  $d(X, A) > 0$ ; No caso da condição **Co**, consideramos adicionalmente o caso em que  $X = A$ .

Para o caso da condição **Co** não ser satisfeita, dizemos que  $f$  é uma *função descontínua* no ponto  $A$ . Este fato pode ser formulado em termos da seguinte definição:

**Definição 3.6.2 (Função Descontínua)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de várias variáveis, e  $A$  um ponto de acumulação do domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diz-se que  $f$  é descontínua em  $A$  se e só se pelo menos uma das condições abaixo se verifica:*

- (i)  $A \notin \Omega$ .
- (ii)  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  não existe ou dá  $\pm\infty$ .



$$(iii) \lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell \text{ mas } \ell \neq f(A).$$

### **Exemplo 3.6.1 (Exemplos Funções Contínuas)**

*São exemplos de funções contínuas:*

(i) *As funções quadráticas do Exemplo 3.4.1 & Exemplo 3.4.2.*

(ii) *As funções  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  da forma*

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y)h(x, y) & , \text{ se } (x, y) \neq (a, b) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (a, b) \end{cases}$$

*onde  $g$  é uma função limitada<sup>36</sup> em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$*

$$\text{e } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} h(x, y) = 0.$$

(iii) *As funções  $f$  dadas pela tabela<sup>37</sup> abaixo*

<sup>36</sup> *Reveja o Corolário 3.5.1, Exemplo 3.5.1, Exemplo 3.5.2 & Observação 3.5.1.*

<sup>37</sup> *Revisite o exercício 8 (a) da seção Exercícios 2.6.*

$h(t)$	$f(x, y) = h(\sqrt{x^2 + y^2})$
$ t $	$\sqrt{x^2 + y^2}$
$a^t$	$a^{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$\sin(t)$	$\sin(\sqrt{x^2 + y^2})$
$\cos(t)$	$\cos(\sqrt{x^2 + y^2})$
$\arcsin(t)$	$\arcsin(\sqrt{x^2 + y^2})$
$\arccos(t)$	$\arccos(\sqrt{x^2 + y^2})$

(iv) As função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  do **Exemplo 3.5.4** para o caso de  $f(0, 0, 0) = 1$ .

### Exemplo 3.6.2 (Exemplos Funções Descontínuas)

São exemplos de funções descontínuas:

(i) As funções<sup>38</sup>  $f$  do **Exemplo 3.2.1** & **Exemplo 3.2.2**.

<sup>38</sup> Estas funções são descontínuas em  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ , uma vez que o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})} f(x, y)$  não existe.

(ii) As funções<sup>39</sup>  $f$  do **Exemplo 3.4.4** & **Exemplo 3.4.5**.

(iii) As funções<sup>40</sup>  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  do **Exemplo 3.5.1**, **Exemplo 3.5.2** & **Observação 3.5.1**.

<sup>39</sup> Nestes dois exemplos, estão contemplados os casos (i), (ii) & (iii) da **Definição 3.6.2**.

<sup>40</sup> Todas estas funções são descontínuas no ponto  $(0, 0)$ , embora em alguns dos casos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .

(iv) As funções  $f$  dadas pela tabela<sup>41</sup> abaixo:

$h(t)$	$f(x, y, z) = h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$\log_a(t)$	$\log_a(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
$\tan(t)$	$\tan(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
$\cot(t)$	$\cot(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
$\sec(t)$	$\sec(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
$\operatorname{cosec}(t)$	$\operatorname{cosec}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
$\arcsin\left(\frac{1}{t}\right)$	$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$
$\arccos\left(\frac{1}{t}\right)$	$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$
$\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$	$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$

No caso dos exemplos de funções contínuas lista-

<sup>41</sup> Todas as funções que aparecem na coluna da direita da tabela apresentam pelo menos um ponto de descontinuidade em  $\mathbb{R}^3$ .

dos no **Exemplo 3.6.1** & **Exemplo 3.6.2**, é possível decompor o problema do estudo da continuidade de uma função  $f$  em pelo menos três dos seguintes casos:

- (i) FUNÇÃO  $f$  REPRESENTADA COMO A SOMA DE DUAS OU MAIS FUNÇÕES.
- (ii) FUNÇÃO  $f$  REPRESENTADA COMO PRODUTO DUAS OU MAIS FUNÇÕES.
- (iii) FUNÇÃO  $f$  COMO O QUOCIENTE DE DUAS FUNÇÕES.

De fato, decorre naturalmente da **Definição 3.6.1** e da **Proposição 3.4.1**, que no caso de termos duas funções é possível provar facilmente o seguinte resultado:

**Corolário 3.6.1 (Propriedades Continuidade)**

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções bem definidas em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e seja ainda  $A$  um ponto de acumulação de  $\Omega$ . Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $A$ , as seguintes propriedades são válidas:

**Co1:** A função  $\lambda f$  definida por  $(\lambda f)(X) := \lambda f(X)$  é contínua em  $A$ .

**Co2:** As funções  $f \pm g$  definidas por  $(f \pm g)(X) := f(X) \pm g(X)$  são contínuas em  $A$ .

**Co3:** A função  $fg$  definida por  $(fg)(X) := f(X)g(X)$  é contínua em  $A$ .

**Co4:** A função  $\frac{f}{g}$  definida por  $\left(\frac{f}{g}\right)(X) := \frac{f(X)}{g(X)}$  é contínua em  $A$ , apenas se  $g(A) \neq 0$ .

(iv) FUNÇÃO  $f$  COMO A COMPOSIÇÃO DE DUAS OU MAIS FUNÇÕES.

De modo análogo ao que acontece no caso de *funções de uma variável*, a função composta  $hog$  é uma função contínua desde que  $g : \Omega_g \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^n$ ) e  $h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_h \subseteq \mathbb{R}$ ) sejam funções contínuas.

Este resultado corresponde essencialmente à seguinte proposição:

**Proposição 3.6.1 (Limite e Continuidade)** *Seja  $g : \Omega_g \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^n$ ) e  $h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_h \subseteq \mathbb{R}$ ) sejam funções, e seja  $A \in \Omega_g$ . Então as seguintes propriedades são válidas.*

(i) *Se  $g(A) \in \Omega_h$ , e  $h$  é contínua em  $g(A)$ , então*

$$\lim_{X \rightarrow A} (hog)(X) = \lim_{t \rightarrow g(A)} h(t).$$

(ii) *se  $g$  é contínua em  $A$ , então  $hog$  também é contínua em  $A$ . Adicionalmente*

$$\lim_{X \rightarrow A} (hog)(X) = h(g(A)).$$

**Observação 3.6.1 (Domínio de Continuidade)**

*O domínio de continuidade corresponde ao conjunto maximal<sup>42</sup>  $\Omega$  para o qual  $f$  é contínua.*

*No caso de as funções  $g$  e  $h$  serem contínuas em todos os pontos do seu domínio, o conjunto*

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n : X \in \Omega_g \text{ e } g(X) \in \Omega_h\}$$

*corresponde ao domínio de continuidade da função  $h \circ g$ .*

**Exemplo 3.6.3 (Gabarito)** *Na tabela abaixo pode consultar o domínio de continuidade de algumas funções do Exercício 9 da seção 2.6 Exercícios (Capítulo 2 Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível):*

<sup>42</sup> *Reveja a seção 2.5 Domínios do Capítulo 2 Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível.*



$f(x, y)$	<i>domínio de continuidade</i>
$\frac{xy}{y-2x}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2x\}$
$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$
$\ln(xy)$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$
$\frac{x^3}{3} + \arcsin(y+3)$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq -2\}$
$\sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-2x}}$	$A \cup B$ , onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \geq 1$ $e \sqrt{(x-1)^2+y^2} > 1\};$ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ $e \sqrt{(x-1)^2+y^2} < 1\}.$
$\ln[x \ln(y-x^2)]$	$A \cap B$ , onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0$ $e y > 1+x^2\}$ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0$ $e y < 1+x^2\}.$
$\ln[u(x, y)v(x, y)],$	$A \cup B$ , onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} > 2$ $e \sqrt{x^2+y^2} < 4\}$
$u(x, y) = 16 - x^2 - y^2$	
$v(x, y) = x^2 + y^2 - 4$	$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} > 4\}.$

**Exemplo 3.6.4** Consideremos<sup>43</sup> agora a função por partes definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4 + y^6)}{x^4 + y^6} & \text{se } x > 0 \\ y + \sqrt{1-x} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

No caso de  $x > 0$ , temos<sup>44</sup> que  $f(x, y) = (hog)(x, y)$ , onde

$$g(x, y) = x^4 + y^6 \text{ e } h(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

No caso de  $x \leq 0$ , temos que  $f(x, y)$  é dada pela soma da função  $y$  com a função  $\sqrt{1-x}$ .

Em particular,  $f(x, y)$  é contínua em

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\},$$

<sup>43</sup> Item (i) do Exercício 9 da seção 2.6 Exercícios (Capítulo 2 Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível)

<sup>44</sup> Não é difícil de verificar que o domínio de  $h$  é o conjunto  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e que o domínio da função  $g$  é  $\mathbb{R}^2$ , pelo que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  é o domínio da função  $hog$ .

uma vez que  $\frac{\sin(x^4 + y^6)}{x^4 + y^6} = h(g(x, y))$  é contínua para valores de  $x > 0$  e  $y + \sqrt{1-x}$  é contínua<sup>45</sup> para valores de  $x < 0$ .

Com base na condição (i) da **Proposição 3.6.1**, podemos facilmente concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^6)}{x^4 + y^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Por outro lado, com base nas condições (i) e (ii) da **Proposição 3.6.1**, resulta que

$$f(0,0) = 1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (y + \sqrt{1-x}).$$

Logo  $f$  também é contínua em  $(0,0)$ , uma vez que

$$f(0,0) = 1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y).$$

<sup>45</sup> A continuidade de  $y + \sqrt{1-x}$  para valores de  $x < 0$  deriva do fato de  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$  ser um subconjunto do domínio de  $y + \sqrt{1-x}$  — o conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1\}$ .

*EM SUMA: O domínio de continuidade da função  $f$  é  $\mathbb{R}^2$ .*

**Observação 3.6.2** *Pela mesma ordem de ideias do Exemplo 3.6.4, podemos concluir que o domínio de continuidade da função*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(ax^4 + ay^6)}{x^4 + y^6} & \text{se } x > 0 \\ y + \sqrt{b - x} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

*é também  $\mathbb{R}^2$ , para o caso de  $a = \sqrt{b}$  e  $b \geq 0$ .*

**Exemplo 3.6.5 (Baseado no Exemplo 3.6.3)** A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{y-2x} & \text{se } y \neq 2x \\ \varepsilon & \text{se } y = 2x \end{cases}$$

não é contínua em  $(0, 0)$ , independentemente da constante  $\varepsilon$  escolhida.

Com efeito, se para cada  $\kappa \neq x$  considerarmos os conjuntos de nível de  $\frac{xy}{y-2x}$ :

$$C_\kappa = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{2\kappa x}{\kappa - x} \right\}$$

obtemos que

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{C_\kappa} (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(x, \frac{2\kappa x}{\kappa - x}\right) = \kappa.$$

*Em particular*<sup>46</sup>:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ c_1}} f(x,y) = 1 \neq 2 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ c_2}} f(x,y).$$

*Provámos assim, com base na **Proposição 3.2.1**, que o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe pelo que a função  $f$  nunca poderá ser contínua em  $(0,0)$ , de acordo com a **Definição 3.6.2**.*

<sup>46</sup> No caso particular deste exemplo, escolhemos dois caminhos distintos com base níveis  $\kappa = 1$  e  $\kappa = 2$ . Outro tipo de escolha(s) para a constante  $\kappa$  poderia ter sido feita, desde que  $\kappa \neq 0$ . Esta última condição assegura-nos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\kappa x}{\kappa - x} = 0$ .

### 3.7 Exercícios

Os primeiros cinco (05) exercícios que se seguem foram retirados da **Lista 2 de FVV (2015)**, do Prof. Maurício Richartz. Dicas para a resolução de cada exercício podem ser consultadas, clicando em **lista2dicas.pdf**. Os restantes (**exercício 6. em diante**) correspondem a adaptações de exercícios gentilmente cedidos pelo Prof. Gil Bernardes, da Universidade de Coimbra, e a exercícios formulados pelo professor de *Funções de Várias Variáveis* (**DESAFIOS**).

#### EXERCÍCIOS PROF. MAURÍCIO RICHARTZ

1. Nos exercícios abaixo, determine se o limite existe. Se existir, determine o seu valor. Justifique a resposta.

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - 5x^2y^3 + 3}{7x^4y^2 - 2x^2y^2 + 2},$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$(d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}$$

$$(e) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$(f) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$(g) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(h) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$$

$$(i) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sec x \tan y$$

$$(j) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^2 \ln[(x^2 + y^2)^2]$$

$$(k) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



$$(l) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|xy|}$$

$$(m) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (-2,3)} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2$$

$$(n) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(2x) - 2x + y}{x^3 + y}$$

$$(o) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-1,0)} \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz}{x + y - z}$$

2. Para cada função abaixo, determine o conjunto  $X$  de pontos do plano/espaco onde a função é contínua (justifique sua resposta). Esboce a região correspondente.

$$(a) \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2,$$

$$(b) \quad f(x, y) = \sqrt{x - y},$$

$$(c) \quad f(x, y) = \ln \left[ \cos \left( x^2 + y^2 \right) \right],$$

$$(d) \quad f(x, y) = \frac{1}{y} \cos x^2,$$

$$(e) \quad f(x, y) = \tan \left( \frac{x^2}{y} \right),$$

$$(f) \quad f(x, y) = \arccos\left(\sqrt{\frac{x^2}{y}}\right),$$

$$(g) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 + 1},$$

$$(h) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1-x-y}},$$

$$(i) \quad f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2),$$

$$(j) \quad f(x, y, z) = \arctan\left(\sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2 - z^2}\right),$$

3. Determine, quando possível, o valor de  $a \in \mathbb{R}$  para que a função seja contínua em  $(0, 0)$ . Em cada caso, analise também a continuidade da função nos outros pontos do seu domínio.

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$(d) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \cos y \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$(e) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

#### 4. (Limites Iterados)

Seja  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ .

(a) Qual o domínio da função?

(b) Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 0$$

(obs: esses limites são denominados limites iterados).

(c) Mostre que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  não existe.

(d) A que conclusão geral sobre os limites iterados você pode chegar usando esse resultado?

## 5. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^2; \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Mostre que  $f(x, y) \rightarrow 0$  à medida que  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de qualquer reta que passa pela origem.
- (b) Encontre uma curva que passa pela origem para a qual  $f(x, y) = 1$  em todos os seus pontos (com exceção da origem).
- (c) A função  $f(x, y)$  é contínua na origem?

**EXERCÍCIOS DO PROF. GIL BERNARDES**

6. Usando caminhos convenientes tire conclusões sobre a existência dos seguintes limites:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$(c) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,0)} \frac{(x-1)yz}{(x-1)^3 + y^3 + z^3}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2xy - 2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^3 + y^3}$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^3 + y^3}$$

7. Para a função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x^2 + y^2 < 2y \\ x + y & , \text{ se } x^2 + y^2 = 2y \\ y^2 & , \text{ se } x^2 + y^2 > 2y \end{cases}$$

estude a existência do limite quando:

(a)  $(x, y)$  tende para  $(0, 0)$ .

(b)  $(x, y)$  tende para  $(1, 1)$ .

(c)  $(x, y)$  tende para  $(0, 1)$ .

8. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$(b) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)} \ln\left(\frac{\sin x}{2} + (yz)^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{2xy}{(x+y)^2}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{xy - 2x - y + 2}{(x-1)(y^2 - 4y + 4)}$$

9. Determine o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado pelos pontos para os quais  $f$  é contínua:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{y}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 2y & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

10. Considere a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y > x \\ 2x + 1 & \text{se } y \leq x. \end{cases}$$

Calcule, caso existam,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$  e dê uma justificação muito breve.

11. Para cada uma das seguintes funções estude a continuidade nos pontos indicados:

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2 - y^2} \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) & , x + y \neq 0 \\ 0 & , x + y = 0 \end{cases}$$

em  $(0, 0)$  e  $(3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$ .

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + |y|}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

em  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$  e  $(1, 0)$ .

### DESAFIOS

12. Para a função  $f(x, y) = \frac{xy^4}{x^3 + y^6}$ :

(a) Calcule o domínio de  $f$ .

(b) Calcule o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , onde

$$\mathcal{R} = \{(x, mx) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \quad (m \in \mathbb{R}).$$



(c) Calcule o limite  $\lim_{(x,y) \xrightarrow{\mathcal{P}} (0,0)} f(x,y)$ , onde

$\mathcal{P} = \{(y^2, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ . O que pode concluir quanto à existência do limite

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{\mathcal{R}} (0,0)} f(x,y)?$$

(d) Mostre que para valores de  $a \neq 0$ , o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-a^2, a)} f(x,y) \text{ não existe.}$$

**DICA:** Use limites iterados<sup>47</sup>.

13. Estude a existência dos seguintes limites:

$$(a) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,1,-a)} \frac{x+z}{x+y+z-1} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (n\pi, n\pi, n\pi)} \frac{1}{\sin^2(x) + \sin^2(y) + \sin^2(z)} \\ (n \in \mathbb{Z}).$$

<sup>47</sup> Veja **Observação 3.4.2**, **Observação 3.4.2** & **exercício 4**.

$$(c) \quad \lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (n\pi, n\pi, n\pi) \\ (n \in \mathbb{Z})}} \frac{(\sin(x) + \sin(y))^2 - \sin^2(z)}{\sin(x) + \sin(y) + \sin(z)}$$

14. Calcule, caso existam, os seguintes limites

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4 + y^4}$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sin(\pi x^2 + \pi y^2)}$$

$$(d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(7xy)}{\tan(3x^2 + 3y^2)}$$

15. Diga<sup>48</sup>, justificando, se as afirmações abaixo são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**). No caso de **V**, faça a respetiva demonstração. No caso de **F**, dê um contra-exemplo.

(a) Se não existem os limites  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  e  $\lim_{X \rightarrow A} g(X)$ , então os limites  $\lim_{X \rightarrow A} (f(X) - g(X))$  e  $\lim_{X \rightarrow A} (f(X)g(X))$  também não existem.

(b) Se existem os limites  $\lim_{X \rightarrow A} g(X)$  e  $\lim_{X \rightarrow A} (f(X) - g(X))$ , então o limite  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  também existe.

(c) Se existem os limites  $\lim_{X \rightarrow A} g(X)$  e  $\lim_{X \rightarrow A} (f(X)g(X))$ , e  $\lim_{X \rightarrow A} g(X) \neq 0$  então o limite  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  também existe.

<sup>48</sup> Tome em linha de conta o **Corolário 3.6.1**, assim como os exemplos listados em **Exemplo 3.6.2**

16. Use o *Teorema do Confronto*<sup>49</sup> para provar que os limites abaixo dão zero. Justifique convenientemente a sua resposta:

$$(a) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-1,0)} (1 - e^{-xyz}) \arctan(x + y + z)$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\arcsin(x) \tan(\pi x + \pi y)}{\sqrt{\arcsin^2(x) + \arcsin^2(y)}}$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{z^5}{\sqrt{x^{16} + y^{16} + z^{16}}}$$

$$(d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + y)^5}{\sqrt{\ln(1 + x)^{16} + \ln(1 + y)^{16}}}$$

$$(e) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7xe^{-|y|} - 5ye^{|x|}}{\sqrt{7x} + \sqrt{5y}}$$

<sup>49</sup> **Proposição 3.5.1 & Corolário 3.5.1.**

<sup>50</sup> **DICA:** Use a desigualdade  $|w| \leq \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ .

<sup>51</sup> **DICA:** Use a desigualdade  $|v| \leq \sqrt{u^2 + v^2}$ .

<sup>52</sup> **DICA:** Use as desigualdades  $e^{-|y|} \leq 1$  &  $e^{|x|} \geq 1$ .

(f) <sup>53</sup>  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} g(x,y,z)$ , com base na desigualdade

$$\left| g(x,y,z) - \frac{x-y+z}{\sqrt{x+z} + \sqrt{y}} \right| \leq \frac{x^4 y^4}{x^4 + y^4 + z^4}.$$

(g) <sup>54</sup>

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} g(x,y).$$

com base na desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{5}(xy - x + y - 1)g(x,y) - \ln(2 + xy) \right| &\leq \\ &\leq \frac{(xy - x + y - 1)^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}}. \end{aligned}$$

<sup>53</sup> **DICA:** Use a desigualdade  $u^4 \leq u^4 + v^4 + w^4$ .

<sup>54</sup> **DICA:** Encontre a mudança de variável  $(u,v)$  tal que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} g(x,y) = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} g(u,v)$ . Para poder aplicar o **Teorema do Confronto** a  $g(u,v)$ , terá de substituir  $x$  e  $y$  por  $u$  e  $v$  na inequação dada.

17. Reformule e resolva o análogo do **Exercício 15.** em termos das noções de (des)continuidade dadas pela **Definição 3.6.1** & **Definição 3.6.2.**
18. Determine<sup>55</sup> o *conjunto dos pontos de continuidade*<sup>56</sup> das funções abaixo:

(a)  $f(x, y) = \frac{xy}{y-2x}$

(b)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(c)  $f(x, y) = \ln(xy)$

(d)  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \arcsin(y+3)$

(e)  $f(x, y, z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$

(f)  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-2x}}$

(g)  $f(x, y) = \ln[x \ln(y-x^2)]$

<sup>55</sup> Veja o **Exemplo 3.6.3.**

<sup>56</sup> As funções deste exercício foram retiradas da seção **2.6 Exercícios** (Capítulo **2 Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível**).

$$(h) \quad f(x, y) = \ln[(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)]$$

$$(i) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4 + y^6)}{x^4 + y^6} & \text{se } x > 0 \\ y + \sqrt{1 - x} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

$$(j) \quad f(x, y) = \sqrt{2x - x^2 - y^2}$$

$$(k) \quad f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

$$(l) \quad f(x, y) = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(m) \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(n) \quad f(x, y, z) = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9}$$

$$(o) \quad f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$(p) \quad f(x, y, z) = \sqrt{\log(x^2 + y^2 - 2z^2)}.$$

19. Determine, caso seja possível, o valor da constante  $\kappa \in \mathbb{R}$  para o qual as funções abaixo são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - e^{-xy}}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \kappa & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^3}{\sin(x^6 + y^6)} & \text{se } xy > 0 \\ (1 + \kappa xy)^{\frac{\pi}{3xy}} & \text{se } xy \leq 0. \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2\kappa x^2 - 2\kappa y^2}{\tan(\pi x^2 - \pi y^2)} & \text{se } x^2 \neq y^2 \\ \kappa^2 & \text{se } x^2 = y^2. \end{cases}$$



20. Demonstre as seguintes afirmações:

- (a) Seja  $g$  uma função contínua em  $(a, b, c)$  tal que  $g(a, b, c) = 0$ , e  $f$  uma função qualquer que satisfaz a desigualdade

$$\left| f(x, y, z) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \leq |g(x, y, z)|,$$

para todo o  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Prove que  $f$  é contínua em  $(a, b, c)$ . Calcule o valor  $f(a, b, c)$ .

- (b) Dê um exemplo de duas funções  $f$  e  $g$  tais que:
- (i)  $|f(x, y, z)| \leq |g(x, y, x)|$ , para todo o  $(x, y, z)$ ;
  - (ii)  $f$  não é contínua num ponto  $(a, b, c)$ ;
  - (iii)  $g(a, b, c) \neq 0$ .

# Derivação e Diferenciabilidade

*I recoil with dismay and horror at this lamentable plague of functions which do not have derivatives.*

*– Charles Hermite*

## 4.1 Conceito de Derivada Direcional

No estudo de funções de várias variáveis é muitas vezes importante estudar a variação de uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ) segundo um determinado caminho. No caso desse caminho corresponder à reta de equação

$$\mathcal{R} : X = A + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a variação

$$\Delta_{t\vec{v}} f(A) = f(A + t\vec{v}) - f(A)$$

pode ser interpretada como o deslocamento de  $f$  segundo a reta orientada  $\mathcal{R}$  que passa pelo ponto  $A$ , e tem a direção e sentido do vetor  $\vec{v}$ .

Para o caso em que  $\vec{v}$  é um *vetor unitário*<sup>1</sup>, podemos definir, para funções de várias variáveis, o análogo<sup>2</sup> de  $h'(a) = \frac{dh}{dt}(a)$  do seguinte modo:

**Definição 4.1.1 (Derivada Direcional)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ) uma função de várias variáveis,  $A$  um ponto interior<sup>3</sup> de  $\Omega$  e  $\vec{v}$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^n$ . A derivada de direcional de  $f$  no ponto  $A$  na direção  $\vec{v}$  é definida por*

$$D_{\vec{v}} f(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t},$$

*caso o limite exista.*

<sup>1</sup> Dizemos que  $\vec{v}$  é um vetor unitário quando  $\|\vec{v}\| = 1$ .

<sup>2</sup> Para evitar possíveis ambiguidades, foi utilizada a letra  $h$  para definir uma função de uma variável  $h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ , de domínio  $\Omega_h \subseteq \mathbb{R}$ .

<sup>3</sup> Dizemos que  $A \in \mathbb{R}^n$  é um ponto interior de  $\Omega$  se existe um  $r > 0$  tal que  $B_r(A) \subseteq \Omega$ , onde  $B_r(A)$  denota a bola de centro  $A$  e raio  $r$  introduzida na seção 3.1 **Definição de Limite (Capítulo 3 Limites e Continuidade)**.

De fato, no caso  $a \in \mathbb{R}$  ser um *ponto interior*<sup>4</sup> de  $\Omega_h$ , tem-se que  $\frac{dh}{dt}(a)$  pode ser definido como o limite

$$\frac{dh}{dt}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(a+t) - h(a)}{t},$$

uma vez que todo o *ponto interior* é também *ponto de acumulação*<sup>5</sup>.

Obviamente que  $\frac{dh}{dt}(a)$  pode ser interpretado como a *derivada direcional* de  $a$  na direção de  $\vec{v} = 1$ , uma vez que

$$\mathcal{R} : x = a + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

define uma reta em  $\mathbb{R}$  que passa pelo ponto  $a$  e  $|1| = 1$ .

Voltemos agora a nossa atenção para o caso de  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ser uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ . Com

<sup>4</sup>  $a \in \mathbb{R}$  é um *ponto interior* de  $\Omega_h$  se para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , existe um  $r > 0$  tal que  $|x - a| < r \Rightarrow a \in \Omega_h$ .

<sup>5</sup> Para o caso de  $x \neq a$ , a implicação  $|x - a| < r \Rightarrow a \in \Omega_h$  garante-nos que o conjunto  $\{x \in \Omega_h : 0 < |x - a| < r\}$  é não vazio.

base na fórmula fundamental da trigonometria, tem-se que todos os vetores unitários de  $\mathbb{R}^2$  podem ser representados na forma

$$\vec{v} = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

pelo que a expressão

$$D_{\vec{v}} f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cos(\theta), b + t \sin(\theta)) - f(a, b)}{t}$$

dá-nos todas as possibilidades para cálculo de derivadas direcionais em  $(a, b)$ , para qualquer vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$ .

### **Exemplo 4.1.1 (Função Quadrática)**

*Pretendemos calcular a derivada direcional da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  em  $(a, b)$  segundo a direção do vetor*

$$\vec{v} = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

*Com base nas substituições  $x = a + t \cos(\theta)$  e  $y = b + t \sin(\theta)$ , obtemos que*

$$\begin{aligned}
 f(a + t \cos(\theta), b + t \sin(\theta)) &= \\
 &= (a + t \cos(\theta))^2 + (b + t \sin(\theta))^2 \\
 &= a^2 + b^2 + t(2a \cos(\theta) + 2b \sin(\theta)) + \\
 &\quad + t^2(a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta)).
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 &\frac{f(a + t \cos(\theta), b + t \sin(\theta)) - f(a, b)}{t} = \\
 &= \frac{t(2a \cos(\theta) + 2b \sin(\theta))}{t} + \frac{t^2(a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta))}{t}.
 \end{aligned}$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cos(\theta), b + t \sin(\theta)) - f(a, b)}{t} &= \\
 &= 2a \cos(\theta) + 2b \sin(\theta).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\vec{v}} f(a, b) = 2a \cos(\theta) + 2b \sin(\theta).$$

**Exemplo 4.1.2** ( $D_{\vec{v}}f(A)$  não existe, em geral)

*Pretendemos agora averiguar a existência da direcional da função*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

*no ponto  $(0, 0)$ , segundo a direção*

$$\vec{v} = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

*Para  $xy = t^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \neq 0$ , temos <sup>6</sup> que*

$$f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) = \frac{2}{t^2 \sin(2\theta)}.$$

*Podemos assim concluir que para<sup>7</sup>*

$$\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

<sup>6</sup> Para obtermos a última igualdade, utilizámos a relação trigonométrica  $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ .

<sup>7</sup>  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  e  $\frac{3\pi}{2}$  são os zeros da função  $\cos(\theta) \sin(\theta)$  no intervalo  $[0, 2\pi[ = \{\theta \in \mathbb{R} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ .



a derivada direcional  $D_{\vec{v}}f(0,0)$  não existe, uma vez que o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t^3 \sin(2\theta)}$$

não existe.

No caso de  $\vec{v}$  ser igual a um dos vetores abaixo:

$$(1,0) = (\cos(0), \sin(0))$$

$$(0,1) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$(-1,0) = (\cos(\pi), \sin(\pi))$$

$$(0,-1) = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

podemos facilmente concluir que  $D_{\vec{v}}f(0,0) = 0$ , uma vez que para  $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

**Exemplo 4.1.3** ( $D_{\vec{v}}f(A)$  existe) Considere agora a função de duas variáveis  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Observe que para  $t \neq 0$

$$\begin{aligned} & f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) = \\ = & \begin{cases} \frac{t^2}{t(\cos(\theta) - \sin(\theta))} & \text{se } \cos(\theta) \neq \sin(\theta) \\ 0 & \text{se } \cos(\theta) = \sin(\theta). \end{cases} \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t \cos(\theta), 0 + t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\cos(\theta) - \sin(\theta)} & , \text{ se } \cos(\theta) \neq \sin(\theta) \\ 0 & , \text{ se } \cos(\theta) = \sin(\theta). \end{cases}$$

Desta última relação facilmente se conclui que <sup>8</sup>  
 $D_{\vec{v}} f(0, 0) = 0$ , quando<sup>9</sup>

$$\vec{v} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ ou } \vec{v} = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Para valores de  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$ , temos que a derivada direcional de  $f$  em  $(0, 0)$ , segundo a direção

<sup>8</sup> Observe que  $\cos(\theta) - \sin(\theta) = 0$  é equivalente a  $\tan(\theta) = 1$ . No intervalo  $[0, 2\pi[ = \{\theta \in \mathbb{R} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ , esta equação admite como soluções  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{5\pi}{4}$ .

<sup>9</sup> Observe que  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e que  $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$\vec{v} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  é igual a

$$D_{\vec{v}}f(0,0) = \frac{1}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}.$$

**Observação 4.1.1** ( $D_{\vec{v}}$  vs  $\frac{d}{dt}$ ) Definindo  $h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ) como

$$h(t) = f(A + t\vec{v}),$$

podemos concluir facilmente que  $D_{\vec{v}}f(A) = h'(0)$ , caso o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(0)}{t}$$

exista.

**Exemplo 4.1.4 (Função de Três variáveis)**

Consideremos a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = xy + z^2.$$

Para calcularmos a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(1, 2, -1)$ , segundo a direção do vetor unitário

$$\vec{v} = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

começamos por definir a função auxiliar<sup>10</sup>

$$h(t) = f\left(1 + \frac{t\sqrt{3}}{3}, 2 - \frac{t\sqrt{3}}{3}, -1 + \frac{t\sqrt{3}}{3}\right).$$

Derivando  $h$  em ordem a  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \overbrace{\left(1 + \frac{t\sqrt{3}}{3}\right)}^{=x} \overbrace{\left(2 - \frac{t\sqrt{3}}{3}\right)}^{=y} + \overbrace{\left(-1 + \frac{t\sqrt{3}}{3}\right)^2}^{=z^2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \left(2 - \frac{t\sqrt{3}}{3}\right) - \left(1 + \frac{t\sqrt{3}}{3}\right) + 2\left(-1 + \frac{t\sqrt{3}}{3}\right) \right). \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Observe que  $(x, y, z) = (1, 2, -1) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  é equivalente

a escrevermos  $x = 1 + \frac{t\sqrt{3}}{3}$ ,  $y = 2 - \frac{t\sqrt{3}}{3}$  e  $z = -1 + \frac{t\sqrt{3}}{3}$ .

Fazendo  $t = 0$  na igualdade anterior, resulta que  $h'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Concluimos assim que  $D_{\vec{v}}f(1, 2, -1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

### Observação 4.1.2 (Direções Não Unitárias)

Note-se que o conceito de derivada direcional relativamente a um vetor unitário, ou seja, para definirmos  $D_{\vec{v}}f(A)$  em termos do limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t}$$

considerámos implicitamente que  $X = A + t\vec{v}$  varia ao longo de uma direção, de ordem de grandeza  $\|\vec{v}\| = 1$ .

Tal como ilustrado no **Exemplo 4.1.1**, **Exemplo 4.1.2** & **Exemplo 4.1.3**, a condição  $\|\vec{v}\| = 1$  resulta da necessidade de se poder comparar a variação [infinitesimal] de  $f$  ao longo de direções diferentes.

Ou seja, quando  $X$  varia ao longo de duas ou mais direções, é necessário supor que aquela variação é reali-

zada com a mesma rapidez – que então se convencionou ser o vetor unitário.

Assim, se a direção segundo a qual se pretende calcular a derivada for indicada através de um vetor não unitário, é preciso normalizar este vetor de modo a obter um vetor unitário<sup>11</sup>:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Em particular, para a mudança de variável  $t = s\|\vec{v}\|$ , obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(A + t \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) - f(A)}{t} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f\left(A + s \vec{v}\right) - f(A)}{s\|\vec{v}\|}.$$

<sup>11</sup> Pelas propriedades de norma podemos facilmente concluir que  $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$ . No caso de  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , a igualdade  $\|\lambda \vec{v}\| = 1$  é satisfeita para  $\lambda = \frac{1}{\|\vec{v}\|}$ .

Com base na **Observação 4.1.1** & **Observação 4.1.2** podemos obter a seguinte generalização para o conceito de *derivada direcional*.

**Definição 4.1.2 (Generalização da Definição 4.1.1)**

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ) uma função de várias variáveis,  $A$  um ponto interior<sup>12</sup> de  $\Omega$ . A derivada de direcional de  $f$  no ponto  $A$  na direção  $\vec{v}$  é definida por

$$D_{\vec{v}}f(A) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \frac{d}{dt}[f(A + t\vec{v})]_{t=0},$$

caso a função  $h(t) = f(A + t\vec{v})$  seja diferenciável em  $t = 0$ .

<sup>12</sup> Dizemos que  $A \in \mathbb{R}^n$  é um ponto interior de  $\Omega$  se existe um  $r > 0$  tal que  $B_r(A) \subseteq \Omega$ , onde  $B_r(A)$  denota a bola de centro  $A$  e raio  $r$  introduzida na seção 3.1 **Definição de Limite (Capítulo 3 Limites e Continuidade)**.



**Exemplo 4.1.5 (Duas Formas de Calcular  $D_{\vec{v}}f(A)$ )**

Pretende-se calcular a derivada direcional de  $f(x, y) = xy$  no ponto  $(1, 0)$ , e segundo a direção do vetor  $\vec{v} = (1, -1)$ .

Uma vez que<sup>13</sup>  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2} \neq 1$  não podemos aplicar diretamente a **Definição 4.1.1**. Temos então duas possibilidades para calcular  $D_{\vec{v}}f(1, 0)$ :

(i) CALCULAR  $D_{\vec{u}}f(1, 0)$  PARA  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ :

Para este caso, definimos a função auxiliar

$$h(t) = \overbrace{\left(1 + \frac{t\sqrt{2}}{2}\right)}^{=x} \overbrace{\left(-\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)}^{=y}$$

para pontos  $(x, y)$  da forma

$$(x, y) = (1, 0) + t \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(1 + \frac{t\sqrt{2}}{2}, -\frac{t\sqrt{2}}{2}\right).$$

<sup>13</sup> Para  $\vec{v} = (1, -1)$ , temos  $\|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ .

*Daqui facilmente se conclui que a derivada direcional de  $f$  em  $(1, 0)$  na direção  $\vec{v} = (1, -1)$  é igual a  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , uma vez que*

$$\begin{aligned} h'(0) &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{t\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \frac{t\sqrt{2}}{2} \right) \right]_{t=0} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

(ii) CALCULAR  $D_{\vec{u}} f(1, 0)$  VIA A **Definição 4.1.2:**  
*Para este caso, definimos a função auxiliar*

$$h(t) = \overbrace{(1+t)}^{=x} \overbrace{(-t)}^{=y} = -t - t^2$$

*para pontos  $(x, y)$  da forma*

$$(x, y) = (1, 0) + t\vec{v} = (1+t, -t).$$

*De seguida, calculamos  $h'(0)$ , e dividimos o resultado obtido por  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ :*

$$h'(0) = -1 \Rightarrow D_{\vec{v}} f(1, 0) = \frac{h'(0)}{\|\vec{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Exemplo 4.1.6 (Função Quadrática de  $n$  Variáveis)**

<sup>14</sup> Para um ponto genérico de  $\mathbb{R}^n$ , de coordenadas  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , considere a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Se para um ponto  $A$  de coordenadas  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , e um vetor  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  considerarmos a substituição  $X = A + t\vec{v}$  i.e.

$$x_i = a_i + tv_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

obtemos, com base nas igualdades

$$\frac{d}{dt}[(a_i + tv_i)^2]_{t=0} = 2a_i v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

<sup>14</sup> Este exemplo corresponde a uma generalização do **Exemplo 4.1.1**

que

$$D_{\vec{v}}f(A) = \frac{2a_1v_1 + 2a_2v_2 + \dots + 2a_nv_n}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}}.$$

Em termos da noção de produto escalar introduzida na seção 1.3 **Produto Escalar, Norma e Distância do Capítulo 1 Vetores e a Geometria do Espaço**  $\mathbb{R}^n$ , as fórmulas de  $f(X)$  e  $D_{\vec{v}}f(A)$  podem ser reescritas numa forma mais compacta<sup>15</sup>:

$$f(X) = \|\overrightarrow{OX}\|^2 \quad \& \quad D_{\vec{v}}f(A) = \frac{2\overrightarrow{OA} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|},$$

onde  $O = (0, 0, \dots, 0)$  é a origem do referencial cartesiano de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\overrightarrow{OX}$ ,  $\overrightarrow{OA}$  os vetores de coordenadas<sup>16</sup>

$$\overrightarrow{OX} = (x_1 - 0, x_2 - 0, \dots, x_n - 0)$$

$$\overrightarrow{OA} = (a_1 - 0, a_2 - 0, \dots, a_n - 0).$$

<sup>15</sup> Observe que para  $X = A + t\vec{v}$ ,  $f(A + t\vec{v}) = \|\overrightarrow{OA} + t\vec{v}\|^2$ .

<sup>16</sup> Observe que  $\overrightarrow{OX} = X - O$  e  $\overrightarrow{OA} = A - O$ .

A descrição anterior permite-nos adicionalmente estabelecer a seguinte relação tangível entre os conceitos de derivada direcional<sup>17</sup> e projeção ortogonal<sup>18</sup>:

$$f(X) = \|\overrightarrow{OX}\|^2 \implies D_{\overrightarrow{v}} f(A) = \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{2} \text{proj}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{OA}.$$

## 4.2 Derivadas Parciais e Vetor Gradiente

No caso de  $\overrightarrow{v}$  coincidir com um dos vetores  $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$  da base canônica<sup>19</sup> de  $\mathbb{R}^n$ , a derivada direcional  $D_{\overrightarrow{v}} f(A)$  é designada por *derivada parcial*.

<sup>17</sup> Isto é, para  $f(X) = \|\overrightarrow{OX}\|^2$ , a derivada direcional  $D_{\overrightarrow{v}} f(A)$  é, a menos da constante  $\frac{\|\overrightarrow{v}\|}{2}$ , 'igual' à projeção ortogonal  $\text{proj}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{OA}$  (faça  $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ ).

<sup>18</sup> Revisite a seção 1.4 **Projeção Ortogonal (Capítulo 1 Vetores e a Geometria do Espaço  $\mathbb{R}^n$ )**.

<sup>19</sup> Observe que os vetores da base canônica satisfazem a relação de perpendicularidade  $\overrightarrow{e_i} \perp \overrightarrow{e_j}$ , para  $i \neq j$ .

Mais concretamente, para<sup>20</sup>

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

tem-se que<sup>21</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) := D_{\vec{e}_i} f(A),$$

ou seja, para  $A = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$  as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$  correspondem aos limites da forma

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

Note-se que no limite acima, a variação das componentes  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$  de  $A$  dá zero, com excepção da componente  $a_i$ , cuja variação é igual a  $t$ .

<sup>20</sup> O número 1 aparece na  $i$ -ésima posição do vetor  $\vec{e}_i$ .

<sup>21</sup> Observe que  $\|\vec{e}_i\| = 1$ , para todo o  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Note-se ainda que<sup>22</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} := D_{\vec{i}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} := D_{\vec{j}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} := D_{\vec{k}},$$

onde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  denotam os *vetores unitários* que definem os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respetivamente.

#### **Observação 4.2.1 (Existência Derivadas Parciais)**

*Voltemos a nossa atenção para o Exemplo 4.1.2 & Exemplo 4.1.3:*

(i) *No caso da função  $f$  do Exemplo 4.1.2:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

<sup>22</sup> Revisite o **Exemplo 1.4.1** da seção 1.3 **Produto Escalar, Norma e Distância** (Capítulo 1 **Vetores e a Geometria do Espaço  $\mathbb{R}^n$** ).

verificámos que  $D_{\vec{v}}f(0,0) = 0$  para vetores  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^2$  da forma

$$\begin{aligned}(1,0) &= (\cos(0), \sin(0)) \\ (0,1) &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ (-1,0) &= (\cos(\pi), \sin(\pi)) \\ (0,-1) &= \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Em particular,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{\vec{i}}f(0,0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = D_{\vec{j}}f(0,0)$  existem e dão zero.

(ii) No caso da função  $f$  do **Exemplo 4.1.3**:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

verificámos que  $D_{\vec{v}}f(0,0)$  existe, independentemente do vetor  $\vec{v}$ . Em particular,



$$f_x(0,0) = D_{\vec{i}} f(0,0) \text{ e } f_y(0,0) = D_{\vec{j}} f(0,0)$$

*também existem.*

*Adicionalmente, das igualdades*

$$\vec{i} = (\cos(0), \sin(0)) \text{ \& } \vec{j} = \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

*resulta que  $f_x(0,0) = 1$  e  $f_y(0,0) = -1$ .*

Existem várias notações alternativas para as derivadas parciais, que nos permitem abreviar o símbolo  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Abaixo pode encontrar algumas delas:

$$\begin{aligned} f_{x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad [x_{n+1} = f(X)] \\ \partial_{x_i} f &= \frac{\partial f}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

**Observação 4.2.2 (Nota Histórica)** *Foi o matemático Adrien-Marie Legendre o primeiro a adotar a notação  $\partial$ :*

Pour eviter toute ambiguité, je représentarie par  $\frac{\partial u}{\partial x}$  le coefficient de  $x$  du de  $x$  dans la différence de  $u$ , & par  $\frac{du}{dx}$  la différence complete de  $u$  divisée par  $dx$ .

–Legendre, Adrien-Marie. 'Mémoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le Calcul des Variations'. Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Année M. DCCLXXXVI (1786), pp. 7-37, Paris, M. DC-CXXXVIII (1788)

*Ao fim de algum tempo, Legendre acabou por abandonar a notação que ele próprio havia introduzido para definir o conceito de derivada parcial. Anos mais tarde, o matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi reintroduziu o símbolo  $\partial$ :*

Sed quia uncorum accumulatio et legenti et scribenti molestior fieri solet, praetuli characteristicam *d* differentialia vulgaria, differentialia autem partialia characteristicam  $\partial$  denotare.

–**Jacobi, Carl GJ. "De formatione et proprietatibus Determinatum."**Journal für die reine und angewandte Mathematik 22 (1841): 285-318.

*Devido a este manuscrito<sup>23</sup> influente de Jacobi, o símbolo  $\partial$  (letra *d* do alfabeto cursivo russo<sup>24</sup>) passou também a ser conhecido por delta de Jacobi.*

<sup>23</sup> O manuscrito de Jacobi pode ser baixado gratuitamente, a partir do link <https://eudml.org/doc/147138>.

<sup>24</sup> Significado de 'cursivo' – <https://www.priberam.pt/dlpo/cursivo>.

**Definição 4.2.1 (Gradiente)** Dada uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ) de variável  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , e um ponto  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Definimos o gradiente de  $f$  em  $A$  como sendo o vetor<sup>25</sup>  $\nabla f(A)$ , de coordenadas

$$\nabla f(A) = \left( \partial_{x_1} f(A), \partial_{x_2} f(A), \dots, \partial_{x_n} f(A) \right),$$

no caso de existirem todas as derivadas parciais

$$\partial_{x_i} f(A) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

**Observação 4.2.3 (Regra Prática)** Para calcular a derivada parcial relativamente a uma variável  $x_i$ , podemos tratar 'simbolicamente' restantes variáveis  $x_j$  ( $j \neq i$ ) como constantes.

Na tabela abaixo vamos exemplificar o cálculo das derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  de uma função

$$f(X) := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

<sup>25</sup> Também é comum utilizar a notação  $\text{grad} f(A)$  ao invés de  $\nabla f(A)$

para casos já estudados em Funções de Uma Variável (FUV). Em concreto, para casos em que  $f$  é definida pela regra de composição  $f(X) = h(g(X))$ :

$h'(t) = \frac{dh}{dt}$	$\partial_{x_j} f := \frac{\partial f}{\partial x_j}$
$\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}$	$\partial_{x_j} \left(\frac{1}{g(X)}\right) = -\frac{1}{g(X)^2} \partial_{x_j} g$
$\left(\frac{1}{t^n}\right)' = -\frac{n}{t^{n+1}}$	$\partial_{x_j} \left(\frac{1}{g(X)^n}\right) = -\frac{1}{g(X)^{n+1}} \partial_{x_j} g$
$(t^\kappa)' = \kappa t^{\kappa-1}$	$\partial_{x_j} (g(X)^\kappa) = \kappa g(X)^{\kappa-1} \partial_{x_j} g$
$(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$	$\partial_{x_j} (\sqrt{g(X)}) = \frac{1}{2\sqrt{g(X)}} \partial_{x_j} g$
$(\sqrt[n]{t})' = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}$	$\partial_{x_j} (\sqrt[n]{g(X)}) = \frac{1}{n} g(X)^{\frac{1}{n}-1} \partial_{x_j} g$
$(a^t)' = \ln(a) a^t$	$\partial_{x_j} (a^{g(X)}) = \ln(a) a^{g(X)} \partial_{x_j} g$
$(\log_a(t))' = \frac{1}{\ln(a)t}$	$\partial_{x_j} (\log_a(g(X))) = \frac{1}{\ln(a)g(X)} \partial_{x_j} g$
$(\sin(t))' = \cos(t)$	$\partial_{x_j} (\sin(g(X))) = \cos(g(X)) \partial_{x_j} g$
$[\cos(t)]' = -\sin(t)$	$\partial_{x_j} (\cos(g(X))) = -\sin(g(X)) \partial_{x_j} g$
$[\tan(t)]' = \sec^2(t)$	$\partial_{x_j} (\tan(g(X))) = \sec^2(g(X)) \partial_{x_j} g$
$[\cot(t)]' = \operatorname{cosec}^2(t)$	$\partial_{x_j} (\cot(g(X))) = \operatorname{cosec}^2(g(X)) \partial_{x_j} g$

De modo a entendermos a regra prática dada pela **Observação 4.2.3**, vamos ilustrar a construção de  $f_x$

e de  $f_y$  para o caso de  $f$  ser uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ .

Ao fazermos variar  $(x, y)$  segundo as direções  $\vec{i} = (1, 0)$  (eixo  $Ox$ ) e  $\vec{j} = (0, 1)$  (eixo  $Oy$ ), estamos a definir duas novas funções reais de variável real,  $f_x$  e  $f_y$ , respetivamente:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} \\f_y(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t}.\end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variável  $u = x + t$  e  $v = y + t$ , obtemos que  $f_x$  e  $f_y$  podem ser reescritas em termos dos seguintes limites:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u, y) - f(x, y)}{u - x} \\f_y(x, y) &= \lim_{v \rightarrow y} \frac{f(x, v) - f(x, y)}{v - y}.\end{aligned}$$

No caso dos limites acima existirem, resulta que

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \left[ \frac{df}{du}(u, y) \right]_{u=x} \\f_y(x, y) &= \left[ \frac{df}{dv}(x, v) \right]_{v=y}.\end{aligned}$$

Para o caso de  $f(x, y) = h(g(x, y))$ , onde  $g$  é também uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ , podemos reescrever os limites acima na seguinte forma:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{h(g(u, y)) - h(g(x, y))}{g(u, y) - g(x, y)} \frac{g(u, y) - g(x, y)}{u - x} \\f_y(x, y) &= \lim_{v \rightarrow y} \frac{h(g(x, v)) - h(g(x, y))}{g(x, v) - g(x, y)} \frac{g(x, v) - g(x, y)}{v - y}.\end{aligned}$$

Em particular, se  $g_x(x, y)$ ,  $g_y(x, y)$  e  $h'(g(x, y))$  existem<sup>26</sup>, temos que

$$\begin{aligned}g_x(x, y) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u, y) - g(x, y)}{u - x} \\g_y(x, y) &= \lim_{v \rightarrow y} \frac{g(x, v) - g(x, y)}{v - y} \\h'(g(x, y)) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{h(g(u, y)) - h(g(x, y))}{g(u, y) - g(x, y)} \\&= \lim_{v \rightarrow y} \frac{h(g(x, v)) - h(g(x, y))}{g(x, v) - g(x, y)}.\end{aligned}$$

As identidades acima garantem a existência das funções  $f_x$  e  $f_y$ . Com base nas propriedades dos limites, resulta que  $f_x$  e  $f_y$  são unicamente determinadas

<sup>26</sup> Observe que  $h'(g(x, y))$  é calculado a partir da regra

$$h'(g(x, y)) = \left[ \frac{dh}{dt} \right]_{t=g(x, y)}.$$



pelas fórmulas<sup>27</sup>

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= h'(g(x, y))g_x(x, y) \\f_y(x, y) &= h'(g(x, y))g_y(x, y).\end{aligned}$$

Adicionalmente, o gradiente de  $f$  em  $(x, y)$  pode ser calculado a partir da fórmula<sup>28</sup>:

$$\nabla f(x, y) = \left( h'(g(x, y))g_x(x, y), h'(g(x, y))g_y(x, y) \right)$$

i.e.  $\nabla f(x, y) = h'(g(x, y))\nabla g(x, y)$ .

<sup>27</sup> Em termos da notação  $\partial$  de Jacobi, as derivadas da função  $f(x, y) = h(g(x, y))$  podem ser representadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dh}{dg} \frac{\partial g}{\partial x} \text{ \& } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dh}{dg} \frac{\partial g}{\partial y}.$$

<sup>28</sup> Neste passo utilizámos a identidade  $(\lambda v_1, \lambda v_2) = \lambda(v_1, v_2)$ , para o caso de  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  ser um vetor de  $\mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Em particular, considerámos as substituições

$$(v_1, v_2) = (g_x(x, y), g_y(x, y)) \text{ e } \lambda = h'(g(x, y)).$$

**Exemplo 4.2.1 (Funções de Duas Variáveis)** Na tabela abaixo pode encontrar vários exemplos de funções, calculados com base na **Observação 4.2.3**:

$f(x, y)$	$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$
$x^2 + y^2 + xy + x$	$2x + y + 1$	$2y + x$
$\sqrt{2x^2 + 3y^2}$	$\frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}$	$\frac{3y}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}$
$\arcsin(x^2)$	$\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$	0
$\arctan(e^y)$	0	$\frac{e^y}{1+e^{2y}}$
$\ln(xy)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
$e^{(x+y)^2}$	$2(x+y)e^{(x+y)^2}$	$2(x+y)e^{(x+y)^2}$
$y \cos(x) + \tan(y)$	$-y \sin(x)$	$\cos(x) + \sec^2(y)$
$y \sin(xy)$	$y^2 \cos(xy)$	$xy \cos(xy)$
$\frac{xy}{y-2x}$	$\frac{y^2}{(y-2x)^2}$	$\frac{-2x^2}{(y-2x)^2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}$	$\frac{y}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}$
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\frac{-y}{x^2+y^2}$	$\frac{x}{x^2+y^2}$
$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$	$\frac{-y^2}{(x^2+y^2) y }$	$\frac{xy}{(x^2+y^2) y }$

A próxima proposição é uma generalização para dimensões superiores da igualdade

$$\nabla f(x, y) = h'(g(x, y))\nabla g(x, y) \quad [f(x, y) = h(g(x, y))].$$

**Proposição 4.2.1 (Gradiente da Função Composta)**

*Dada uma função  $g : \Omega_g \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^n$ ) de variável  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , uma função  $h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega_h \subseteq \mathbb{R}$ ) e um ponto  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .*

*Se  $\nabla g(A)$  e  $h'(g(A))$  existem, então  $\nabla f(A)$  também existe e é dado por*

$$\nabla f(A) = h'(g(A))\nabla g(A).$$

**Exemplo 4.2.2 (Funções de Três Variáveis)** *A função  $f$  nas variáveis  $x, y$  e  $z$  tal que*

$$f(x, y, z) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 2z^2)}$$

*pode ser escrita como a composição da função  $h(t) = \sqrt{\ln(t)}$  com a função  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ .*

*Das identidades*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \quad \& \quad \frac{\partial g}{\partial z} = -4z$$

resulta que  $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -4z)$ .

Por outro lado, temos que

$$h'(t) = \frac{\ln'(t)}{2\sqrt{\ln(t)}} = \frac{1}{2t\sqrt{\ln(t)}}.$$

Daqui se conclui que

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= h'(g(x, y, z))\nabla g(x, y, z) \\ &= \frac{1}{(2x^2 + 2y^2 - 4z^2)\sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 2z^2)}} \times \\ &\times (2x, 2y, -4z).\end{aligned}$$

**Exemplo 4.2.3 (Funções de Três Variáveis II)** A função  $f$  nas variáveis  $x, y$  e  $z$  tal que

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}$$

pode ser reescrita como  $f(x, y, z) = \sqrt{g(x, y, z)}$ , onde

$$g(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1 - \frac{3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Daqui resulta que<sup>29</sup>

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{1}{2\sqrt{g(x, y, z)}}(g_x(x, y, z), g_y(x, y, z), g_z(x, y, z)) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - 2z^2}} \times \\ &\quad \times \left( \frac{6xz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{6yz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-6z(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right) \\ &= \frac{3}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3 (x^2 + y^2 - 2z^2)}} (xz^2, yz^2, -z(x^2 + y^2)).\end{aligned}$$

<sup>29</sup> Para simplificar os cálculos tediosos, fez-se uso da propriedade  $(\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3) = \lambda(v_1, v_2, v_3)$  para

$$(v_1, v_2, v_3) = (xz^2, yz^2, -z(x^2 + y^2)) \text{ e } \lambda = \frac{6}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

**Observação 4.2.4 (GeoGebra)** A verificação dos cálculos das derivadas parciais realizados no **Exemplo 4.2.1**, **Exemplo 4.2.2** & **Exemplo 4.2.3** pode ser realizado em GeoGebra<sup>30</sup>, com recurso ao comando

*Derivada[ <Função>, <Variável> ]*

Nos ficheiros GeoGebra

***arccosExemplo421.ggb & Exemplo422.ggb***

pode encontrar uma ilustração destes comandos para as funções

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ e } \sqrt{\ln(x^2+y^2-2z^2)}.$$

<sup>30</sup> **App de GeoGebra:** <https://www.geogebra.org/apps/>

### 4.3 Diferenciabilidade

Em funções de uma variável foi introduzido o conceito de diferenciabilidade no ponto com base na existência do limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(a+t) - h(a)}{t}$$

num ponto  $a \in \Omega_h$ , onde  $\Omega_h \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo aberto e  $h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ .

Uma forma alternativa de introduzir o conceito de *diferenciabilidade* passa por fixar condições sobre uma função<sup>31</sup>  $\varepsilon(t)$ , para as quais

$$h(a+t) = h(a) + h'(a)t + \varepsilon(t).$$

Ou seja, pretendemos determinar em que condições o gráfico da função  $h$  pode ser aproximado numa

<sup>31</sup> Conhecida por erro de aproximação linear.

vizinhança do ponto  $a$  pela equação da *reta tangente*<sup>32</sup> ao gráfico de  $h$  no ponto  $(a, h(a))$ .

Com base na propriedade **PL1** da **Proposição 3.4.1** ( $n = 1$ ), a existência do limite anterior pode ser provada com base na igualdade

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{h(a+t) - h(a)}{t} - \ell \right| = 0,$$

onde  $\ell$  denota o valor do limite da *razão incremental*<sup>33</sup>

$$\frac{h(a+t) - h(a)}{t},$$

para valores de  $u$  assintoticamente próximos de zero.

Note ainda que  $\left| \frac{h(a+t) - h(a)}{t} - \ell \right|$  pode ainda

<sup>32</sup> Para  $t = x - a$ , tem-se que  $y = h(a) + h'(a)(x - a)$  é a equação da *reta tangente* ao gráfico de  $h$  no ponto  $(a, h(a))$ .

<sup>33</sup> A *razão incremental* corresponde ao declive da *reta secante* ao gráfico de  $h$ , nos pontos de coordenadas  $(a, h(a))$  e  $(a+t, h(a+t))$ .



escrever-se numa das seguintes formas:

$$\begin{aligned}\left| \frac{h(a+t) - h(a)}{t} - \ell \right| &= \left| \frac{h(a+t) - h(a) - \ell t}{t} \right| \\ &= \frac{|h(a+t) - h(a) - \ell t|}{|t|}\end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir provar que  $\ell = h'(a)$  é o valor do limite

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{h(a+t) - h(a)}{t}$$

é equivalente provar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$$

para  $\varepsilon(t) = h(a+t) - h(a) - h'(a)t$ , uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{h(a+t) - h(a)}{t} - h'(a) \right| &= 0 \\ \iff \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\varepsilon(t)}{t} \right| &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon(t)|}{|t|} = 0\end{aligned}$$

**Observação 4.3.1 (Linearização)** *Em termos geométricos, provamos que a aproximação do gráfico de uma função  $h$ , numa vizinhança de  $a$ , pela reta tangente  $y = h(a) + h'(a)t$ :*

$$h(a + t) \approx h(a) + h'(a)t$$

*corresponde essencialmente à linearização de  $h$  em torno de  $a$ . Adicionalmente, a equação*

$$h(a + t) = h(a) + h'(a)t + \varepsilon(t)$$

*definida com base na condição de limite*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$$

*dá-nos a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função  $h$ , numa vizinhança de  $a$ .*

Seja agora  $f$  uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ , e  $z = f(x, y)$ . Note que a variações  $u$  e  $v$  das variáveis independentes  $x$  e  $y$ , respetivamente, corresponde a uma variação na variável dependente  $z$ :

$$\Delta z = f(x + u, y + v) - f(x, y).$$

Esta última equação pode ainda ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + u, y + v) - f(x, y + v) + \\ &+ f(x, y + v) - f(x, y).\end{aligned}$$

Tendo como referência as igualdades

$$\begin{aligned}f_x(x, y + v) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x + u, y + v) - f(x, y + v)}{u} \\ f_x(x, y) &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x, y + v) - f(x, y)}{v}\end{aligned}$$

podemos recorrer à fórmula de Taylor de ordem 1 para obter uma aproximação do gráfico de  $f$  nos

pontos  $(x + u, y + v)$  e  $(x, y + v)$ , com base nas retas de equação

$$z = f(x, y + v) + f_x(x, y + v)u$$

$$z = f(x, y) + f_y(x, y)v.$$

Na mesma ordem de ideias do que foi deduzido para o caso unidimensional, isto é equivalente a garantir a existência de duas funções,  $\varepsilon_1(u)$  e  $\varepsilon_2(v)$  respetivamente tais que

$$f(x + u, y + v) - f(x, y + v) = f_x(x, y + v)u + \varepsilon_1(u)$$

$$f(x, y + v) - f(x, y) = f_y(x, y)v + \varepsilon_2(v).$$

Daqui resulta que

$$\Delta z = f_x(x, y + v)u + f_y(x, y)v + \varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(v),$$

onde  $\varepsilon_1(u)$  e  $\varepsilon_2(v)$  satisfazem as condições

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(u)}{u} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(v)}{v} = 0.$$

$\begin{matrix} 252 & | & 565 \end{matrix}$

Para o caso de as funções  $f_x(x, y)$  e  $f_y(x, y)$  existirem, a dedução anterior conduz-nos naturalmente ao conceito de diferenciabilidade em  $\mathbb{R}^2$ , em termos do *quociente de Newton*

$$\frac{\Delta z - f_x(x, y)u - f_y(x, y)v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Este conceito corresponde à seguinte definição:

### **Definição 4.3.1 (Função Diferenciável em $\mathbb{R}^2$ )**

Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto<sup>34</sup>  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ , e  $(a, b)$  um ponto de  $\Omega$ .

No caso de as funções  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  e  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  estarem definidas em  $(a, b)$ , dizemos que  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$  quando

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+u, b+v) - f(a, b) - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

.

<sup>34</sup> Dizemos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto se para todo o ponto  $A \in \Omega$ , existe um  $r > 0$  tal que  $B_r(A) \subseteq \Omega$ .

Observe<sup>35</sup> que para  $\Delta z = f(a+u, b+v) - f(a, b)$

$$\lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (0,0) \\ v=0}} \frac{\Delta z - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(u)}{|u|}$$

$$\lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (0,0) \\ u=0}} \frac{\Delta z - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(v)}{|v|},$$

onde

$$\varepsilon_1(u) = f(a+u, b) - f(a, b) - f_x(a, b)u$$

$$\varepsilon_2(v) = f(a, b+v) - f(a, b) - f_y(a, b)v$$

denotam os erros de aproximação linear.

<sup>35</sup> As notações  $\lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (0,0) \\ v=0}} e \lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (0,0) \\ u=0}}$  foram utilizadas para denotar que estamos calculando os limite de  $(u, v)$  segundo os caminhos

$$\mathcal{C}_v = \{(u, 0) : u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} e \mathcal{C}_u = \{(0, v) : v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

respetivamente

Por outro lado, temos que  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$  existem se e só se os limites abaixo existirem:

$$\begin{aligned}f_x(a, b) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(a+u, b) - f(a, b)}{u} \\f_y(a, b) &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(a, b+v) - f(a, b)}{v}.\end{aligned}$$

Tomando como referência as igualdades

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(u)}{|u|} &= \lim_{u \rightarrow 0} \left| \frac{f(a+u, b) - f(a, b)}{u} - f_x(a, b) \right| \\ \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(v)}{|v|} &= \lim_{v \rightarrow 0} \left| \frac{f(a, b+v) - f(a, b)}{v} - f_y(a, b) \right|\end{aligned}$$

podemos estabelecer as seguintes correspondências entre existência de  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$  e os limites de

$$\frac{\Delta z - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

quando  $(u, v)$  se aproxima de  $(0, 0)$  segundo os eixos  $Ou$  ( $v = 0$ ) e  $Ov$  ( $u = 0$ ).

- (i) **EXISTÊNCIA DE  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  EM  $(a, b)$ :** Provar que  $f_x(a, b)$  existe é equivalente a provar que

$$\lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (0,0) \\ v=0}} \frac{\Delta z - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

- (ii) **EXISTÊNCIA DE  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  EM  $(a, b)$ :** Provar que  $f_y(a, b)$  existe é equivalente a provar que

$$\lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (0,0) \\ u=0}} \frac{\Delta z - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

A dedução obtida anteriormente conduz-nos à seguinte proposição:



**Proposição 4.3.1 (Diferenciabilidade vs  $\frac{\partial}{\partial x}$  &  $\frac{\partial}{\partial y}$ )**

*As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Toda a função  $f$  diferenciável em  $(a, b)$  admite derivadas parciais  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  e  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  em  $(a, b)$ .*
- (ii) *Se  $f_x(a, b)$  ou  $f_y(a, b)$  não existem, então  $f$  não é diferenciável em  $(a, b)$ .*

**Observação 4.3.2 (Diferenciabilidade  $\implies \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ )**

*Como mostrámos atrás, o conceito de derivada parcial no ponto é um caso particular de diferenciabilidade no ponto. Em concreto, mostrámos essencialmente que a diferenciabilidade de  $f$  em  $(a, b)$  assegura automaticamente a existência de  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  e  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  em  $(a, b)$ .*

**Observação 4.3.3 (Variação Infinitesimal)**

*Podemos estudar a continuidade e a diferenciabilidade de uma função  $f$  de duas com base na variação*

$$\Delta z = f(a + u, b + v) - f(a, b)$$

*e na função de erro*

$$\varepsilon(u, v) = \Delta z - f(a, b) - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v.$$

*Em concreto:*

- (i) *Mostrar que  $f$  é **contínua** em  $(a, b)$  é equivalente a provar que*
- $$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \Delta z = 0, \text{ uma vez que}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} f(a + u, b + v).$$

- (ii) *Mostrar que  $f$  é **diferenciável** em  $(a, b)$  é equivalente a provar que*

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

258 | 565

Na sequência da **Observação 4.3.3**, observe que a variação  $\Delta z$  pode ser reescrita nas seguintes formas, para o caso de  $(u, v) \neq (0, 0)$ :

$$\begin{aligned}\Delta z &= \varepsilon(u, v) + f_x(a, b)u + f_y(a, b)v \\ &= \frac{\varepsilon(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sqrt{u^2 + v^2} + f_x(a, b)u + f_y(a, b)v\end{aligned}$$

Das igualdades<sup>36</sup>

$$\begin{aligned}\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \sqrt{u^2 + v^2} &= 0 \\ \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} (f_x(a, b)u + f_y(a, b)v) &= 0\end{aligned}$$

podemos adicionalmente concluir, pelas propriedades de limite, que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0 \implies \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \Delta z = 0.$$

<sup>36</sup> Estamos a assumir que  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$  são constantes.

ou equivalentemente, que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \Delta z \neq 0 \implies \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(u,v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \neq 0.$$

Com base nas implicações acima, podemos formular a seguinte proposição:

**Proposição 4.3.2** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Toda a função  $f$  diferenciável em  $(a, b)$  é contínua em  $(a, b)$ .*
- (ii) *Toda a função  $f$  descontínua em  $(a, b)$  **não** é diferenciável em  $(a, b)$ .*

**Exemplo 4.3.1 (Item (i) da Proposição 4.3.2)**

Começemos por verificar que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, y) \\ ye^{-\frac{1}{y^2}} & , \text{ se } (0, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciável em  $(0, 0)$ .

Com base na identidade<sup>37</sup>  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0$  obtemos que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u, 0) - f(0, 0)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{ue^{-\frac{1}{u^2}} - 0}{u} = 0$$

<sup>37</sup> Esta identidade pode ser deduzida por aplicação do Teorema do Confronto, uma vez que  $0 < e^{-\frac{1}{t^2}} < t^2$ , para todo o  $t \neq 0$ , e  $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 = 0$ .

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(0, v) - f(0, 0)}{v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{ve^{-\frac{1}{v^2}} - 0}{v} = 0.$$

donde se conclui que  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ .

Observe agora que para  $(u, v) \neq (0, 0)$  se tem

$$\Delta z = f(u, v) - f(0, 0) = ue^{-\frac{1}{u^2}}$$

e

$$\frac{\Delta z - uf_x(0, 0) - vf_y(0, 0)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} e^{-\frac{1}{u^2}}.$$

Da desigualdade  $|u| \leq \sqrt{u^2 + v^2}$  resulta que  $\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$  é uma função limitada, uma vez que

$$\left| \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right| = \frac{|u|}{\sqrt{u^2 + v^2}} \leq 1.$$

Em particular, a diferenciabilidade de  $f$  em  $(0, 0)$  é uma consequência do Teorema do Confronto<sup>38</sup>, uma vez

<sup>38</sup> Veja **Corolário 3.5.1**

que  $\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$  limitada em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  &  $\lim_{u \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{u^2}} = 0$  implica

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} e^{-\frac{1}{u^2}} = 0.$$

Logo, com base no item (i) da **Proposição 4.3.2** concluimos que  $f$  também é contínua em  $(0,0)$ .

### Exemplo 4.3.2 (Item (ii) da Proposição 4.3.2)

Consideremos a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & , \text{ se } xy \neq 0 \\ \frac{5}{4} & , \text{ se } xy = 0 \end{cases}$$

É claro que existem  $f_x(0,0)$  e  $f_y(0,0)$ , uma vez que

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u,0) - f(0,0)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{4} - \frac{5}{4}}{u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(0,0) &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(0,v) - f(0,0)}{v} \\&= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{4} - \frac{5}{4}}{v} \\&= 0.\end{aligned}$$

No entanto  $f$  não é contínua uma vez que o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe<sup>39</sup>

Logo, pelo item (ii) da **Proposição 4.3.2** podemos também concluir que  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ .

**Observação 4.3.4** A **Proposição 4.3.2** garante-nos essencialmente que a diferenciabilidade de uma função implica a continuidade da função, tal como no caso de funções de uma variável.

<sup>39</sup> Calcule, por exemplo, o limite quando  $(x,y)$  tende para  $(0,0)$ , segundo os caminhos

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \text{ e } \mathcal{C}_2 = \{(x,x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$



*No caso de funções de uma variável, a condição de diferenciabilidade dada pela equivalência<sup>40</sup>*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = h'(a)$$

*permite-nos garantir a existência da derivada da função no ponto, e por conseguinte, a continuidade da função no ponto.*

*No entanto, tal como teve oportunidade de verificar<sup>41</sup> no **Exemplo 4.3.2** tal nem sempre se verifica funções de duas variáveis, isto é:*

**As derivadas  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$  podem existir, mesmo que que a função  $f$  não seja contínua ou diferenciável<sup>42</sup> em  $(a, b)$ .**

<sup>40</sup> Estamos considerando  $\varepsilon(t) = h(a+t) - h(a) - h'(a)t$ .

<sup>41</sup> Assim como irá ter oportunidade de verificar em alguns dos exercícios da seção **4.7 Exercícios**.

<sup>42</sup> Observe que pode haver casos em que uma função pode ser contínua, embora não seja diferenciável.

Como verificámos no **Exemplo 4.3.1** & no **Exemplo 4.3.2** o cálculo dos limites da forma

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+u, b+v) - f(a, b) - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

pode tornar-se numa tarefa bastante trabalhosa. O resultado que se segue permite contornar esta dificuldade:

### **Proposição 4.3.3 (Critério Diferenciabilidade)**

Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ .

Se as funções  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  e  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  existirem em  $\Omega$ , e forem contínuas em  $(a, b)$ , então  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ .

**Exemplo 4.3.3** As derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  das funções  $f$  que se encontram listadas na tabela abaixo são contínuas em  $\mathbb{R}^2$  e, por conseguinte, contínuas em qualquer ponto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ :

$f(x, y)$	$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$
$x^2 + y^2 + xy + x$	$2x + y + 1$	$2y + x$
$\arcsin(x^2)$	$\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$	0
$\arctan(e^y)$	0	$\frac{e^y}{1+e^{2y}}$
$e^{(x+y)^2}$	$2(x+y)e^{(x+y)^2}$	$2(x+y)e^{(x+y)^2}$
$y \cos(x) + \tan(y)$	$-y \sin(x)$	$\cos(x) + \sec^2(y)$
$y \sin(xy)$	$y^2 \cos(xy)$	$xy \cos(xy)$

Com base na **Proposição 4.3.3** podemos concluir que todas elas são diferenciáveis em qualquer ponto  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

## 4.4 Derivada Direcional vs Gradiente

Observe que o limite

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+u, b+v) - f(a, b) - f_x(a, b)u - f_y(a, b)v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

pode ser reescrito como<sup>43</sup>

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+u, b+v) - f(a, b) - \nabla f(a, b) \bullet (u, v)}{\|(u, v)\|}.$$

Para reformular a noção de diferenciabilidade em termos da noção de derivada direcional, denotemos por  $\ell_1(a, b)$  e  $\ell_2(a, b)$  os seguintes limites:

$$\begin{aligned}\ell_1(a, b) &= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+u, b+v) - f(a, b)}{\|(u, v)\|} \\ \ell_2(a, b) &= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\nabla f(a, b) \bullet (u, v)}{\|(u, v)\|}.\end{aligned}$$

No caso de  $f$  ser diferenciável<sup>44</sup> em  $(a, b)$ , tem-se que os limites  $\ell_1(a, b)$  e  $\ell_2(a, b)$  coincidem, indepen-

<sup>43</sup> A quantidade  $\|(u, v)\| = \sqrt{u^2 + v^2}$  corresponde à norma do vetor  $(u, v)$ , enquanto que  $\nabla f(a, b) \bullet (u, v) = f_x(a, b)u + f_y(a, b)v$  denota o produto escalar entre o vetor  $\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$  e o vetor  $(u, v)$ .

<sup>44</sup> Provar que  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$  é equivalente a provar que os limites  $\ell_1(a, b)$  e  $\ell_2(a, b)$  coincidem.

dentemente<sup>45</sup> do caminho descrito por  $(a + u, b + v)$  na sua aproximação a  $(a, b)$ .

Em particular, a variação

$$\Delta z = f(a + u, b + v) - f(a, b)$$

provocada nos valores de  $f$  quando a variável  $(x, y)$  varia ao longo do segmento de reta

$$\{(a + tu, b + tv) : 0 \leq t \leq 1\}$$

é dada aproximadamente por

$$\nabla f(a, b) \bullet (u, v) = f_x(a, b)u + f_y(a, b)v.$$

Assim, para as mudanças de variável

$$\begin{cases} t = \|(u, v)\| \\ u = t \cos(\theta) \\ v = t \sin(\theta) \end{cases}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

<sup>45</sup> Reveja a seção 3.2 **Limites segundo Caminhos do Capítulo 3 Limites e Continuidade.**

obtemos<sup>46</sup> que

$$\begin{aligned}\ell_1(a, b) &= \lim_{\|(u, v)\| \rightarrow 0} \frac{f(a+u, b+v) - f(a, b)}{\|(u, v)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t \cos(\theta), b+t \sin(\theta)) - f(a, b)}{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell_2(a, b) &= \lim_{\|(u, v)\| \rightarrow 0} \frac{\nabla f(a, b) \bullet (u, v)}{\|(u, v)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nabla f(a, b) \bullet (t \cos(\theta), t \sin(\theta))}{t} \\ &= \nabla f(a, b) \bullet (\cos(\theta), \sin(\theta)).\end{aligned}$$

Das igualdades acima concluímos que  $\ell_1(a, b)$  corresponde à derivada direcional de  $f$  em  $(a, b)$ , segundo o vetor unitário

$$(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

<sup>46</sup> Para  $0 \leq t \leq 1$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ , temos que  $\|(u, v)\| = \sqrt{t^2 \cos^2(\theta) + t^2 \sin^2(\theta)} = t$ .

e que o limite

$$\ell_2(a, b) = \nabla f(a, b) \bullet \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

é independente do vetor  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$  escolhido.

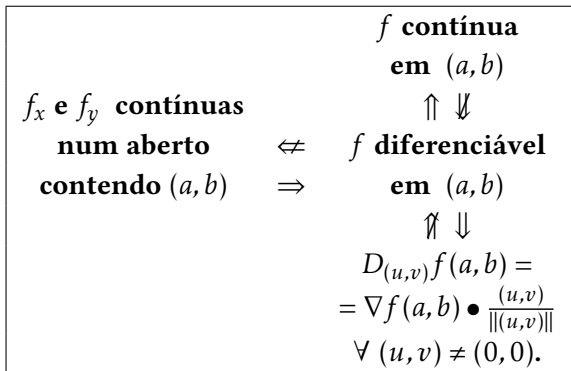
Deduzimos assim com base na **Definição 4.1.2** o seguinte resultado:

**Proposição 4.4.1** ( $D_{(u,v)}f$  vs  $\nabla f$ ) *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto contendo  $(a, b)$ , e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ .*

*Se  $f$  é uma função diferenciável em  $(a, b)$ , então para todo o vetor  $(u, v)$  não nulo de  $\mathbb{R}^2$  se tem*

$$D_{(u,v)}f(a, b) = \nabla f(a, b) \bullet \frac{(u, v)}{\|(u, v)\|}.$$

Os resultados sobre diferenciabilidade de uma função  $f$  num ponto  $(a, b)$  obtidos até aqui podem ser resumidos no seguinte diagrama:



**No DIAGRAMA:** Esquematisação de implicações envolvendo **Proposição 4.3.1**, **Proposição 4.3.2**, **Proposição 4.3.3** & **Proposição 4.4.1**.

A formulação anterior em termos de cálculo vetorial conduz-nos naturalmente à seguinte generalização para a **Definição 4.3.1** para uma funções em  $n$  variáveis, assim como a uma generalização *mutatis mutandis* da **Proposição 4.3.1**, **Proposição 4.3.2**, **Proposição 4.3.3** & **Proposição 4.4.1**.



**Definição 4.4.1 (Generalização Definição 4.3.1)**

Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto<sup>47</sup>  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função na variável  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , e  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  um ponto de  $\Omega$ .

No caso do gradiente  $\nabla f(A)$  existir, dizemos que  $f$  é diferenciável em  $A$  quando

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(A + \vec{v}) - f(A) - \nabla f(A) \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|} = 0.$$

**Proposição 4.4.2 (Generalização  $\mathbb{R}^n$ )** A generalização da **Proposição 4.3.1**, **Proposição 4.3.2**, **Proposição 4.3.3** & **Proposição 4.4.1** para funções de várias variáveis pode ser resumida pelo seguinte diagrama:

<sup>47</sup> Dizemos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto se para todo o ponto  $A \in \Omega$ , existe um  $r > 0$  tal que  $B_r(A) \subseteq \Omega$ .

	<b><math>f</math> contínua</b>
	<b>em <math>A</math></b>
	$\Uparrow \Downarrow$
<b><math>f_{x_i}</math> contínuas</b>	
<b>num aberto</b>	$\Leftrightarrow$
<b>contendo <math>A</math></b>	$\Rightarrow$
<b><math>(i = 1, 2, \dots, n)</math></b>	$\Uparrow \Downarrow$
	<b><math>f</math> diferenciável</b>
	<b>em <math>A</math></b>
	$D_{\vec{v}} f(A) = \nabla f(A) \bullet \frac{\vec{v}}{\ \vec{v}\ },$
	<b>para todo o <math>\vec{v} \neq \vec{0}</math>.</b>

A abordagem utilizada na seção **1.5 Ângulos entre Vetores** para determinar o ângulo entre dois vetores de  $\mathbb{R}^n$  pode agora ser reajustada para determinar para quais direções  $D_{\vec{v}} f(A)$  atinge o valor máximo ou mínimo.

Com efeito, assumindo que  $f$  é diferenciável em  $A$ , podemos escrever  $D_{\vec{v}} f(A)$  numa das seguintes

formas:

$$\begin{aligned}D_{\vec{v}}f(A) &= \nabla f(A) \bullet \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \\&= \|\nabla f(A)\| \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| \cos(\theta) \\&= \|\nabla f(A)\| \cos(\theta).\end{aligned}$$

Da condição  $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$  resulta que

$$-\|\nabla f(A)\| \leq D_{\vec{v}}f(A) \leq \|\nabla f(A)\|$$

Portanto  $D_{\vec{v}}f(A)$  atinge o seu máximo quando  $\cos(\theta) = 1$ , e o seu mínimo quando  $\cos(\theta) = -1$ .

Daqui se pode extrair o seguinte resultado:

**Proposição 4.4.3 (Máximos e Mínimos  $D_{\vec{v}}f$ )**

Seja  $f$  uma função diferenciável num aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , contendo o ponto  $A$ . Então:

- (i) O **valor máximo** de  $D_{\vec{v}}f(A)$  é igual a  $\|\nabla f(A)\|$ .  
Este ocorre quando  $\vec{v}$  tem a mesma direção e sentido<sup>48</sup> de  $\nabla f(A)$ , ou seja, quando

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}.$$

- (ii) O **valor mínimo** de  $D_{\vec{v}}f(A)$  é igual a  $\|\nabla f(A)\|$ .  
Este ocorre quando  $\vec{v}$  tem a mesma direção mas sentido oposto<sup>49</sup> de  $\nabla f(A)$ , ou seja, quando

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}.$$

<sup>48</sup> Neste caso, o valor máximo é atingido quando  $\vec{v}$  e  $\nabla f(A)$  formam um ângulo de 0 radianos.

<sup>49</sup> Neste caso, o valor mínimo é atingido quando  $\vec{v}$  e  $\nabla f(A)$  formam um ângulo de  $\pi$  radianos.

Geometricamente, a **Proposição 4.4.3** diz-nos que a direção na qual a função  $f$  cresce/decrece mais rapidamente é a direção do vetor gradiente. Para ilustrar<sup>50</sup> esta propriedade considere o seguinte problema prático relacionado com a medição de *Índice de Massa Corporal* (IMC):

**Problema 4.4.1 (Aumento/Redução do IMC)** <sup>51</sup>

*O Índice de Massa Corporal – ou índice de Quetelet – corresponde ao rácio entre massa ( $m$ ) de um indivíduo (em kg) e o quadrado da sua altura ( $h^2$ ) (em metros ao quadrado):*

$$IMC = \frac{m}{h^2}.$$

*Segundo alguns especialistas, o IMC introduzido por Quetelet (em 1832) é uma medida bizarra pois não*

<sup>50</sup> O **exercício 18** da **seção 4.7 Exercícios** corresponde a uma outra aplicação prática da **Proposição 4.4.3**.

<sup>51</sup> Este exemplo foi criado com base na informação que consta na página <https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/bmi.html> gerida pelo professor Lloyd N. Trefethen, da Universidade de Oxford.

toma em linha de conta fatores como a idade<sup>52</sup>, e altura média<sup>53</sup> de uma população.

Uma outra possibilidade de cálculo do IMC, proposta pelo Professor Lloyd N. Trefethen, é dada pelo rácio<sup>54</sup>

$$IMC = \frac{1.3m}{h^{2.5}}.$$

### **CONJUNTOS DE NÍVEL DA FUNÇÃO IMC**

Se a variável  $x$  representar a altura de um indivíduo, e a variável  $y$  a massa de um indivíduo, as funções de IMC descritas acima correspondem às funções

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2} \quad \& \quad g(x, y) = \frac{1.3y}{x^{2.5}}$$

<sup>52</sup> Há uma propensão de aumento do IMC com o avançar da idade.

<sup>53</sup> De acordo com uma carta escrita por Trefethen ao jornal 'The Economist' em 2013, esta medida é imprecisa ao ponto de termos milhões de pessoas baixas que se podem considerar mais magras do que realmente são, e milhões de pessoas altas que se podem considerar mais obesas, daquilo que realmente são.

<sup>54</sup> No link [https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/bmi\\_calc.html](https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/bmi_calc.html) pode calcular o seu 'novo' IMC, de acordo com a fórmula introduzida pelo Prof. Trefethen.

de domínio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$ .

Os conjuntos de nível representados no ficheiro GeoGebra

### ***IndiceMassaCorporal.ggb***

correspondem aos valores a partir dos quais um determinado indivíduo atinge um certo 'grau de obesidade':

IMC	Classificação
16	Magreza moderada
17	Magreza leve
18.5	Saudável
25	Sobrepeso
30	Obesidade Grau I
35	Obesidade Grau II (severa)
40	Obesidade Grau III (mórbida)

Os valores  $(m, h)$  de IMC situados 'abaixo' do conjunto de nível  $IMC = 16$  têm a classificação de magreza grave.

***DIMINUIR O IMC***

*Suponha que um indivíduo com 85kg e 1.74m (sobrepeso) quer atingir um IMC na ordem dos 18.5 (saudável). A determinação do peso e o peso e altura ideais, corresponde à determinação de um vetor  $\vec{v} = (a, b)$  tal que a equação*

$$(x, y) = (1.74, 85) + \vec{v}$$

*nos dá um ponto  $(x, y)$  situado num conjunto de nível dado pela equação  $IMC = 18.5$ .*

*Se ele utilizar a função  $f$  como indicador de IMC, ele tem de obter um vetor  $\vec{v} = (a, b)$  da forma*

$$\lambda \nabla f(1.74, 85) \approx (-32.27\lambda, 0.33\lambda) \quad (\lambda < 0).$$

*Caso ele optasse por utilizar a função  $g$  como indicador de IMC, o vetor  $\vec{v} = (a, b)$  era da forma<sup>55</sup>*

$$\lambda \nabla g(1.74, 85) \approx (-39.75\lambda, -39.75\lambda) \quad (\lambda < 0).$$

<sup>55</sup> Verifique este cálculo 'interessante'.



**Observação:** Para o caso em que a altura do indivíduo não se irá alterar, a escolha do vetor  $\vec{v} = (a, b)$  corresponde a fixar  $b = 0$  uma vez que neste caso o gradiente a determinar, envolve apenas uma função na variável<sup>56</sup>  $x$ .

### **AUMENTAR O IMC**

Como exercício:

- (i) Use as funções  $f$  e  $g$  para calcular o IMC de um indivíduo de 1.66 metros de altura e 47 kg de massa.
- (ii) Supondo que a altura do indivíduo irá permanecer constante, calcule para ambos os casos o vetor  $\vec{v}$  para o qual o indivíduo irá atingir um ponto  $(x, y)$  de IMC igual a 18.5.

<sup>56</sup> Para o exemplo dado, fixamos  $x = 1.74$  como a altura  $a$  atingir para um IMC de 18.5. Para este caso, teríamos de calcular o gradiente nas variáveis  $x$  e  $y$  das funções  $f(x, 1.74)$  e  $g(x, 1.74)$

## 4.5 Aproximação Linear e Equação do (Hiper)plano Tangente

Nesta seção iremos assumir  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto contendo  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , e que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função na variável  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferenciável no ponto  $A$ . Em termos da variável  $X = A + \vec{v}$ , a **Definição 4.1.2**, é equivalente a termos

$$f(X) = f(A) + \nabla f(A) \bullet (X - A) + \varepsilon(X - A),$$

com

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{\varepsilon(X - A)}{\|X - A\|} = 0.$$

Com base no limite anterior, podemos extrair seguintes informações analíticas e geométricas sobre a função  $f$ :

(i) **APROXIMAÇÃO LINEAR:** Para  $\vec{v} = X - A$

$$f(X) \approx f(A) + \nabla f(A) \bullet (X - A)$$

dá-nos a *aproximação linear*<sup>57</sup> de  $f$  em torno do ponto  $A$ .

(ii) **EQUAÇÃO DO HIPERPLANO TANGENTE:** A equação

$$x_{n+1} = f(A) + \nabla f(A) \bullet (X - A)$$

dá-nos a equação do *hiperplano tangente* ao gráfico<sup>58</sup> de  $f$  no ponto  $(A, f(A))$ .

A noção de *hiperplano tangente* corresponde a uma generalização para funções de várias variáveis do

<sup>57</sup> Esta fórmula corresponde a uma generalização da fórmula de Taylor de ordem 1, para funções de várias variáveis.

<sup>58</sup> O gráfico da função  $f$  é dado pelo conjunto

$$G_f = \{(X, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : X \in \Omega \text{ \& } x_{n+1} = f(X)\}.$$

conceito de *reta tangente* ao gráfico de uma função  $h$  no ponto  $(a, h(a))$ :

$$y = h(a) + h'(a)(x - a).$$

Desta última equação<sup>59</sup> podemos concluir que o vetor

$$\vec{u} = (h'(a), -1)$$

é perpendicular à *reta tangente*<sup>60</sup> ao gráfico de  $h$  no  $(a, h(a))$ .

No caso de  $f$  ser uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ , podemos concluir, com base na igualdade

$$\nabla f(a, b) \bullet (x - a, y - b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

<sup>59</sup> Veja o **Exercício 8** da seção **1.7 Exercícios do Capítulo 1 Vetores e Geometria do Espaço  $\mathbb{R}^n$** .

<sup>60</sup> Esta conclusão resulta do fato da equação da *reta tangente* ao gráfico de  $h$  no ponto  $(a, h(a))$  poder ser reescrita na forma normal:

$$h'(a)(x - a) + (-1)(y - h(a)) = 0.$$

podemos concluir que

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

corresponde à equação de um plano – **a equação do plano tangente**.

Esta última equação pode ser reescrita<sup>61</sup> na forma

$$u_1x + u_2y + u_3z + w = 0,$$

onde as constantes  $u_1, u_2, u_3$  e  $w$  são dadas por

$$u_1 = f_x(a, b), \quad u_2 = f_y(a, b), \quad u_3 = -1$$

e  $w = f(a, b) - af_x(a, b) - bf_y(a, b)$ .

Desta última equação resulta que

$$\vec{u} = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$$

nos dá um *vetor normal* ao *plano tangente* do gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .

<sup>61</sup> Reveja a seção 1.6 **Produto Vetorial e Produto Misto** do **Capítulo 1 Vetores e a Geometria do Espaço**  $\mathbb{R}^n$ .

**Observação 4.5.1 (Diferenciabilidade)**

*Geometricamente. o conceito de diferenciabilidade de uma função  $f$  nas variáveis  $x, y$  em um ponto  $(a, b)$  está intimamente relacionado com a existência de um plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ :*

$$z - f(a, b) = u_1(x - a) + u_2(y - b).$$

*No caso da função  $f$  do Exemplo 4.1.3*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

*podemos verificar facilmente pela definição de derivada parcial que  $f_x(0, 0) = 1$  e  $f_y(0, 0) = -1$ .*

*No entanto  $f_x(a, a)$  e  $f_y(a, a)$  não existem para valo-*

res de  $a \neq 0$ , uma vez que os limites

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(a+u, a) - f(a, a)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2au + u^2 + 2a^2}{u^2}$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(a, a+v) - f(a, a)}{v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{2av + v^2 + a^2}{v^2}$$

não existem, pelo que o gráfico da função  $f$  não admite plano tangente para os pontos da forma  $(a, a, 0)$ , com  $a \neq 0$ .

Como poderá facilmente visualizar a partir do gif animado gif animado<sup>62</sup>

### ***Exemplo413.gif***

o gráfico de  $f$  não intersesta o plano  $x - y = 0$  para valores de  $z \neq 0$ .

<sup>62</sup> **Ficheiro GeoGebra: Exemplo413.ggb**

Para o caso mais geral, a equação normal do plano

$$\vec{u} \bullet (x - a, y - b, z - c) = 0$$

associada a um vetor  $\vec{u}$  de coordenadas

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

<sup>63</sup> nos dá uma forma geral para determinarmos a *equação do plano tangente* para o caso em que uma função  $f$  de duas variáveis é definida implicitamente por uma função  $F$  nas variáveis  $x, y$  e  $z$ .

(i) **Caso**  $z = f(x, y)$ :

Definimos  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$  e calculamos

$$\vec{u} = \nabla F(a, b, c) \text{ em } (a, b, c) = (a, b, f(a, b)):$$

$$\vec{u} = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1).$$

<sup>63</sup> Temos que  $\nabla F(a, b, c) \bullet (x - a, y - b, z - c) = F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c)$ .



Para este caso, obtemos que a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$  é dada por

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

(ii) **Caso**  $y = f(x, z)$ :

Definimos  $F(x, y, z) = f(x, z) - y$  e calculamos  $\vec{u} = \nabla F(a, b, c)$  em  $(a, b, c) = (a, f(a, c), c)$ :

$$\vec{u} = (f_x(a, c), -1, f_z(a, c)).$$

Para este caso, obtemos que a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a, c), c)$  é dada por

$$y - f(a, c) = f_x(a, c)(x - a) + f_z(a, c)(z - c).$$

(iii) **Caso**  $x = f(y, z)$ :

Definimos  $F(x, y, z) = f(y, z) - x$  e calculamos

$$\vec{u} = \nabla F(a, b, c) \text{ em } (a, b, c) = (f(b, c), b, c):$$

$$\vec{u} = (-1, f_y(b, c), f_z(b, c)).$$

Para este caso, obtemos que a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(f(b, c), b, c)$  é dada por

$$x - f(b, c) = f_y(b, c)(y - a) + f_z(b, c)(z - c).$$

(iv) <sup>64</sup>**CASO**  $F(x, y, z) = \kappa$

Calculamos  $\vec{u} = \nabla F(a, b, c)$  para um ponto  $(a, b, c)$  da *superfície de nível*<sup>65</sup>

$$F(x, y, z) = \kappa.$$

<sup>64</sup> Este tipo de abordagem poderá ser o mais conveniente em alguns dos itens do **Exercício 9** & **Exercício 19**.

<sup>65</sup> Este último caso equivale a determinar um vetor  $\vec{v}$  ao vetor, de coordenadas  $\vec{v} = (x - a, y - b, y - c)$ , que seja perpendicular ao gradiente  $\nabla F(a, b, c)$ .

Neste caso, a *equação do plano tangente* ao gráfico de  $f$  para pontos da forma  $(a, b, f(a, b))$ ,  $(a, f(a, c), c)$  e  $(f(b, c), b, c)$  é dada implicitamente pela equação.

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0.$$

Na primeira sequência de exemplos iremos começar por ilustrar a aplicabilidade da *fórmula de aproximação linear*

$$f(X) \approx f(A) + \nabla f(A) \bullet (X - A)$$

na resolução de problemas práticos de aproximação:

**Problema 4.5.1 (Funções Trigonométricas)**

Calcule um valor aproximado de  $\sin(3.17) + \cos(1.59)$ .

**RESOLUÇÃO:**

Como é do conhecimento geral, 3.14 corresponde à aproximação do número  $\pi$  por duas casas decimais. Por outro lado, se dividirmos 3.14 por 2 obtemos 1.57 como aproximação de  $\frac{\pi}{2}$  por duas casas decimais.

Ora, os números 3.17 e 1.59 estão próximos dos decimais 3.14 e 1.57, respetivamente, pelo que faz sentido de determinar o valor de  $\sin(3.17) + \cos(1.59)$  a partir da aproximação linear da função<sup>66</sup>

$$h(t) = \sin(t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

em torno do ponto  $\pi$ .

Das identidades  $h(\pi) = 0$  e  $h'(\pi) = -\frac{3}{2}$ , concluímos

*que*

$$\begin{aligned}\sin(3.17) + \cos(1.59) &\approx h(\pi) + h'(\pi)(3.17 - 3.14) \\ &= -0.045.\end{aligned}$$

*Como exercício compare<sup>67</sup> a aproximação acima com a aproximação linear que seria obtida por aproximação linear da funções  $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$  e  $g(x, y) = \sin(x) + \cos\left(\frac{y}{2}\right)$  nos pontos  $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$  e  $(\pi, \pi)$ , respectivamente.*

**Problema 4.5.2 (Funções Logarítmicas)** *Calcule um valor aproximado para*

$$(0.98)^2 - 1.01 \ln\left(\frac{1.01}{0.98}\right).$$

**RESOLUÇÃO:**

*Neste caso, tanto 0.98 como 1.01 estão próximos do número 1. Sabemos ainda que o número 1 é um zero da*

<sup>67</sup> Isto é, calcule as aproximações e por fim, compare com a calculadora qual das funções deu uma melhor aproximação.

função  $\ln(t)$ . Logo, para  $f(x, y) = x^2 - y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$  temos que  $\nabla f(x, y)$  é dado pelo vetor

$$\nabla f(x, y) = \left(2x + \frac{y}{x}, 1 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Em particular, para os pontos  $(x, y) = (1, 1)$  e  $(a, b) = (1, 1)$ , o produto escalar entre os vetores

$$\nabla f(a, b) = (3, -1) \text{ e } (x - a, y - b) = (-0.02, 0.01)$$

é igual a  $\nabla f(1, 1) \bullet (-0.02, 0.01) = -0.07$ , donde

$$\begin{aligned}(0.98)^2 - 1.01 \ln\left(\frac{1.01}{0.98}\right) &\approx f(1, 1) + \\ &+ \nabla f(1, 1) \bullet (-0.02, 0.01) \\ &= 1 - 0.07 \\ &= 0.93\end{aligned}$$

nos dá uma aproximação pretendida.

**Problema 4.5.3 (Erro Aproximação Multiplicação)**

Determine o erro máximo cometido pelo produto de três números reais positivos, inferiores a 10.

**RESOLUÇÃO:** Para valores  $0 < x < 10$ ,  $0 < y < 10$  e  $0 < z < 10$  considere a função de três variáveis

$$f(x, y, z) = xyz.$$

Ao truncar um número real positivo inferior a 10 pela primeira casa decimal comete-se, no máximo, um erro de 0.1, ou seja, os valores das variações

$$\Delta x = x - a, \Delta y = y - b \text{ e } \Delta z = z - c$$

são, em módulo, menores ou iguais a 0.1.

Ou seja, para  $|\Delta x| \leq 0.1$ ,  $|\Delta y| \leq 0.1$  &  $|\Delta z| \leq 0.1$  se tem que o erro de aproximação

$$\Delta w = f(x, y, z) - f(a, b, c)$$

pode ser estimado por

$$\Delta w \approx f_x(a, b, c)\Delta x + f_y(a, b, c)\Delta y + f_z(a, b, c)\Delta z.$$

*Por outro lado, temos que*

$$f_x(a, b, c) = bc, f_y(a, b, c) = ac \text{ \& } f_z(a, b, c) = ab.$$

*Daqui se conclui, atendendo ao domínio da função  $f$  que as multiplicações  $bc$ ,  $ac$  \&  $ab$  correspondem sempre a números menores ou iguais que  $100 = 10^2$ .*

*Daqui resulta que*

$$\begin{aligned} |\Delta w| &\approx |f_x(a, b, c)\Delta x + f_y(a, b, c)\Delta y + f_z(a, b, c)\Delta z| \\ &\leq 3 \times 10^2 \times 0.1 \\ &= 30 \end{aligned}$$

*ou seja, o erro do cálculo do produto de três números inteiros positivos menores que 10 é no máximo 30.*

#### **Problema 4.5.4 (Volume de uma Pirâmide)**

*Suponhamos que no Campus de São Bernardo do Campo os alunos decidiram que irão erguer no campo de jogos em frente ao Bloco A2, uma réplica de uma das pirâmides da Necrópole de Gizé, para organizar um evento cultural.*



*Eles decidiram que a pirâmide quadrangular que irão construir terá de lado 8.26 m, e de altura 5.98 m de altura (aproximadamente dois andares).*

*Determine qual o erro máximo que será cometido, garantindo que no máximo irão cometer um erro de 1 cm em cada medição.*

**RESOLUÇÃO:** *A função de duas variáveis*

$$V(x, y) = \frac{x^2 y}{3}$$

*dá-nos, para cada  $x, y > 0$  (lado e altura da pirâmide) o volume de uma pirâmide quadrangular.*

*Observe que para  $|u| \leq 0.01$  (metros) e  $|v| \leq 0.01$  (metros), a variação*

$$\Delta z = V(8.26 + u, 5.98 + v) - V(8.26, 5.98)$$

*nos permite estimar o erro cometido.*

*Da fórmula de aproximação*

$$\begin{aligned} V(x+u, y+v) - V(x, y) &\approx V_x(x, y)u + V_y(x, y)v \\ &= \frac{2xy}{3}u + \frac{x^2}{3}v. \end{aligned}$$

*concluimos que para  $|u| \leq 0.01$  (metros) e  $|v| \leq 0.01$  (metros), a variação*

$$\Delta z = V(16.52 + u, 5.98 + v) - V(16.52, 5.98)$$

*pode ser aproximado por*

$$V_x(8.26, 5.98)u + V_y(8.26, 5.98)v.$$

*Fazendo  $u = v = 0.01$ , obtemos que*

$$V_x(8.26, 5.98) \times 0.01 + V_y(8.26, 5.98) \times 0.01 \approx 0.56m^3$$

*é o erro de aproximação máximo para construir uma pirâmide quadrangular de volume  $V(8.26, 5.98) \approx 136m^3$ .*

Passemos de seguida a exemplos envolvendo o cálculo da *equação do plano tangente*:

**Exemplo 4.5.1 (Problema 4.5.2)** O gráfico da função  $f(x, y) = x^2 - y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$  do **Problema 4.5.2**, assim como a equação do plano tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $(1, 1, f(1, 1))$ :

$$z = 3x - y - 1$$

pode ser visualizado a partir do gif animado<sup>68</sup>:

***PlanoLnNaoLinear.gif***

**Exemplo 4.5.2 (Pólos e Linha do Equador)**  
*Suponhamos que a equação da superfície esférica*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

*descreve aproximadamente a superfície terrestre, onde a constante  $r > 0$  corresponde a um valor aproximado*

<sup>68</sup> **Ficheiro GeoGebra:** *PlanoLnNaoLinear.ggb*

*para o raio polar, e os pontos*

$$N = (0, 0, r)$$

$$S = (0, 0, -r)$$

$$E_{\theta} = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0)$$

*o pólo norte, o pólo sul, e os pontos que se encontram sob a linha do equador.*

### ***EQUAÇÕES DOS PLANOS TANGENTES***

*Note que a superfície esférica pode ser graficamente representada como o conjunto de nível da função*

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

*associada ao nível  $\kappa = r^2$ . Daqui retiramos que*

$$\nabla F(N) = (0, 0, 2r)$$

$$\nabla F(S) = (0, 0, -2r)$$

$$\nabla F(E_{\theta}) = (2r \cos(\theta), 2r \sin(\theta), 0)$$

*correspondem aos vetores normais aos planos de equação*

$$z = r, \quad z = -r \quad \& \quad \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = r$$

*Esta interpretação gráfica pode ser visualizada a partir do gif animado<sup>69</sup>*

### ***TangenteSuperficieEsferica.gif***

#### ***ERROS DE APROXIMAÇÃO***

*Suponhamos agora que a aproximação  $\rho = r + \Delta r$  nos dá o raio médio da superfície terrestre. Com base na equação normal da forma*

$$\nabla F(a, b, c) \bullet (x - a, x - b, z - c) = 0$$

*concluimos que o pontos  $(0, 0, \rho) = (0, 0, r + \Delta r)$  &  $(0, 0, -\rho) = (0, 0, -r - \Delta r)$  correspondem às coordena-*

<sup>69</sup> ***Ficheiro GeoGebra : TangenteSuperficieEsferica.ggb***

*das aproximadas do Pólo Norte e Pólo Sul, respectivamente, enquanto as aproximações*

$$(x + \Delta x, y + \Delta y, 0) \approx E_\theta$$

*são determinadas implicitamente pela equação da reta tangente*

$$\cos(\theta)(x + \Delta x) + \sin(\theta)(y + \Delta y) = r + \Delta r.$$

*Como terá eventualmente oportunidade de estudar na disciplina de Cálculo Numérico, o método de Newton lhe fornece uma forma de encontrar uma aproximação para as coordenadas que se encontram sob a linha do equador, a partir das curvas de nível<sup>70</sup>*

$$F(x, y, z) = r + \Delta r.$$

<sup>70</sup> A ideia passa por determinar iterativamente valores de  $\Delta r$  cada vez mais próximos de zero.

**Observação 4.5.2** *De uma forma resumida, a equação do hiperplano tangente ao gráfico da função  $f$  de  $n$  variáveis num ponto  $A$  genérico pode sempre ser determinado a partir de uma relação de perpendicularidade*

$$\vec{u} \perp \vec{v},$$

*em termos dos vetores*

$$\vec{u} = \nabla F(B) \text{ e } \vec{v} = (X - A, x_{n+1} - f(A)).$$

*desde que  $B = (A, f(A))$  seja um ponto do conjunto de nível, definido pela equação*

$$F(X, x_{n+1}) = \kappa.$$

*Esta formulação é equivalente a mostrar que a equação*

$$D_{\vec{v}}F(B) = 0$$

*envolvendo a derivada direcional  $D_{\vec{v}}$  nos permite determinar implicitamente o plano tangente ao gráfico*

de  $f$  no ponto  $B = (A, f(A))$ , ou seja, que a equação

$$x_{n+1} = f(A) + \nabla f(A) \bullet (X - A)$$

pode ser determinada implicitamente a partir da equação

$$\nabla F(B) \bullet \vec{v} = 0,$$

onde  $\vec{v} = (X - A, x_{n+1} - f(A))$  é um vetor de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Esta relação pode ser geometricamente deduzida a partir da perpendicularidade entre  $\vec{v}$  e

$$\vec{w} = \nabla F(B) - \text{proj}_{\vec{v}} \nabla F(B),$$

onde

$$\text{proj}_{\vec{v}} \nabla F(B) = \frac{\nabla F(B) \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

denota a projeção ortogonal do gradiente  $\nabla F(a, b, c)$ , segundo o vetor  $\vec{v}$ .

De fato, da construção geométrica obtida ao longo da seção **1.4 Projeção Ortogonal** do **Capítulo 1**



**Vetores e a Geometria do Espaço  $\mathbb{R}^n$** , resulta que os vetores  $\vec{v} = (X - A, x_{n+1} - f(A))$  e

$$\vec{w} = \nabla F(B) - \text{proj}_{\vec{v}} \nabla F(B)$$

satisfazem a equação

$$(\nabla F(B) - \text{proj}_{\vec{v}} \nabla F(B)) \bullet \vec{v} = 0$$

No caso de  $\text{proj}_{\vec{v}} \nabla F(B)$  e  $\vec{v}$  serem perpendiculares entre si, a equação anterior é equivalente a termos  $\nabla F(B) \bullet \vec{v} = 0$ , ou seja, quando a igualdade

$$\text{proj}_{\vec{v}} \nabla F(B) \bullet \vec{v} = 0$$

é satisfeita.

Portanto os vetores  $\nabla F(B)$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares entre si se e somente<sup>71</sup> se

$$D_{\vec{v}} F(B) = 0.$$

<sup>71</sup> Estamos impondo a condição  $\vec{v} = (X - A, x_{n+1} - f(A)) \neq \vec{0}$ .

Para este último caso, a equivalência entre  $\vec{v} \perp \nabla F(B)$  e a equação anterior foi estabelecida com base na sequência de igualdades

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}F(B) &= \nabla F(B) \bullet \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \\ &= \|\nabla F(B)\| \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla F(B) \bullet \vec{v} &= \|\nabla F(B)\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) \\ &= D_{\vec{v}}F(B) \|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.5.3 (Função de 4 Variáveis)** <sup>72</sup> Considere o conjunto de nível dado pela seguinte equação

$$t^2 = \sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) + \sin^2(\pi z).$$

Considere a função auxiliar

$$F(x, y, z, t) = \sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) + \sin^2(\pi z) - t^2.$$

<sup>72</sup> Veja também item (d) do **exercício 9** e o **exercício 28** da seção 4.7 **Exercícios**.

*Do cálculo do gradiente de  $F$ :*

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y, z, t) &= \\ &= (\pi \sin(2\pi x), \pi \sin(2\pi y), \pi \sin(2\pi z), -2t)\end{aligned}$$

*tem-se que  $\nabla F(a, b, c, 0) = (0, 0, 0, 0)$ , para valores de  $a, b, c \in \{-1, 0, 1\}$ . Neste caso, não é possível calcular o hiperplano tangente para conjuntos de nível definidos pela equação  $F(x, y, z, t) = 0$  via a equação normal do plano.*

*Para o caso de escolhermos p.e. o ponto  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1, 1)$ , obtemos que*

$$\nabla F\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1, 1\right) = (1, -1, 0, 1) \neq (0, 0, 0, 0),$$

*donde a equação do hiperplano tangente ao conjunto de nível definido pela equação  $F(x, y, z, t) = 0$  no ponto  $B = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1, 1)$  pode ser determinado a partir da equação normal*

$$\nabla F\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1, 1\right) \bullet \left(x - \frac{1}{4}, y + \frac{1}{4}, z + 1, t - 1\right) = 0.$$

307
|
565

*Ou seja:*

$$1\left(x - \frac{1}{4}\right) + (-1)\left(y + \frac{1}{4}\right) + 0(z + 1) + 1(t - 1) = 0.$$

*Após alguns cálculos auxiliares, concluímos que*

$$x - y + t = \frac{3}{2}$$

*nos dá a solução pretendida.*

## 4.6 Regra da Cadeia

Em muitos problemas envolvendo cálculo diferencial estamos perante uma função de  $n$  variáveis

$$f(X) := f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

onde cada uma das variáveis  $x_i$  depende de pelo menos de uma outra variável, dita(s) *variável/variáveis independente(s)*.

Para o caso do cálculo da *derivada direcional*, demonstrámos em particular que no caso de todas as

variáveis  $x_i$  dependerem do parâmetro  $t$  da equação da reta, mostrámos o seguinte:

- (i) Na **Seção 4.1 Conceito de Derivada Direcional**  $D_{\vec{v}}f(A)$  pode ser calculado, a menos do fator  $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ , como a derivada da função  $h(t) = f(A + t\vec{v})$  no ponto  $t = 0$ . Para este caso adoptámos a regra de *diferenciação total*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \frac{df}{dt}(A + t\vec{v}).$$

- (ii) Na **seção 4.4 Derivada Direcional vs Gradiente** verificámos que no caso de  $f$  ser uma função diferenciável num aberto contendo o ponto  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , que para  $x_{n+1} = f(X)$ , a variação de  $f$  no ponto  $A$  segundo um vetor  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ :

$$\Delta_{\vec{v}}x_{n+1} = f(A + \vec{v}) - f(A)$$

é dada aproximadamente por

$$\Delta_{\vec{v}} x_{n+1} \approx \nabla f(A) \bullet \vec{v}$$

construímos implicitamente uma aplicação  $df(A) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada vetor  $\vec{v}$  faz corresponder a *produto escalar*<sup>73</sup> entre o gradiente  $\nabla f(A)$  e um vetor  $\vec{v}$ :

$$df(A)[\vec{v}] = \nabla f(A) \bullet \vec{v},$$

com base numa regra de derivação em termos das derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ .

A aplicação  $df(A)$  utilizada anteriormente corresponde ao *diferencial de  $f$  em  $A$* . Esta pode ser representada simbolicamente, para qualquer variável

<sup>73</sup> Em particular, para  $x_i = a_i + tv_i$ , a quantidade  $df(A)[\vec{v}]$  corresponde ao somatório

$$df(A)[\vec{v}] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)v_i.$$

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  pelo somatório

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

O caso mais simples do cálculo de  $df$  em  $X$ , corresponde ao caso em que  $X$  depende apenas de uma variável independente i.e.  $X = R(t)$ , com

$$R(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)).$$

**Proposição 4.6.1 (Regra da Cadeia)** *Seja  $f$  uma função com todas as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  contínuas, e  $r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)$  funções diferenciáveis.*

*Então para*

$$R(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$$

*a função  $x_{n+1} = f(R(t))$  é diferenciável e*

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

A prova da proposição anterior é deveras elementar. De fato, se  $\Delta t$  corresponder à variação no eixo  $Ot$ , temos que a variação  $\Delta x_i$  em cada um dos eixos coordenados  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) é dada por

$$\Delta x_i = x_i(t + \Delta t) - x_i(t).$$

Então, para  $\vec{v} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ , temos que a variação  $\Delta x_{n+1} = f(R(t + \Delta t)) - f(R(t))$  pode ser aproximada por

$$\Delta x_{n+1} \approx df(R(t))[\vec{v}] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por  $\Delta t$  e fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos que

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i(t).$$



**Observação 4.6.1 (Proposição 4.6.1)** *Se*

$$R'(t) = (r'_1(t), r'_2(t), \dots, r'_n(t))$$

*denotar o vetor das  $n$  derivadas de  $R(t)$ , temos que no caso da função*

$$h(t) := f(R(t))$$

*que a sua derivada total pode ser calculada a partir da fórmula*

$$h'(t) = \nabla f(R(t)) \bullet R'(t).$$

Vamos apenas enunciar a generalização da **Proposição 4.6.1** para o caso em que as  $n$  variáveis da função  $f$  – variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  respetivamente – dependem de duas variáveis independentes  $s$  e  $t$  i.e.  $X = R(s, t)$ , com

$$R(s, t) = (r_1(s, t), r_2(s, t), \dots, r_n(s, t)).$$

A generalização da regra da cadeia para  $m$  variáveis independentes<sup>74</sup> será deixada como exercício.

**Proposição 4.6.2 (Regra da Cadeia 2D)** *Seja  $f$  uma função com todas as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  contínuas. Se existem e são contínuas as derivadas parciais de  $r_1(s, t), r_2(s, t), \dots, r_n(s, t)$ , então para*

$$R(s, t) = (r_1(s, t), r_2(s, t), \dots, r_n(s, t))$$

*as derivadas parciais de  $x_{n+1} = f(R(s, t))$  existem e são dadas por*

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s}$$

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

<sup>74</sup>  $m \neq n$ , em geral.

**Observação 4.6.2 (Proposição 4.6.2)** *Note que no caso da **Proposição 4.6.2**, o cálculo das derivadas parciais  $\frac{\partial g}{\partial s}$  e  $\frac{\partial g}{\partial t}$  é equivalente ao cálculo do gradiente da função  $g(s, t) := f(R(s, t))$ :*

$$\nabla g(s, t) = (g_s(s, t), g_t(s, t)).$$

*Para este caso a regra da cadeia aparece como uma generalização das regras de derivação ilustradas na **Observação 4.2.3** e **Proposição 4.2.1**.*

**Exemplo 4.6.1**  $((x, y) = (x(t), y(t)) \text{ \& } z = f(x, y))$   
*Suponha que  $f$  é uma função diferenciável nas variáveis  $x$  e  $y$ , e que  $x$  e  $y$  dependem apenas de uma variável independente  $t$ .*

*Para este caso, a **Proposição 4.6.1** permite-nos representar  $z'(t) = \frac{dz}{dt}$  como*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

**(i) COORDENADAS DA FORMA**

$$(x(t), y(t)) = (ae^{v_1 t}, be^{v_2 t}) :$$

*Aplicando a regra da cadeia a  $z = f(x, y)$ , obtemos que*

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \alpha ae^{\alpha t} f_x(x, y) + \beta be^{\beta t} f_y(x, y) \\ &= \alpha x f_x(x, y) + \beta y f_y(x, y).\end{aligned}$$

**(ii) COORDENADAS DA FORMA<sup>75</sup>**

$$(x(t), y(t)) = (\ln(a) + t \ln(v_1), \ln(b) + t \ln(v_2)) :$$

*Aplicando a regra da cadeia a  $z = f(x, t)$ , obtemos que*

$$\frac{dz}{dt} = \ln(v_1) f_x(x, y) + \ln(v_2) f_y(x, y).$$

<sup>75</sup> Estas coordenadas correspondem à linearização das equações  $x = ae^{\alpha t}$  e  $y = be^{\beta t}$

Em particular, para  $t = 0$ , a quantidade

$$\frac{z'(0)}{\sqrt{\ln(v_1)^2 + \ln(v_2)^2}} = \frac{\ln(v_1) f_x(\ln(a), \ln(b))}{\sqrt{\ln(v_1)^2 + \ln(v_2)^2}} + \frac{\ln(v_2) f_y(\ln(a), \ln(b))}{\sqrt{\ln(v_1)^2 + \ln(v_2)^2}}$$

dá-nos a derivada direcional<sup>76</sup> de  $f$  no ponto  $P = (\ln(a), \ln(b))$  segundo a direção  $\vec{w} = (\ln(v_1), \ln(v_2))$ .

Com base na **Proposição 4.4.3**, podemos ainda concluir os máximos<sup>77</sup>/mínimos<sup>78</sup> de

<sup>76</sup> Reveja a **Definição 4.1.2**.

<sup>77</sup> Para valores de  $\kappa > 0$ , temos que

$$D_{\vec{w}} f(\ln(a), \ln(b)) = \|\nabla f(\ln(a), \ln(b))\|.$$

<sup>78</sup> Para valores de  $\kappa < 0$ , temos que

$$D_{\vec{w}} f(\ln(a), \ln(b)) = -\|\nabla f(\ln(a), \ln(b))\|.$$

$D_{\vec{w}} f(\ln(a), \ln(b))$  correspondem a escolher  $\vec{w} = (\ln(v_1), \ln(v_2))$  com base nas substituições

$$v_1 = e^{\kappa f_x(\ln(a), \ln(b))} \quad \& \quad v_2 = e^{\kappa f_y(\ln(a), \ln(b))}.$$

### COORDENADAS DA FORMA<sup>79</sup>

$$(x(t), y(t)) = (a + v_1 \cos(t), b + v_2 \sin(t)) :$$

Da sequência de igualdades

$$x'(t) = -v_1 \sin(t) = -v_1 \frac{y(t) - b}{v_2}$$

$$y'(t) = v_2 \cos(t) = v_2 \frac{x(t) - a}{v_1}$$

obtemos

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{v_1}{v_2}(y - b)f_x(a, b) + \frac{v_2}{v_1}(x - a)f_y(a, b)$$

<sup>79</sup> Este tipo de coordenadas é utilizado para parametrizar a elipse de equação

$$\frac{(x - a)^2}{v_1^2} + \frac{(y - b)^2}{v_2^2} = 1.$$

*Adicionalmente, com base nas igualdades*

$$z'(0) = \frac{v_2}{v_1}(x-a)f_y(a,b)$$

$$z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{v_1}{v_2}(y-b)f_x(a,b)$$

*conclui-se que a equação*

$$z'(0) + z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

*define geometricamente a equação de uma reta paralela aos conjuntos de nível*

$$C_\kappa = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \kappa\}$$

*uma vez que<sup>80</sup>  $(-f_y(a, b), f_x(a, b))$  é perpendicular ao gradiente  $\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$ .*

<sup>80</sup>  $(-f_y(a, b), f_x(a, b))$  é o vetor normal à reta de equação  $z'(0) + z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**Exemplo 4.6.2**  $((x, y) = (x(s, t), y(s, t)) \text{ \& } z = f(x, y))$

Suponha que  $f$  é uma função diferenciável nas variáveis  $x$  e  $y$ , e que  $x$  e  $y$  dependem das variáveis  $s$  e  $t$ .

Para este caso, a **Proposição 4.6.2** permite-nos re-presentar as derivadas parciais

$$z_s(s, t) = \frac{\partial z}{\partial s} \text{ \& } z_t(s, t) = \frac{\partial z}{\partial t}$$

como

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

### (i) **COORDENADAS DA FORMA**

$$(x(s, t), y(s, t)) = (as + bt, cs + dt) :$$

No caso de  $(a, c) \neq (0, 0)$ , temos que

$$\frac{z_s(0, 1)}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{af_x(b, d)}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{cf_x(b, d)}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

320
565



*dá-nos a derivada direcional  $D_{(a,c)}f(b,d)$ .*

*No caso de  $(b,d) \neq (0,0)$ , a derivada direcional de  $D_{(b,d)}f(a,c)$  pode ser calculada a partir da fórmula*

$$\frac{z_s(1,0)}{\sqrt{b^2+d^2}} = \frac{bf_x(a,c)}{\sqrt{b^2+d^2}} + \frac{df_x(a,c)}{\sqrt{b^2+d^2}}.$$

*Para o primeiro caso, o máximo/mínimo de  $D_{(a,c)}f(b,d)$  é atingido para vetores  $(a,c)$  de componentes*

$$a = \pm \|\nabla f(b,d)\| \cos(t)$$

$$c = \pm \|\nabla f(b,d)\| \sin(t)$$

*Para o segundo caso, o máximo/mínimo de  $D_{(b,d)}f(a,c)$  é atingido para vetores  $(b,d)$  de componentes*

$$b = \pm \|\nabla f(a,c)\| \cos(s)$$

$$d = \pm \|\nabla f(a,c)\| \sin(s).$$

**(ii) COORDENADAS DA FORMA**

$$(x(s, t), y(s, t)) = (a + t \cos(s), b + t \sin(s)) :$$

*Para o primeiro caso, da substituição  $s = \theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ), a quantidade  $z_s(0, \theta)$  dá-nos a derivada direcional em  $(a, b)$  segundo os vetores unitários  $(\sin(\theta), \cos(\theta))$ .*

*Para o segundo caso, com base nas igualdades  $z_t(0, 0) = -(x-a)f_y(a, b)$  e  $z_t\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  e na relação de perpendicularidade*

$$(-f_y(a, b), f_x(a, b)) \perp \nabla f(a, b)$$

*podemos concluir que neste caso concreto a regra da cadeia nos permite determinar simultaneamente a equação da reta tangente<sup>81</sup> e da reta*

<sup>81</sup>  $z_s(0, \theta) = 0$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) nos dá todas as possibilidades retas tangentes que passam pelo ponto  $(a, b)$  do conjunto de nível  $C_K$ .

*normal<sup>82</sup> ao conjunto de nível*

$$C_{\kappa} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \kappa\}$$

*que passa por  $(a, b)$ .*

### **Exemplo 4.6.3 (Derivação Funções Uma Variável)**

*Nesta sequência de exemplos vamos ilustrar a aplicabilidade da regra da cadeia na derivação de funções de uma variável:*

#### **(i) DERIVADA PARA INVERSAS DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS<sup>83</sup>**

*As funções*

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

<sup>82</sup> A equação  $z_t(0, 0) + z_t\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$  define a reta normal ao conjunto de nível  $C_{\kappa}$  que passa pelo ponto  $(a, b)$ .

<sup>83</sup> Adaptação do **exercício 20.** da **Lista L4 — Funções de Uma Variável Real II de Bases Matemáticas (2016).**

*correspondem às inversas das funções*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \& \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

*respetivamente.*

*Observe que para  $y(x) = \sqrt{1+x^2}$  e  $z(x) = \sqrt{x^2-1}$  se tem*

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + y(x))$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + z(x)).$$

*Por outro lado as funções  $y$  e  $z$  são deriváveis. Adicionalmente,  $y'(x)$  e  $z'(x)$  são dadas por*

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \& \quad z'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

*Aplicação direta da **Proposição 4.6.1** resulta na seguinte regra de derivação para as funções*

*arcsinh e arccosh:*

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsinh}'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x+y)) + \frac{\partial}{\partial y}(\ln(x+y))y'(x) \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x^2 + x\sqrt{1+x^2} + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh}'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x+z)) + \frac{\partial}{\partial z}(\ln(x+z))z'(x) \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x^2 + x\sqrt{x^2-1} - 1}. \end{aligned}$$

*COMO EXERCÍCIO: Verifique as regras de derivação acima com base nas regras de derivação usuais.*

(ii) **CÁLCULO JUROS COMPOSTOS** O capital gerado a partir de um capital inicial de  $R$  reais ( $R$  \$) ao fim de um período de tempo  $t$  pode ser calculado a partir da função<sup>84</sup>

$$C(t) = R \left( 1 + \frac{J}{nt} \right)^{nt},$$

onde  $J \times 100\%$  corresponde à taxa de juro aplicada, e  $n$  o número de vezes que a taxa de juro  $J$  é aplicada ao longo do período de tempo  $t$ .

Como teve oportunidade de estudar na disciplina de Bases Matemáticas, a função  $C(t)$  converge assintoticamente para a função do tipo exponencial, uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = Re^J.$$

<sup>84</sup> Veja o ficheiro GeoGebra **JurosSimplesCompostos.ggb** – aula nº 15 de **Bases Matemáticas (2016)**.

### DERIVAÇÃO USUAL

Usando a propriedade  $a = e^{\ln(a)}$  ( $a > 0$ ) pode-se concluir que a derivada de  $C(t)$  corresponde a

$$C'(t) = \left[ \left( 1 + \frac{J}{nt} \right)^n - \frac{\frac{J}{n}}{t^2 + \frac{J}{n}t} \right] C(t).$$

### APLICAÇÃO DA REGRA DA CADEIA

Para calcularmos  $C'(t)$  com recurso à **Regra da Cadeia**<sup>85</sup>, iremos considerar a função da forma.

$$f(x, y) = R(1 + x)^y.$$

Observe que para  $x = \frac{J}{nt}$  e  $y = nt$ , se tem

$$C(t) = f\left(\frac{J}{nt}, nt\right).$$

Por outro lado,  $f$  admite derivadas parciais de primeira ordem,  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  e  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ , respetivamente.

<sup>85</sup> Veja **Proposição 4.6.1**.

*Por seu turno, estas satisfazem as seguintes igualdades*

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= Ry(1+x)^{y-1} \\&= \frac{1}{1+x} f(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= R \ln(1+x)(1+x)^y \\&= \ln(1+x) f(x, y).\end{aligned}$$

*Com base na **Regra da Cadeia**<sup>86</sup>, temos que*

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(x(t), y(t)) &= f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) \\&= \left( \frac{-\frac{J}{n}}{t^2 + \frac{J}{n}t} + \ln\left(1 + \frac{J}{nt}\right) \right) f(x, y).\end{aligned}$$

*Verificámos assim que para  $x(t) = \frac{J}{nt}$  e  $y(t) = nt$ ,*

$$\frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = C'(t).$$

<sup>86</sup> Veja **Proposição 4.6.1**.



**Exemplo 4.6.4 (Funções Homogêneas)**

Suponhamos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ) é uma função homogênea de ordem  $k$ , i.e.

$$f(tX) = t^k f(X),$$

para todo o ponto  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , e para todo o  $t > 0$ .

Decorre naturalmente da definição de função homogênea que<sup>87</sup>

$$t \frac{d}{dt} \underbrace{(f(tX))}_{=t^k f(X)} = t(k t^{k-1}) = k f(tX).$$

Por outro lado, assumindo derivadas parciais de  $f$  são contínuas tem-se pela regra da cadeia, que as substituições  $y_i = tx_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) conduzem à regra de

<sup>87</sup> O operador diferencial  $t \frac{d}{dt}$  é conhecido em Física por operador de número.

*derivação*

$$\frac{d}{dt}(f(tX)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

*Finalmente<sup>88</sup>, usando a propriedade*

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} = \frac{1}{t} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

*concluimos que a regra de derivação anterior pode ser reescrita na forma*

$$\frac{d}{dt}(f(tX)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{t} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

*Portanto*

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = t \frac{d}{dt}(f(tX)) = kf(tX).$$

<sup>88</sup> Observe que para a substituição  $y_i = tx_i$  ( $t > 0$ ) é equivalente a  $x_i = \frac{1}{t} y_i$ .

**Observação 4.6.3 (Exemplo 4.6.4)** No **Exemplo 4.6.4** demonstrámos o **Teorema de Euler** para funções homogêneas. Este resultado<sup>89</sup> diz essencialmente o seguinte:

**Uma função diferenciável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é homogênea de ordem  $k$  se e somente se satisfaz a equação diferencial**

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf.$$

Esta classe de funções aparece em diversos modelos econômicos envolvendo funções de lucro, de custo e de demanda. A título de exemplo, considere a **função de Cobb-Douglas**<sup>90</sup>

$$f(x, y) = 4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

<sup>89</sup> Teste por exemplo se pode aplicar este resultado às funções do **exercício 22 & exercício 23** da seção 4.7 **Exercícios**.

<sup>90</sup>  $f$  é homogênea de ordem 1 ( $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ).

onde variável  $x$  denota o capital e variável  $y$  o trabalho.

Para este caso, a função<sup>91</sup>

$$f_x(x, y) = 3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

permite determinar a taxa de variação de produção para o caso de a quantidade de trabalho se mantiver constante, enquanto que a função<sup>92</sup>

$$f_y(x, y) = x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$$

permite determinar a taxa de variação de produção para o caso de a quantidade de capital se mantiver constante.

No **Capítulo 20** do livro<sup>93</sup> *Mathematics for Economists* (1994) de C.P. Simon e L. Blume poderá encontrar vários exemplos de modelos econômicos associados a esta classe de funções.

<sup>91</sup>  $f_x$  é homogênea de ordem 0 ( $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ ).

<sup>92</sup>  $f_y$  é homogênea de ordem 0 ( $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$ ).

<sup>93</sup> Simon, Carl P., and Lawrence Blume. *Mathematics for Economists*. Vol. 7. New York: Norton, 1994.

**Exemplo 4.6.5 (Continuação do Exemplo 4.6.4)**

Considere agora uma função  $f$  nas variáveis  $x$  e  $y$ , diferenciável em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Se considerarmos duas funções diferenciáveis  $r_1$  e  $r_2$  nas variáveis  $s$  e  $t$ , tem-se que para as substituições

$$x = r_1(s, t) \quad \& \quad y = r_2(s, t)$$

que<sup>94</sup>

$$\begin{aligned} s \frac{\partial f}{\partial s} &= s \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + s \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ t \frac{\partial f}{\partial t} &= t \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + t \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Somando as duas equações anteriores, obtemos que

$$\begin{aligned} s \frac{\partial f}{\partial s} + t \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \left( s \frac{\partial x}{\partial s} + t \frac{\partial x}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} \left( s \frac{\partial y}{\partial s} + t \frac{\partial y}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

<sup>94</sup> Aplicação direta da **Proposição 4.6.2**.

No caso de  $r_1$  e  $r_2$  serem funções homogêneas de ordem  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente, podemos concluir pela mesma ordem de ideias do **Exemplo 4.6.4** que

$$s \frac{\partial r_1}{\partial s} + t \frac{\partial r_1}{\partial t} = k_1 r_1(s, t).$$

$$s \frac{\partial r_2}{\partial s} + t \frac{\partial r_2}{\partial t} = k_2 r_2(s, t).$$

Para este caso, a equação diferencial anterior é equivalente a

$$s \frac{\partial f}{\partial s} + t \frac{\partial f}{\partial t} = k_1 \frac{\partial f}{\partial x} + k_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

**Exemplo 4.6.6 (Coordenadas Polares)** Para a função  $f$  nas variáveis  $x$  e  $y$ , considere as substituições para  $r > 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ :

$$x = r \cos(\theta) \quad \& \quad y = r \sin(\theta).$$

Observe que

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) = -y$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos(\theta) = x$$

No caso de  $f$  ser uma função diferenciável, resulta por aplicação direta da **Proposição 4.6.2** resulta que

$$r \frac{\partial f}{\partial r} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}.$$

As expressões anteriores dão-nos as derivadas radiais e angulares para uma função  $f$  nas variáveis  $x$  e  $y$ .

**COMO EXERCÍCIO:** Calcule as derivadas radiais e angular das seguintes funções:

(i) *ÂNGULO COORDENADAS CARTESIANAS:*

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(ii) *FUNÇÃO TIPO GAUSSIANA:*

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} \cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

(iii) *FUNÇÃO TIPO MULTIQUÁDRICA:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} e^{-\arctan(\frac{y}{x})}$$

(iv) *FUNÇÃO TIPO MULTIQUÁDRICA INVERSA:*

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \sin\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

(v) *SPLINES POLI-HARMÔNICOS:*<sup>95</sup>:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^k \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

<sup>95</sup> Este tipo de funções é frequentemente utilizada para modelar a energia de dobra (en:bending energy) de uma chapa fina de metal.



## 4.7 Exercícios

### EXERCÍCIOS PROF. GIL BERNARDES

1. Usando a definição de derivada direcional, determinar os vectores  $\vec{v}$  para os quais  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$  existe, sendo

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no ponto  $P_0 = (0, 0)$ .

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no ponto  $P_0 = (0, 0)$ .

2. Calcule as derivadas direccionais das seguintes funções nos pontos indicados e segundo as direcções  $\vec{v}$  indicadas:

(a)  $f(x, y) = \sin(xy)$ ;

ponto  $A = (0, 0)$ , direção  $\vec{v} = (1, 1)$ .

(b)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;

ponto  $A = (1, 2, 3)$ , direção  $\vec{v} = (0, 0, 1)$ .

3. Usando a definição de derivada parcial, calcule:

(a)  $f_x(0, 0)$  e  $f_y(1, 2)$ , onde  $f(x, y) = x^2y$ .

(b)  $f_x(1, 1)$  e  $f_y(1, 0)$ , onde

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x < y \\ y & \text{se } x \geq y. \end{cases}$$

4. Calcule todas as derivadas parciais de 1<sup>a</sup> ordem das seguintes funções, e indique o gradiente:

(a)  $f(x, y) = e^{2xy^3}$

(b)  $f(x, y, z) = \ln(e^x + z^y)$

(c)  $f(x, y, z) = e^x \sin y + \cos(z - 3y)$

(d)  $f(x, y) = (\cos x)^{\sin y}$

$$(e) \quad f(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$(f) \quad f(x, y, z) = \cos(y\sqrt{x^2 + z^2})$$

$$(g) \quad f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } xy \neq 0 \\ y & \text{se } xy = 0; \end{cases}$$

$$(h) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0 \\ x & \text{se } x+y = 0. \end{cases}.$$

5. Mostre que as funções  $f(x, y)$  satisfazem as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

(a) Se  $f(x, y) = \log(x^2 + xy + y^2)$  então

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2.$$

(b) Se  $f(x, y) = xy + xe^{y/x}$  então

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = xy + f(x, y).$$

6. Mostre que a função  $f$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tem derivadas parciais de primeira ordem em  $(0, 0)$ , embora seja descontínua nesse ponto.

7. Prove que  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$  (vetor nulo), onde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

8. Usando a definição, verifique se são diferenciáveis as seguintes funções nos pontos dados:

(a)  $f(x, y) = xy$ , em qualquer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

(b)  $f(x, y, z) = xyz$ , em todo o seu domínio

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \neq 0 \\ y^4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

no ponto  $P = (0, 0)$ .

$$(d) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y^2 \\ y - 1 & \text{se } x = y^2 \end{cases}$$

no ponto  $P = (1, 1)$ .

9. Determine a equação do plano tangente às seguintes superfícies nos pontos indicados:

(a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;  $(1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$ .

(b)  $z = x^2 + 2y^2$ ;  $(1, -2, 9)$ .

(c)  $z = 9 - x^2$ ;  $(2, 4, 5)$ .

(d)  $4x^2 - y^2 + 2z^2 - u + 1 = 0$ ;  $(1, 1, 1, 6)$ .

(e)  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ ;  $(0, 1/\sqrt{3}, 0)$ .

(f)  $x = z^2 - y^2$ ;  $(0, -1, 1)$ .

### EXERCÍCIOS PROF. MAURÍCIO RICHARTZ

10. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das funções  $f$  abaixo:

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy),$$

$$(b) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(c) \quad f(a, b) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$(d) \quad f(u, v) = \frac{u+v}{u-v}$$

$$(e) \quad f(x, y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$(f) \quad f(x, y) = \arccos(\sqrt{xy})$$

$$(g) \quad f(x, y) = x^{(y^2)}$$

$$(h) \quad f(x, y) = \int_x^y \sqrt{t^3 + 1} dt$$

$$(i) \quad f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$$

$$(j) \quad f(x, y, z, t) = x^2 y \cos\left(\frac{z}{t}\right)$$

$$(k) \quad [f(x, y)]^3 + f(x, y) + 2xy = 3$$

$$(l) \quad \cos[f(x, y)] + 2xf(x, y) = 2$$

11. Determine as derivadas parciais indicadas abaixo:

$$(a) \quad f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4)$$

$$(b) \quad f(x, y) = \ln \sqrt{1 + xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$$

$$(c) \quad f(x, y) = e^{ax} \cos(bx + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2\pi/b, 0)$$

$$(d) \quad f(x, y, z) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, \pi/4)$$

12. Determine uma função  $f(x, y)$  tal que:

$$(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 6y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}.$$

$$(b) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy) + 3x^2 \cos(y^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy) - 2x^3 y \sin(y^2) + 1.$$

13. Determine os pontos em que as funções abaixo são diferenciáveis.

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$(d) \quad f(x, y) = x^{1/3} \cos(y),$$

$$(e) \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

14. (PROVA 1 DE 2014) Mostre que a função abaixo é diferenciável em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

15. Calcule os valores abaixo usando:

(i) o método da aproximação linear de uma função.

(ii) uma calculadora.

(a)  $0,99e^{0,02}$ ;

(b)  $(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01)$ ;



$$(c) \sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2};$$

$$(d) [1,01 + \cos(\pi \times 0,99)]^{3/2}.$$

16. Resolva os itens abaixo com recurso à regra da cadeia.

(a) Sejam  $z = ye^x + xe^y$ ,  $x = \cos(t)$ ,  $y = \sin(t)$ .  
Determine  $dz/dt$ .

(b) Sejam  $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}$ ,  $x = \ln(t)$ ,  $y = t$ .  
Determine  $dz/dt$ .

(c) Sejam  $z = x^2y - xy^3 + 2$ ,  $x = r\cos(\theta)$ ,  $y = r\sin(\theta)$ . Determine  $\partial z/\partial r$  e  $\partial z/\partial \theta$ .

(d) Seja  $z = f(x, y)$  uma função diferenciável tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(4, 8) = 3$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(4, 8) = -1$ . Se  $x = t^2$  e  $y = t^3$ , calcule  $\frac{dz}{dt}\bigg|_{t=2}$

(e) Seja  $w = f(u)$ , com  $u = x + 2y + 3z$ . Mostre que  $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6 \frac{dw}{du}$

(f) Seja  $z = f(x - y, y - x)$ . Mostre que  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

17. A regra do produto triplo (ou regra da cadeia de Euler ou regra da cadeia cíclica) é uma fórmula que relaciona as derivadas parciais de 3 variáveis interdependentes. Ela possui diversas aplicações em termodinâmica. Você vai demonstrá-la nesse exercício.

- (a) Suponha que três variáveis ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) podem ser relacionadas através de uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de tal forma que  $f(x, y, z) = 0$ . Em princípio (se algumas hipóteses forem satisfeitas), você pode usar a função  $f$  para “isolar” uma variável em função das outras. Por exemplo, podemos usar a função  $f$  para relacionar  $x$  com  $y$  e  $z$  através de uma função  $x(y, z)$ . Repare que agora estamos pensando em  $x$  como uma variável dependente das variáveis  $y$  e  $z$ . Assim, podemos escrever  $g(y, z) = f(x(y, z), y, z) = 0$ . Derive essa expressão em relação a  $y$  para

mostrar que:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

OBS: nesse caso é comum escrevermos  $\frac{\partial x}{\partial y}$  como  $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$  para explicitar que estamos mantendo  $z$  constante. Assim, a expressão acima ficaria  $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

- (b) Utilizando as idéias do item (a), mostre a regra da cadeia cíclica:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

- (c) Uma possível aplicação em termodinâmica aparece na lei dos gases ideais  $PV = nRT$ . Podemos reescrever essa relação como  $f(P, V, T) = 0$  para uma certa função  $f$ . (Qual função  $f$  é essa?) Utilize a regra da

cadeia cíclica para relacionar derivadas parciais de  $P$ ,  $V$  e  $T$ .

18. A temperatura em um ponto  $(x, y)$  de uma placa de metal no plano  $xy$  é dada (em  $^{\circ}\text{C}$ ) por  $T(x, y) = 25e^{x^2-4y^2-1}$ . Uma formiga pode andar livremente sobre a placa. Assuma que a formiga está sempre em equilíbrio térmico com a placa.
- (a) Suponha que a formiga está numa trajetória de temperatura constante  $25^{\circ}\text{C}$ . Faça um esboço das possíveis trajetórias.
- (b) A formiga resolve se deslocar a partir do ponto  $(1, 0)$  na direção na qual a temperatura aumenta mais rapidamente. Determine essa direção e calcule a derivada direcional da temperatura nessa direção.
- (c) Se a velocidade (constante) da formiga é 0,04 unidades de comprimento por hora,

determine a taxa de variação da temperatura da formiga (i.e.  $dT/dt$ ) no momento em que ela parte do ponto  $(1, 0)$ .

- (d) Repita os itens (b) e (c) considerando que a formiga parte do ponto  $(3, \sqrt{2})$  ao invés do ponto  $(1, 0)$

19. Nos itens (a), (b), e (c) abaixo, faça um esboço da situação.

- (a) Considere a elipse  $4x^2 + 9y^2 = 1$ . Determine a reta tangente à elipse e a reta normal à elipse no ponto  $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{9}\right)$ . Considere a superfície  $z = 2x^2 + y^2$ . Determine a equação do plano tangente à superfície e a equação da reta normal à superfície no ponto  $(1, 1, 3)$ .
- (b) Considere a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Determine a equação do plano tangente à es-

fera e a equação da reta normal à esfera no ponto  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

- (c) Determine o plano tangente à superfície  $z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 34$  no ponto  $(1, 3, 2)$ . Determine a equação da reta normal à superfície no ponto  $(1, 3, 2)$ .

20. (PROVA 1 DE 2014)

Considere a função  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ .

- (a) Faça um esboço das curvas de nível de  $f$ .  
(b) Faça um esboço do gráfico de  $f$ .  
(c) Determine o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(2, 1, 2)$ .

## DESAFIOS

21. Estabeleça na reta real a relação entre o conceito de derivada direcional e os limites laterais

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \& \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

350 | 565

**DICA:** Use a **Definição 4.1.2**.

22. Calcule a derivada direcional das seguintes funções<sup>96</sup>, relativamente a um ponto genérico  $A = (a, b)$ , segundo a direção do vetor unitário  $\vec{v} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

(a)  $f(x, y) = xy^2 - x^3$ .

(b)  $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ .

23. Calcule todas as derivadas parciais de primeira ordem, e indique o gradiente para cada uma das seguintes funções:

(a)  $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x+y+z}$

(b)  $f(x, y) = \cos(\pi xy)$

(c)  $f(x, y) = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

<sup>96</sup> As funções deste exercício são conhecidas na literatura por sela de macaco ("monkey saddle") e sela de cachorro ("dog saddle"). Para mais detalhes, revise o **exercício 8** da seção **2.6 Exercícios** (Capítulo 2 **Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível**).

$$(d) \ f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 5}$$

$$(e) \ f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$(f) \ ^{97} f(x, y, z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$(g) \ ^{98} f(x, y, z) = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

24. Seja  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $h(3) = 4$ , e

$$f(x, y, z) = \int_0^{x+y^2+z^2} h(t) dt.$$

Calcule o gradiente de  $f$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .

<sup>97</sup> A função  $f(x, y, z)$  corresponde a uma representação cartesiana do ângulo azimutoidal em coordenadas esféricas.

<sup>98</sup> Esta função corresponde a uma representação alternativa do ângulo azimutoidal utilizado em coordenadas esféricas.



25. Verifique que a função  $f$  dada por

$$f(x, y, z, t) = e^{\frac{x}{y} - \frac{z}{t}}$$

satisfaz<sup>99</sup> a equação diferencial

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + t \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

26. Seja  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ) e  $f, g$  duas funções de três variáveis tais que  $f(x, y, z) = h(g(x, y, z))$ .

(a) Mostre que se  $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , então a função  $f$  satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira

<sup>99</sup> O operador diferencial  $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t}$  corresponde à representação cartesiana da derivada radial em  $\mathbb{R}^4$ .

ordem<sup>100</sup>:

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

(b) Verifique se as funções  $\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$  e  $\sin(\pi xyz)$  satisfazem o sistema de equações do item (a).

27. Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ) uma função que satisfaz as seguintes equações:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

<sup>100</sup> Estas equações correspondem à situação em que um sistema físico descrito pela função  $f$  possui momento angular nulo.

- (a) Mostre que se  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , então  $f$  é a função constante.
- (b) Para  $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ , dê um exemplo de uma função  $f$ , não constante, que satisfaz a condição acima.
- (c) Formule e resolva o análogo dos itens anteriores para uma função  $f$ , nas variáveis  $x, y$  e  $z$ .
28. Encontre a equação do plano tangente para as seguintes equações nos pontos indicados:
- (i)  $w = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3yz^3$  no ponto  $(x, y, z, w) = (-1, 0, 1, 7)$ .
- (ii)  $(\sqrt{x^2 + y^2} - 25)^2 + z^2 = 4$  no ponto  $(x, y, z) = (5 \cos(\theta), 5 \sin(\theta), 2)$ .

# **Máximos e Mínimos**

*I feel the need of attaining the maximum of intensity with the minimum of means. It is this which has led me to give my painting a character of even greater bareness.*

– Joan Miro

## 5.1 Derivadas de Ordem Superior

No **Capítulo 4 Derivação e Diferenciabilidade** dedicámos parte do nosso estudo à existência e ao cálculo de derivadas parciais de primeira ordem. Verificámos, em particular, que a continuidade das derivadas parciais de primeira ordem

$$f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

num conjunto aberto, contendo um ponto  $A$ , era uma *condição suficiente*<sup>1</sup> para garantir a diferenciabilidade

<sup>1</sup> Veja **Proposição 4.3.3** & **Proposição 4.4.2** do **Capítulo 4 Derivação e Diferenciabilidade**.

da função em  $A$ .

Neste caso particular, faz também sentido averiguar se as  $n$  funções de várias variáveis  $f_{x_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) admitem derivadas parciais, assim como faz sentido averiguar se estas também são diferenciáveis num ponto  $A$ .

No caso de as derivadas parciais  $\frac{\partial f_{x_j}}{\partial x_i}$  existirem, para todos os  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , dizemos que  $f$  admite *derivadas parciais de segunda ordem*. Estas derivadas podem ser denotadas do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &:= \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &:= \frac{\partial f_{x_j}}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad [i \neq j].\end{aligned}$$

ou alternativamente por

$$f_{x_i x_i} := \left(f_{x_i}\right)_{x_i} \text{ e } f_{x_i x_j} := \left(f_{x_j}\right)_{x_i} \quad (i \neq j).$$

No caso de as funções  $f_{x_j}$  admitam derivadas parciais de primeira ordem, tem-se que a função  $f$  admite  $n^2$  derivadas parciais de segunda ordem. Estas podem ser representadas como uma matriz  $n \times n$  da forma

$$D^2 f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz denota *matriz Hessiana* de  $f$  no ponto  $X$ , de coordenadas

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

No caso de  $f$  ser uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ , a *matriz Hessiana* de  $f$  corresponde à matriz  $2 \times 2$

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Para o caso de  $f$  ser uma função nas variáveis  $x, y$  e  $z$ , a *matriz Hessiana* de  $f$  corresponde à matriz  $3 \times 3$

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

As derivadas parciais de terceira ordem e ordens superiores de  $f$ , podem ser definidas de modo análogo. A definição a seguir estabelece uma condição para existência de derivadas parciais de ordem  $k$ :



**Definição 5.1.1 (Função Classe  $C^k$ )** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de várias variáveis. Dizemos que  $f$  é uma função de classe  $C^k$  se todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a  $k$  existem e são contínuas em  $\Omega$ .

**Observação 5.1.1 ( $C^0$ ,  $C^1$  &  $C^2$ )** Dizemos que uma função é de classe  $C^0$  quando ela é contínua em  $\Omega$ , e de classe  $C^1$  quando a função  $f$  e as derivadas parciais de primeira ordem

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

são contínuas em  $\Omega$ .

Pela mesma ordem de ideias, dizemos que  $f$  é uma função de classe  $C^2$  se

(i)  $f$  é de classe  $C^1$ .

(ii) As derivadas parciais

$$f_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

são contínuas em  $\Omega$ .

**Exemplo 5.1.1 (Função de Duas Variáveis)** A função  $f$  definida por

$$f(x, y) = xye^{x+2y}$$

é contínua em  $\mathbb{R}^2$  e admite também derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $\mathbb{R}^2$ . Estas são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1+x)ye^{x+2y} \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (1+2y)xe^{x+2y}.$$

Derivando as funções acima em ordem a  $x$  e a  $y$ ,

obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (1+x)y e^{x+2y} \right) \\ &= (2+x)y e^{x+2y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (1+2y)x e^{x+2y} \right) \\ &= (1+x)(1+2y)y e^{x+2y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( (1+x)y e^{x+2y} \right) \\ &= (1+x)(1+2y)y e^{x+2y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (1+2y)x e^{x+2y} \right) \\ &= 4x(1+y)e^{x+2y}.\end{aligned}$$

*Ou seja, as derivadas de segunda ordem também são contínuas em  $\mathbb{R}^2$  pelo que  $f$  é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ .*

Neste caso tem-se que para qualquer  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  a matriz Hessiana de  $f$  é dada por

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} (2+x)ye^{x+2y} & (1+x)(1+2y)ye^{x+2y} \\ (1+x)(1+2y)ye^{x+2y} & 4x(1+y)e^{x+2y} \end{pmatrix}$$

Esta matriz é simétrica uma vez que<sup>2</sup>

$$\left(D^2 f(x, y)\right)^T = D^2 f(x, y).$$

**Exemplo 5.1.2** Consideremos agora a função por partes  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

<sup>2</sup> $\left(D^2 f(x, y)\right)^T$  denota a transposta da matriz  $D^2 f(x, y)$ .

Nos pontos da forma  $(0, y)$  e  $(x, 0)$  podemos verificar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -2y \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 2x.$$

Daqui resulta que a matriz Hessiana no ponto  $(0, 0)$ :

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

não é uma matriz simétrica, uma vez que as derivadas mistas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

não coincidem.

COMO EXERCÍCIO:<sup>3</sup> verifique que as derivadas mistas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ não são contínuas em } (0, 0).$$

<sup>3</sup> Este exemplo é semelhante ao **exercício 15** da seção **5.4 Exercícios**.

O resultado que se segue nos fornece uma condição suficiente para garantir que as derivadas mistas de *segunda ordem* coincidem e, por conseguinte, que nos garante que a *matriz Hessiana* resultante é simétrica.

Em particular, este resultado nos garante que apenas precisamos de calcular  $\frac{n(n+1)}{2}$  derivadas parciais de segunda ordem – ao invés de  $n^2$  derivadas parciais de segunda ordem – para construir a *matriz Hessiana* de  $f$ .

**Proposição 5.1.1 (Teorema de Clairault)** <sup>4</sup> *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto contendo  $A$ , e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .*

*Se para todo o  $i = 1, 2, \dots, n$  e para todo o  $j \neq i$  as derivadas parciais*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ \& } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

<sup>4</sup> Também conhecido por Teorema de Schwarz e por Teorema de Young.

*forem contínuas em  $A$ , então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A).$$

**Observação 5.1.2** *No caso de  $f$  ser uma função de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) em  $\Omega$ , tem-se em particular que as derivadas de primeira ordem, assim como as derivadas mistas de segunda ordem são contínuas, pelo que podemos aplicar a **Proposição 5.1.1**.*

Na próxima sequência de exemplos vamos ilustrar a aplicabilidade da **Proposição 5.1.1**. Começemos com a equação de propagação, também conhecida por *equação de Klein-Fock-Gordon*, ou simplesmente por *Equação de Klein-Gordon*:

**Exemplo 5.1.3 (Equação de Klein-Gordon)** *Seja agora  $f$  uma função de classe  $C^2$  que satisfaz as equação de Klein-Gordon*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = m^2 c^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t),$$

*onde  $E = mc^2$  corresponde à equação de Einstein. Esta equação dá-nos a equivalência entre massa ( $m$ ) e energia ( $E$ ) em termos da velocidade da luz ( $c$ ).*

*Observe que no caso de as funções  $u(x + mc^2 t)$  e  $v(x - mc^2 t)$  serem funções  $C^2$  de uma só variável que para*

$$y = x + mc^2 t \text{ \& } z = x - mc^2 t$$

*se tem que a função*

$$f(x, t) = u(x + mc^2 t) + v(x - mc^2 t)$$



satisfaz as seguintes equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= u_y(y) + v_z(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= mc^2 u_y(y) - mc^2 v_z(z).\end{aligned}$$

Derivando mais uma vez em ordem a  $x$  e a  $t$ , obtemos<sup>5</sup> que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_y(y) + v_z(z)) \\ &= u_{yy}(y) + v_{zz}(z)\end{aligned}$$

<sup>5</sup> Ao longo deste exemplo estamos fazendo uso sistemático da **Proposição 4.6.2** da seção 4.6 **Regra da Cadeia (Capítulo 4 Derivação e Diferenciabilidade)**.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_y(y) + v_z(z)) \\ &= mc^2 u_{yy}(y) - mc^2 v_{zz}(z) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (mc^2 u_y(y) - mc^2 v_z(z)) \\ &= m^2 c^4 u_{yy}(y) + m^2 c^4 v_{zz}(z).\end{aligned}$$

*Desta última sequência de igualdades facilmente se conclui que para funções  $u$  e  $v$  de classe  $C^2$ , a função*

$$f(x, t) = u(x - mc^2 t) + v(x + mc^2 t)$$

*nos fornece uma solução para a equação de Klein-Gordon.*

**Exemplo 5.1.4 (Equações de Cauchy-Riemann)**

Suponha que  $f$  é um campo potencial em  $\mathbb{R}^2$  tal que as funções<sup>6</sup>  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y) \end{cases}.$$

(i) **SUPONDO QUE  $u$  É DE CLASSE  $C^2$**

Para o caso de  $u$  ser uma função de classe  $C^2$ , tem-se pelo **Teorema de Clairault**<sup>7</sup> que

$$u_{xy} = u_{yx}$$

Por outro lado, resulta do sistema de equações anterior, resulta que  $v$  também é uma função de

<sup>6</sup> As funções  $u$  e  $v$  que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann são conhecidas na literatura por 'funções harmônicas conjugadas'.

<sup>7</sup> Veja **Proposição 5.1.1**.

classe  $C^2$ , assim como as seguintes identidades

$$\begin{aligned}u_x = v_y &\implies u_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = v_{yy} \\ u_y = -v_x &\implies u_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = -v_{xx}.\end{aligned}$$

donde se conclui que  $v_{yy} = -v_{xx}$ .

**COMO EXERCÍCIO:** Resolva o **exercício 16** da seção 5.4 **Exercícios**.

(ii) **TRANSFORMAÇÃO PARA COORDENADAS POLARES**

Para as transformações  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ , tem-se que<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Veja **Exemplo 4.6.6** da seção 4.6 **Regra da Cadeia (Capítulo 4 Derivação e Diferenciabilidade)**.

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Em particular<sup>9</sup>, para as funções  $u$  e  $v$  tem-se que as equações acima podem ser traduzidas pelas equações matriciais

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -y & x \\ -x & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\theta \\ -r v_r \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante das matrizes

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} -y & x \\ -x & -y \end{pmatrix}$$

<sup>9</sup> Para uma função  $g$  nas variáveis  $r$  e  $\theta$ ,  $g_r := \frac{\partial g}{\partial r}$  e  $g_\theta := \frac{\partial g}{\partial \theta}$

dá  $r^2$ . Da condição  $r > 0$  resulta que as matrizes anteriores são invertíveis.

Deste dois últimos sistemas de equações podemos concluir, após alguns cálculos suplementares<sup>10</sup>, que as funções  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann se e somente se

$$\begin{cases} ru_r(x, y) = v_\theta(x, y) \\ u_\theta(x, y) = -rv_r(x, y) \end{cases}$$

para  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ .

**Exemplo 5.1.5 (Funções Harmônicas)** <sup>11</sup> Suponha agora a função  $f$ , de classe  $C^2$  nas variáveis  $x$  e  $y$ , satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

<sup>10</sup> Estes cálculos podem ser realizados com recurso à regra de Cramer para matrizes  $2 \times 2$ .

<sup>11</sup> Veja o **Exercício 3** da seção 5.4 **Exercícios**.

(i) **FUNÇÕES HARMÔNICAS VS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN**

Observe que nas condições do enunciado,  $f$  ser de classe  $C^2$  nos garante que as derivadas mistas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  são iguais<sup>12</sup>. Por outro lado, da condição de harmonicidade tem-se que  $f_{yy} = -f_{xx}$ .

Se definirmos um campo potencial  $F(x, y)$  pela condição

$$\nabla F(x, y) = (f_x(x, y), -f_y(x, y))$$

obtemos que as componentes

$$u(x, y) = f_x(x, y) \text{ \& } v(x, y) = -f_y(x, y)$$

do gradiente  $\nabla F(x, y)$  satisfazem as **equações de Cauchy-Riemann**<sup>13</sup>. Neste caso o potencial<sup>14</sup>

<sup>12</sup> Por aplicação da **Proposição 5.1.1**.

<sup>13</sup> As funções  $f_x$  e  $-f_y$  são conhecidas na literatura por 'funções harmônicas conjugadas'.

<sup>14</sup> Este potencial é conhecido na literatura por potencial harmônico.

$F(x, y)$  pode ser calculado por uma das seguintes regras de anti-derivação<sup>15</sup>:

$$F(x, y) = \int^x f_x(x, y) dx + \Phi(y)$$

$$F(x, y) = - \int^y f_y(x, y) dy + \Psi(x).$$

Nas integrais indefinidas acima, as funções  $\Phi(y)$  e  $\Psi(x)$  são funções nas variáveis  $y$  e  $x$ , respectivamente.

Aplicando mais uma vez a **Proposição 5.1.1**, concluímos com base nas expressões acima que a soma das componentes de

$$u(x, y) = f_x(x, y) \text{ \& } v(x, y) = -f_y(x, y)$$

de  $\nabla F(x, y)$  é igual a  $\Phi'(x) + \Psi'(y)$ .

<sup>15</sup> Obtidas por uma adaptação judiciosa do **Teorema Fundamental do Cálculo** para funções de uma variável.



**(ii) MUDANÇA PARA COORDENADAS POLARES**

Voltemos novamente a nossa atenção para o **Exemplo 4.6.6** da seção **4.6 Regra da Cadeia** (**Capítulo 4 Derivação e Diferenciabilidade**).

Observe que a mudança de coordenadas

$$x = r \cos(\theta) \quad \& \quad y = r \sin(\theta)$$

nos dá

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \& \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Aplicação da **Regra da Cadeia**<sup>16</sup> que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

<sup>16</sup> Estamos assumindo que  $x$  e  $y$  são as 'variáveis independentes'.

**COMO EXERCÍCIO:** Verifique por aplicação da regra da cadeia que uma função  $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  é harmônica se e somente se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0.$$

**Exemplo 5.1.6 (Funções Poli-harmônicas)** Para  $k$  natural, considere as funções da forma

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^k \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Dado que para  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$  se tem

$$\frac{\partial f}{\partial r} = r^{2k-1}(1 + 2k \ln(r)) \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0,$$

podemos concluir com base na **Proposição 5.1.1** que não existe nenhuma função  $g(r, \theta)$  tal que

$$g(r, \theta) = f(x, y) \quad \& \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} \neq 0.$$

Por outro lado, tem-se que para  $k = 1$  que a função  $r^2 \ln(r)$  satisfaz a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta^2} = 6 + 4 \ln(r).$$

Aplicando mais uma vez o operador diferencial<sup>17</sup>

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2}$$

podemos concluir que a função

$$6 + 4 \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

é harmônica, pelo que para  $k = 1$  se tem que

$$g(x, y) = (x^2 + y^2) \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

<sup>17</sup> Este operador corresponde a uma representação do operador de Laplace  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  em coordenadas polares.

satisfaz a equação bi-harmônica

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 g(x, y) = 0.$$

**COMO EXERCÍCIO:**

- (i) Mostre por indução matemática que se  $g$  for uma função de classe  $C^{4k}$  que

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{2k} g(x, y) = \\ &= \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{\partial^{4k} g}{\partial x^{2j} \partial x^{4k-2j}}(x, y). \end{aligned}$$

- (ii) Mostre que a função  $f(x, y)$  do exemplo satisfaz a equação poli-harmônica de ordem  $2k$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{2k} f(x, y) = 0.$$

## 5.2 Extremos Locais e Globais

Nesta seção iremos reformular algumas ferramentas estudadas em *Funções de Uma Variável* (FUV) para o estudo de máximos e mínimos de uma função. Começemos por introduzir as noções de **máximo e mínimo global/local**:

### Definição 5.2.1 (Máximos e Mínimos Globais)

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de várias variáveis, com  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- (i) **MÁXIMO GLOBAL:** Dizemos que um ponto  $A$  de  $\Omega$  é um máximo global de  $f$  se e somente se a desigualdade

$$f(X) \leq f(A)$$

é satisfeita para todos os pontos  $X$  de  $\Omega$ .

Neste caso, o valor  $x_{n+1} = f(A)$  corresponde ao máximo da função  $f$ .

(ii) **MÍNIMO GLOBAL:** Dizemos que um ponto  $A$  de  $\Omega$  é um mínimo global de  $f$  se e somente se a desigualdade

$$f(X) \geq f(A)$$

é satisfeita para todos os pontos  $X$  de  $\Omega$ .

Neste caso, o valor  $x_{n+1} = f(A)$  corresponde ao mínimo da função  $f$ .

**Definição 5.2.2 (Máximos e Mínimos Locais)** <sup>18</sup>

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de várias variáveis de domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $B_r(A)$  uma bola aberta<sup>19</sup> de  $\mathbb{R}^n$  de centro em  $A$  e raio  $r$ .

(i) **MÁXIMO GLOBAL:** Dizemos que um ponto  $A$  de  $\Omega$  é um máximo local de  $f$  se e somente se existe

<sup>18</sup> Recorde a noção de 'Bola Aberta' introduzida na **Definição 3.1.1**.

<sup>19</sup> Em alguns livros, a noção de bola aberta aparece associada à noção de vizinhança de um ponto.

$r > 0$  tal que a desigualdade

$$f(X) \leq f(A)$$

é satisfeita para todos os pontos  $X$  na interseção  $\Omega \cap B_r(A)$ .

Neste caso, o valor  $x_{n+1} = f(A)$  corresponde a um máximo local da função  $f$ .

(ii) **MÍNIMO GLOBAL:** Dizemos que um ponto  $A$  de  $\Omega$  é um mínimo global de  $f$  se e somente se a desigualdade

$$f(X) \geq f(A)$$

é satisfeita para todos os pontos  $X$  na interseção  $\Omega \cap B_r(A)$ .

Neste caso, o valor  $x_{n+1} = f(A)$  corresponde a um mínimo local da função  $f$ .

Os máximos e mínimos globais de uma função  $f$  são designados por **extremos globais** enquanto que

os *máximos e mínimos locais* de uma função  $f$  são designados por **extremos locais**.

A diferença na determinação de *extremo local* e *extremo global* reside essencialmente no seguinte: De acordo com a **Definição 5.2.1**, para que um ponto  $A$  seja *extremo global*, temos de comparar o valor da função  $f$  no candidato a extremo global com todos os pontos do domínio de  $f$ , enquanto que, para que  $A$  seja um *extremo local* teremos que comparar o valor da função  $f$  com todos os pontos do domínio em uma determinada *bola aberta*. Note-se ainda que todo o *extremo global* de uma função  $f$  é também um *extremo local* de  $f$ .

Como iremos ilustrar na próxima sequência de exemplos, a existência de extremos locais/globais depende intrinsecamente da expressão analítica da função  $f$  e da 'geometria'<sup>20</sup> do domínio  $\Omega$  de  $f$ .

<sup>20</sup> Matematicamente, **topologia do domínio** é a terminologia mais coerente.



**Exemplo 5.2.1 (Máximos & Mínimos Revisitados)**

Voltemos novamente a nossa atenção para o **Exemplo 2.3.1 & Exemplo 2.3.2** da seção 2.4 **Conjuntos de Nível**<sup>21</sup>

(i) Para o caso do **Exemplo 2.3.1**, a função

$$f(x, y) = a(x^2 + y^2) + c$$

satisfaz a desigualdade  $f(x, y) \leq c$  no caso de  $a < 0$ , e  $f(x, y) \geq c$  no caso de  $a > 0$ .

Da igualdade  $f(0, 0) = c$ , retiramos que  $(0, 0)$  é um máximo global em  $\mathbb{R}^2$ , para valores de  $a < 0$ , e um mínimo global em  $\mathbb{R}^2$  para valores de  $a > 0$ .

(ii) No **Exemplo 2.3.2**, considerámos a função

$$f(x, y) = 2 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

de domínio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 121\}.$$

<sup>21</sup> **Capítulo 2 Funções, Gráficos e Conjuntos de Nível.**

*Dado que todos os pontos  $(x, y)$  de  $\Omega$  satisfazem as inequações*

$$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 11,$$

*podemos facilmente concluir  $-31 \leq f(x, y) \leq 2$ , ou seja,  $f$  admite extremos globais.*

*Para este caso, o ponto  $(0, 0)$  é o único máximo global de  $f$ , e os pontos da forma*

$$A = (11 \cos(\theta), 11 \sin(\theta)) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

*correspondem aos mínimos globais de  $f$ . Por definição, estes mínimos também são mínimos locais.*

(iii) *Se ao invés de  $\Omega$ , o domínio da função do **Exemplo 2.3.2** fosse por exemplo um dos seguintes conjuntos:*

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{3}x^2 + 2y^2 \leq 121 \right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 121 \right\}$$

*a função  $f$  admitiria apenas quatro mínimos globais, tal como ilustrado no gif animado*

***MinimosLocaisConeRevolucao.gif***

**COMO EXERCÍCIO:** *Determine os mínimos globais e locais da função  $f(x, y) = 2 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$  para o caso de:*

**(a)**  $\Omega_1$  *ser o domínio de  $f$ .*

**(b)**  $\Omega_2$  *ser o domínio de  $f$ .*

O resultado que se segue dá-nos uma condição suficiente para garantir a existência de *extremos globais*:

**Proposição 5.2.1 (Teorema de Weierstraß)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de várias variáveis de domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  é uma função contínua e  $\Omega$  um conjunto fechado<sup>22</sup> e limitado<sup>23</sup>, então a função  $f$  admite extremos globais.*

**Exemplo 5.2.2 (Aplicabilidade Proposição 5.2.1)**  
*Observe que:*

- (i) *Embora a função  $f(x, y) = a(x^2 + y^2) + c$  do Exemplo 2.3.1 admita um extremo global, o seu domínio não é fechado nem limitado.*
- (ii) *Para a função  $f(x, y) = 2 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$  do Exemplo 2.3.2 já é possível garantir por aplicação direta da Proposição 5.2.1 que  $f$  admite extremos locais.*

<sup>22</sup> Dizemos que  $\Omega$  é um conjunto fechado se para todo o  $A \in \Omega$ , e  $r > 0$  se tem  $\Omega \cap B_r(A) \neq \emptyset$ .

<sup>23</sup> Dizemos que  $\Omega$  é um conjunto limitado se existe uma constante  $\kappa$  tal que  $\|\vec{OX}\| \leq \kappa$ , onde  $O$  denota o ponto  $(0, 0, \dots, 0)$ .

(iii) As funções  $\arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$  e  $\arccos\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$  têm como domínio o conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x|\}.$$

*Este conjunto é fechado mas não é limitado pelo que não é possível aplicar diretamente a **Proposição 5.2.1**. No entanto ambas as funções admitem extremos globais, extremos esses que podem ser determinados com base no fato que o contradomínio das funções  $\arcsin$  e  $\arccos$  ser fechado e limitado em  $\mathbb{R}$ .*

**COMO EXERCÍCIO:** *Averigue para quais funções do **Exemplo 3.6.3** pode assegurar pela **Proposição 5.2.1** a existência de extremos globais.*

Como pode constatar através dos exemplos enunciados em **Exemplo 5.2.2**, o Teorema de Weierstraß<sup>24</sup>,

<sup>24</sup> **Proposição 5.2.1.**

quando aplicável, permite-nos localizar *extremos globais* na fronteira<sup>25</sup> do domínio  $\Omega$ . O resultado que se segue fornece-nos um critério para determinar *extremos locais* no interior<sup>26</sup> de  $\Omega$ .

### Proposição 5.2.2 (Candidatos a Extremos Locais)

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de várias variáveis de domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $A$  um ponto interior de  $\Omega$ .

Se as derivadas de primeira ordem de  $f$  são contínuas e  $A$  é um extremo local de  $f$ , então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0 \quad , \forall_{i=1,2,\dots,n}.$$

Com efeito, suponha que  $A$  é um *extremo local* de  $f$ . Se para algum vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  considerarmos a função

<sup>25</sup> Dizemos que  $A$  é um ponto na fronteira de  $\Omega$  se para todo o  $r > 0$  se tem  $B_r(A) \cap \Omega \neq \emptyset$  e  $B_r(A) \cap (\mathbb{R} \setminus \Omega) \neq \emptyset$

<sup>26</sup> Dizemos que  $A$  é um ponto interior de  $\Omega$  se existe um  $r > 0$  tal que  $B_r(A) \subseteq \Omega$ .

de uma variável

$$h(t) = f(A + t\vec{v}).$$

Temos então que no caso de  $t$  um extremo local de  $h$  que

$$h'(t) = 0.$$

Em particular<sup>27</sup>, para  $t = 0$  temos pela **Definição 4.1.2** que a equação  $h'(0) = 0$  é equivalente a termos

$$D_{\vec{v}}f(A) = 0.$$

Por outro lado, assumindo que as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  são contínuas, podemos concluir pela **Proposição 4.4.2** que  $f$  é diferenciável em  $A$  e, por conseguinte,  $D_{\vec{v}}f(A)$  pode ser calculada como

$$D_{\vec{v}}f(A) = \nabla f(A) \bullet \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

<sup>27</sup> Pela **Definição 4.1.2**, tem-se que para qualquer  $\vec{v} \neq \vec{0}$  a derivada direcional  $D_{\vec{v}}f(A)$  pode ser calculada a partir da igualdade  $D_{\vec{v}}f(A) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} h'(0)$ .

Finalmente, pela **Proposição 4.4.3** temos que

$$-\|\nabla f(A)\| \leq D_{\vec{v}}f(A) \leq \|\nabla f(A)\|.$$

Desta última desigualdade, podemos concluir que  $D_{\vec{v}}f(A) = 0$  sempre que  $\|\nabla f(A)\| = 0$  é simultaneamente o valor *máximo e mínimo* de  $D_{\vec{v}}f(A)$ .

Finalmente, usando as propriedades associadas à norma de um vetor, tem-se que  $\|\nabla f(A)\| = 0$  é equivalente a

$$\nabla f(A) = \vec{0}.$$

Portanto, a igualdade  $D_{\vec{v}}f(A) = 0$  é sempre satisfeita desde que as *derivadas parciais de primeira ordem* da função  $f$  se anulem em  $A$ , i.e. sempre o *sistema de equações*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

é satisfeito.



**Observação 5.2.1 (Candidatos a Pontos Extremos)**

*Como consequência da **Proposição 5.2.1** & **Proposição 5.2.2** pode ser centrada ao estudo dos seguintes casos:*

- (i) **Pontos interiores** de  $\Omega$ .*
- (ii) **Pontos fronteiros** de  $\Omega$ .*
- (iii) **Pontos estacionários**<sup>28</sup> de  $f$ .*

Uma vez identificados os pontos candidatos a extremos de uma dada função  $f$ , temos de verificar se estes pontos são:

- (i) Extremos globais**<sup>29</sup>.
- (ii) Extremos locais**<sup>30</sup>.

<sup>28</sup> i.e. todos os pontos  $X$  de  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  para os quais  $\nabla f(X)$  se 'anula'.

<sup>29</sup> Veja **Definição 5.2.1**.

<sup>30</sup> Veja **Definição 5.2.2**.

**(iii) Nem uma coisa nem outra.**

O próximo resultado permite-nos classificar os máximos e os mínimos para o caso em  $f$  é uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ :

**Proposição 5.2.3 (Condições de Segunda Ordem)**

Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  em  $\Omega$ , e  $(a, b)$  um ponto interior de  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  que satisfaz a condição  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ .

Consideremos a matriz Hessiana<sup>31</sup> de  $f$  no ponto  $(a, b)$

$$D^2 f(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Então as seguintes condições são verdadeiras:

- (i) Se  $\det D^2 f(a, b) < 0$ , então  $(a, b)$  não é extremo local.

<sup>31</sup> Na representação da matriz Hessiana, estamos fazendo uso do Teorema de Clairault (Proposição 5.1.1)

- (ii) Se  $\det D^2 f(a, b) > 0$  e  $f_{xx}(a, b) > 0$ , então  $(a, b)$  é um mínimo local de  $f$ .
- (iii) Se  $\det D^2 f(a, b) > 0$  e  $f_{xx}(a, b) < 0$ , então  $(a, b)$  é um máximo local de  $f$ .

Para chegar no resultado anterior, considere a aproximação quadrática de

$$h(t) = f(a + tv_1, b + tv_2),$$

onde  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  denota um vetor não nulo de  $\mathbb{R}^2$ .

Pelo Teorema de Taylor, tem-se que

$$h(t) \approx h(0) + h'(0)t + h''(0)\frac{t^2}{2}.$$

Ora, dizer que  $A = (a, b)$  é um ponto crítico de  $f$  é o mesmo que dizer que  $0$  é um ponto crítico de  $h$ . Para este caso, a fórmula de aproximação anterior reduz-se a

$$h(t) \approx h(0) + h''(0)\frac{t^2}{2}.$$

Por outro lado, por aplicação direta da **Regra da Cadeia**<sup>32</sup>, resulta que

$$\begin{aligned}h''(t) &= \frac{d}{dt} \left( \underbrace{v_1 f_x(A + t \vec{v}) + v_2 f_y(A + t \vec{v})}_{=h'(t)} \right) \\&= v_1^2 f_{xx}(A + t \vec{v}) + 2v_1 v_2 f_{xy}(A + t \vec{v}) \\&+ v_2^2 f_{yy}(A + t \vec{v}).\end{aligned}$$

Assumindo que  $f_{xx}(a, b) \neq 0$ , tem-se para  $t = 0$  que a fórmula anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}h''(0) &= f_{xx}(a, b) \left( v_1 + \frac{f_{xy}(a, b)}{f_{xx}(a, b)} v_2 \right)^2 + \\&+ \frac{v_2^2}{f_{xx}(a, b)} \det D^2 f(a, b),\end{aligned}$$

<sup>32</sup> **Proposição 4.6.1.**

onde

$$\det D^2 f(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

corresponde ao determinante da *matriz Hessiana* de  $f$  em  $(a, b)$ .

Sendo  $h''(0)$  a equação de um polinômio quadrático nas variáveis  $v_1$  e  $v_2$ , obtemos as seguintes caracterizações:

- (i) As condições  $f_{xx}(a, b) < 0$  &  $\det D^2 f(a, b) > 0$  asseguram que  $h''(0) < 0$ , ou seja, que  $t = 0$  é um *máximo local*<sup>33</sup> de  $h$ , ou equivalentemente, que  $(a, b)$  é um *máximo local*<sup>34</sup> de  $f$ .
- (ii) As condições  $f_{xx}(a, b) > 0$  &  $\det D^2 f(a, b) > 0$  asseguram que  $h''(0) > 0$ , ou seja, que  $t = 0$  é

<sup>33</sup>  $h''(0) < 0$  implica que  $h(t) \approx h(0) + h''(0)\frac{t^2}{2} \leq h(0)$ .

<sup>34</sup> Para  $h(t) = f(A + t\vec{v})$ ,  $h(1) \leq h(0) \Leftrightarrow f(A + \vec{v}) \leq f(A)$ .

um *mínimo local*<sup>35</sup> de  $h$ , ou equivalentemente, que  $(a, b)$  é um *mínimo local*<sup>36</sup> de  $f$ .

- (iii) No caso de  $\det D^2 f(a, b) < 0$  tem-se que  $h''(0)$  não tem sinal constante, pelo que nada podemos concluir quanto à natureza do *ponto estacionário*  $(a, b)$  de  $f$ .

**Observação 5.2.2 (Pontos de Sela)** Para  $\det D^2 f(a, b) \leq 0$  temos o seguinte:

- (i) A condição  $\det D^2 f(a, b) < 0$  diz-nos que  $(a, b)$  maximiza a função numa direção  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  e minimiza-a numa outra direção  $\vec{w} = (w_1, w_2)$ , distinta de  $\vec{v}$ . Assim, perto do ponto  $(a, b, f(a, b))$  o gráfico de  $f$  se assemelha a uma sela<sup>37</sup> de um cavalo. Daí deriva o nome **ponto de sela**.

<sup>35</sup>  $h''(0) > 0$  implica que  $h(t) \approx h(0) + h''(0)\frac{t^2}{2} \geq h(0)$ .

<sup>36</sup> Para  $h(t) = f(A + t\vec{v})$ ,  $h(1) \geq h(0) \Leftrightarrow f(A + \vec{v}) \geq f(A)$ .

<sup>37</sup> Para as funções da forma  $f(x, y) = (x - a)^2 - (y - b)^2$ , tem-se que  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  &  $\det D^2 f(a, b) = -4$ .

(ii) A condição<sup>38</sup>  $\det D^2 f(a, b) = 0$  assegura-nos que o sinal de  $h''(0)$  depende exclusivamente do sinal de  $f_{xx}(a, b)$ . É necessário portanto estudar a natureza do ponto estacionário por outros métodos.

### 5.3 Multiplicadores de Lagrange

Muitos dos problemas de extremos envolvendo uma função  $f$  englobam condições de vínculo da forma

$$g(X) = \kappa$$

i.e. quando o valor  $X$  a encontrar se restringe aos pontos do conjunto de nível  $\kappa$  de uma função  $g$ . No

**Exemplo 5.2.1** quando discutimos a existência de mínimos para a função  $f(x, y) = 2 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$  em

<sup>38</sup> A condição  $\det D^2 f(a, b) = 0$  dá-nos duas informações importantes sobre a matriz Hessiana de  $f$  em  $(a, b)$ : (i)  $D^2 f(a, b)$  não admite inversa (ii) 0 é um autovalor de  $D^2 f(a, b)$ .

domínios<sup>39</sup> do tipo

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 121\}$$

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{3}x^2 + 2y^2 \leq 121\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 121\}$$

identificámos geometricamente que estes estavam na interseção da *curva de nível*<sup>40</sup>

$$f(x, y) = -31$$

e a fronteira dos domínios  $\Omega, \Omega_1$  e  $\Omega_2$  respetivamente.

O resultado a seguir dá-nos um método de cálculo sistemático para determinar analiticamente os extremos de uma função de duas variáveis sujeita a

<sup>39</sup> Reveja o gif animado **MinimosLocaisConeRevolucao.gif**.

<sup>40</sup>  $f(x, y) = -31$  é a curva de nível na qual  $f$  atinge o seu mínimo.



*condições de vínculo*<sup>41</sup>

**Proposição 5.3.1 (Multiplicadores de Lagrange)**

*Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de classe  $C^1$  nas variáveis  $x$  e  $y$ , e seja  $A = (a, b)$  um extremo local de  $f$  que satisfaz a condição de regularidade*

$$\nabla g(a, b) := (g_x(a, b), g_y(a, b)) \neq (0, 0).$$

*Então existe um número real<sup>42</sup>  $\lambda^*$  tal que o ponto  $(a, b, \lambda^*)$  de  $\mathbb{R}^3$  nos dá uma solução para o sistema acoplado de equações*

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) &= \kappa. \end{cases}$$

Como verificámos ao longo da seção **4.4 Derivada Direcional vs Gradiente** do **4 Derivação e Diferenciabilidade** o gradiente de uma função possui

<sup>41</sup> Este tipo de problemas é denominado por 'problemas de extremos condicionados'.

<sup>42</sup> O multiplicador de Lagrange.

propriedades geométricas muito importantes. Da relação<sup>43</sup>

$$D_{\vec{v}}f(A) = \|\nabla f(A)\| \cos(\theta)$$

facilmente podemos averiguar:

- (i) Em qual direção<sup>44</sup> a função  $f$  cresce/decrece mais rapidamente.
- (ii) Que existe uma *relação de perpendicularidade*<sup>45</sup> entre o vetor gradiente e as curvas de nível de uma função.

Com efeito, se  $R(t) = (r_1(t), r_2(t))$  corresponder a uma parametrização do conjunto de nível  $g(x, y) = \kappa$ ,

<sup>43</sup> Veja **Proposição 4.4.3**

<sup>44</sup> Para obtermos a direção do máximo escolhemos  $\theta = 0$ ; para obtermos a direção do mínimo escolhemos  $\theta = \pi$ .

<sup>45</sup>  $\vec{v} \perp \nabla f(A)$  é equivalente a escolhermos  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Mais detalhes sobre esta caracterização podem ser encontrados na **Observação 4.5.2**.

i.e.

$$g(r_1(t), r_2(t)) = \kappa$$

No caso de  $R(0) = (a, b)$ , podemos facilmente concluir pela **Regra da Cadeia** que a função

$$h(t) = f(r_1(t), r_2(t))$$

satisfaz a *condição de primeira ordem*<sup>46</sup>

$$\nabla f(a, b) \bullet (r'_1(0), r'_2(0)) = 0,$$

onde  $R'(0) = (r'_1(0), r'_2(0))$  denota o *vetor tangente* à curva de nível no ponto  $(a, b)$ . Esta última condição nos garante a relação de perpendicularidade

$$\nabla f(a, b) \perp (r'_1(0), r'_2(0)),$$

e por conseguinte, nos permite concluir que  $\nabla f(a, b)$  é perpendicular à curva de nível  $g(x, y) = \kappa$ .

<sup>46</sup> De acordo com a **Observação 4.6.1**, temos que  $h'(t) = \nabla f(r_1(t), r_2(t)) \bullet (r'_1(t), r'_2(t))$

Do fato do gradiente  $\nabla g(a, b)$  ser também perpendicular à curva de nível  $g(x, y) = \kappa$ , podemos facilmente deduzir que  $\nabla f(a, b)$  e  $\nabla g(a, b)$  são *vetores paralelos* entre si. Esta última condição nos garante a existência de uma constante  $\lambda^*$  tal que

$$\nabla f(a, b) = \lambda^* \nabla g(a, b).$$

...[faltam aqui explicações  
adicionais]...

Tomando em linha de conta todas as considerações que fizemos ao longo desta seção, estamos agora em condições de enunciar um procedimento padrão para determinar os extremos de uma função de duas ou mais variáveis num subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , delimitado por um *conjunto de nível*<sup>47</sup>

$$g(X) = \kappa$$

<sup>47</sup> Para este procedimento ser possível, é necessário que  $g$  seja de classe  $C^1$  nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

PASSO 1: Determinar todos os pontos estacionários de  $\Omega$ .

PASSO 2: Caso seja necessário, utilizar o *método os multiplicadores de Lagrange* para determinar todos os pontos  $\Omega$  para os quais  $f$  atinge o máximo/mínimo no conjunto de nível

$$g(X) = \kappa.$$

PASSO 3: De entre todos os pontos determinados no PASSO 1 & PASSO 2, escolher apenas os pontos onde o valor da função é maior e/ou menor. Os valores de  $f$  nestes pontos serão, respetivamente, **o máximo e o mínimo global de  $f$** .

## 5.4 Exercícios

### EXERCÍCIOS PROF. GIL BERNARDES

1. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das funções seguintes:

(a)  $f(x, y) = x^4 y^3$ ;

(b)  $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ ;

(c)  $f(x, y, z) = x^2 e^{yz} + y \ln z$ .

2. Mostre que a função definida por  $f(x, y) = -\log(x^3 + y^3)$  verifica  $f_{xy} = f_{yx}$ .

NOTA: a igualdade acima nem sempre é verdadeira.

3. Uma função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diz-se *harmônica* se verificar a *equação de Laplace*,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Mostre que as seguintes funções são harmônicas:

$$(a) \quad f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$(a) \quad f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2});$$

$$(a) \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2.$$

4. Sendo  $w(x, y) = \cos(x - y) + \ln(x + y)$  mostre que  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ .

5. Utilizando o *Teorema de Clairault*, mostre que não existe nenhuma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 + 1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = y^2$ .

6. Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y \\ 0 & \text{se } x = -y \end{cases}$$

Calcule  $f_y(x, 0)$ ,  $f_x(0, y)$  e mostre que  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ .

7. Mostre que caso  $f$  tenha derivadas parciais de 3ª ordem contínuas se tem  $f_{xxy} = f_{yxx}$ .
8. Para  $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3x^2$ , verifique que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}.$$

Mostre as igualdades anteriores são válidas para  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$  em  $\mathbb{R}^3$ .

9. Calcule  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1, 0)$  onde  $f(x, y) = (1 + x^2)^{x^y}$ .
10. Sejam  $\phi(x, y)$  uma função real de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $F(t) = \phi(t^2, \phi(t, t))$ . Calcule  $F''(t)$  em função das derivadas parciais de  $\phi$ .
11. Sejam  $\phi(x, y)$  uma função real de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $F(u, v) = \phi(\phi(u, v), \phi(v, u))$ . Calcule  $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u, v)$  em função das derivadas parciais de  $\phi$ .



12. Determine os pontos estacionários e depois, mediante o estudo do comportamento da função nas vizinhanças desses pontos, os máximos e os mínimos locais de cada uma das seguintes funções:

(a)  $f(x, y) = x^4 + y^6$

(b)  $f(x, y) = 3xy + 4$

(c)  $f(x, y) = x^2 - y^2$

(d)  $f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)^4$

(e)  $f(x, y) = x + y$

(f)  $f(x, y) = 1 - y^2$

13. Determine os extremos locais das seguintes funções:

(a)  $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$

(b)  $f(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2$

(c)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

$$(d) \ f(x, y) = (x - 2 + y^2)(x - y^2)$$

$$(e) \ f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$$

$$(f) \ f(x, y) = \cos x + \cos y$$

$$(g) \ f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

$$(h) \ f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$$

$$(i) \ f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2xy + z^2 - 2xz$$

$$(j) \ f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$$

14. Seja  $f(x, y) = (2ax - x^2)(2by - y^2)$  com  $a$  e  $b$  não nulos.

(a) Determine  $a$  e  $b$  de modo que  $f$  tenha um máximo no ponto  $(1, 1)$ .

(b) Para os valores  $a$  e  $b$  da alínea anterior verifique se a função tem outros máximos, mínimos ou pontos sela.

## EXERCÍCIOS PROF. MAURÍCIO RICHARTZ

15. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

(a) Se  $(x, y) \neq (0, 0)$ , determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

(b) Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

(c) Mostre que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ .

16. Uma função  $z = f(x, y)$  com derivadas parciais de ordem 2 contínuas e que satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

é dita harmônica.

(a) Determine quais das seguintes funções são harmônicas:  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $g(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$  e  $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

- (b) Sejam  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  duas funções que possuem derivadas de segunda ordem contínuas e que satisfazem  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ . Mostre que  $u$  e  $v$  são funções harmônicas.
- (c) (Desafio) Considere a equação de Laplace do enunciado e faça a substituição  $f(x, y) = A(x)B(y)$ , onde  $A$  e  $B$  são funções de uma variável. Em seguida, divida a equação obtida por  $f(x, y)$  e observe que o resultado final é uma soma de dois termos, sendo o primeiro dependente apenas de  $x$  e o segundo dependente de  $y$  apenas. Essa soma só pode ser identicamente nula se ambos os termos forem constantes. Use esse fato para encontrar uma classe de soluções da equação de Laplace. Esse método é conhecido como **separação de variáveis**.

17. Determine e classifique os pontos críticos das

funções abaixo:

(a)  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5,$

(b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3,$

(c)  $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 12x + 10,$

(d)  $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}.$

(e)  $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 4y + 2z - 5$

(f)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + y - z + xy + 6$

18. Encontre os pontos críticos da função  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ . Em particular, determine a natureza do ponto crítico  $(1, 1, 1)$  através dos autovalores da matriz Hessiana associada.
19. Para cada uma das funções abaixo, justifique por que um máximo global e um mínimo global devem existir. Em cada caso, encontre esses valores de máximo e mínimo.

- (a)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  na região triangular de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ ,
- (b)  $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 + y}$ ;  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ ,
- (c)  $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x + y)$ ;  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$ .
- (d)  $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$  no quadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .
- (e)  $f(x, y) = x - y\sqrt{3}$  no círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
- (f)  $f(x, y) = x - y\sqrt{3}$  na região  $\frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1$ .
- (g)  $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$  no círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

20. Três alelos A, B e O, combinados dois a dois, determinam 4 tipos sanguíneos possíveis: tipo A (dado pela combinação AA ou AO), tipo B (dado por BB ou BO), tipo AB (dado pela combinação AB) e tipo O (dado pela combinação OO). A lei de Hardy-Weinberg afirma que a

proporção  $P$  de indivíduos em uma população que carregam dois alelos distintos é:

$$P(p, q, r) = 2pq + 2pr + 2rq,$$

onde  $p$ ,  $q$  e  $r$  são, respectivamente, as proporções dos alelos A, B e O na população. Use o fato de que  $p + q + r = 1$  (já que esses três alelos são os únicos possíveis), para mostrar que  $P$  no máximo  $2/3$ .

21. Resolva os exercícios abaixo de duas maneiras:
- (i) sem usar multiplicadores de Lagrange e
  - (ii) usando multiplicadores de Lagrange
- (a) Determine a menor distância do ponto  $(2, 0, -3)$  ao plano  $x + y + z = 1$
  - (b) Quais são os pontos do cone  $z^2 = x^2 + y^2$  que estão mais próximos do ponto  $(4, 2, 0)$ ?
  - (c) Encontre 3 números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

- (d) Encontre as dimensões de uma caixa retangular de  $1000\text{cm}^3$  que possui a menor área superficial possível.
- (e) A base de um aquário de volume  $V$  é feito de uma certa rocha, enquanto suas laterais são feitas de vidro. Sabendo que a rocha em questão é, por unidade de área, cinco vezes mais cara que o vidro, encontre as dimensões do aquário que minimizam o custo dos materiais.
- (f) Determine o volume máximo de uma caixa retangular inscrita no elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
- (g) Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, da função  $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$  sujeita aos vínculos  $x + y + z = 1$  e  $x + 2y + 3z = 6$ .

22. A interseção entre as superfícies  $x^2 - xy + y^2 -$



$z^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 1$  é uma curva. Encontre os pontos dessa curva que são mais próximos à origem.

23. (Desafio)<sup>48</sup> Encontre o máximo de

$$f(x, y, z) = \ln(x) + \ln(y) + 3\ln(z)$$

no primeiro quadrante da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ . Use o resultado para provar que, para quaisquer números reais positivos  $a$ ,  $b$  e  $c$  vale a desigualdade

$$abc^3 \leq \sqrt{\frac{3}{125}} (a + b + c)^3.$$

**DICA:** Use a igualdade

$$(a + b + c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{=5r^2} + 2ab + 2ac + 2bc.$$

<sup>48</sup> **Desafio foi corrigido.** Agradeço ao aluno M. Gonzalez pela chamada de atenção e pela dica sugerida.

# Parte II

# II

# Integrais Múltiplas

# Integrais Duplas e Triplas

*Whereas Nature does not admit of more than three dimensions ... it may justly seem very improper to talk of a solid ... drawn into a fourth, fifth, sixth, or further dimension.*

– John Wallis

Neste capítulo iremos introduzir de uma forma muito informal a definição e as propriedades principais de integrais duplas e triplas sobre regiões limitadas.

## 6.1 *Integrais Duplas sobre Retângulos*

Começemos por considerar no plano  $xy$  uma região retangular da forma

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\},$$

e por  $\mathcal{S}$  um sólido limitado inferiormente pelo plano  $xy$ , e superiormente por uma função contínua nas variáveis  $x$  e  $y$ :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

cujas faces são paralelas aos planos  $xz$  e  $yz$ .

O volume de  $\mathcal{S}$  pode ser formalmente definido como

$$\text{Vol}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA,$$

onde  $\iint_{\mathcal{R}}$  e  $dA = dx dy$  denotam o símbolo de integração sobre a região  $\mathcal{R}$  e o diferencial de área no plano  $xy$ .

No caso de  $\mathcal{S}_{x_i}$  denotar a interseção do sólido  $\mathcal{S}$  com o plano de equação

$$x = x_i \quad (a \leq x_i \leq b)$$

temos que  $\mathcal{S}_{x_i}$  é uma seção de  $\mathcal{S}$ , limitada superiormente pela equação  $z = f(x_i, y)$  e inferiormente pelo segmento de reta definido pelas equações

$$x = x_i \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Para este caso, tem-se que a integral

$$A_i = \int_c^d f(x_i, y) dy$$

nos dá a área de  $\mathcal{S}_{x_i}$ . Escolhendo  $x$  um elemento genérico do intervalo

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

tem-se que o integral indefinido

$$A(\mathcal{S}_x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

nos permite calcular a área<sup>1</sup> de uma seção genérica  $\mathcal{S}_x$  de  $\mathcal{S}$ .

O volume do sólido  $\mathcal{S}$  pode ser assim calculado em termos da *integral definida*

$$\text{Vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b A(\mathcal{S}_x) dx.$$

De modo análogo, se para um ponto genérico  $y$  do intervalo

$$[c, d] = \{y \in \mathbb{R} : c \leq y \leq d\}$$

<sup>1</sup> A área de  $\mathcal{S}_x$  essa correspondente à interseção de  $\mathcal{S}$  por um plano paralelo a  $yz$  que passa pelo ponto, de coordenadas  $(x, 0, 0)$ .

$\mathcal{S}_y$  denotar a interseção de  $\mathcal{S}$  por um plano paralelo a  $xz$  que passa pelo ponto, de coordenadas  $(0, y, 0)$  obtemos que a *integral definida*<sup>2</sup>

$$\text{Vol}(\mathcal{S}) = \int_c^d A(\mathcal{S}_y) dy$$

também nos permite calcular o volume de  $\mathcal{S}$ .

**Observação 6.1.1 (Princípio de Cavalieri)** O princípio utilizado anteriormente para dedução de fórmulas para cálculo de volumes, com base na área de seções, é conhecido por princípio de Cavalieri ou por método das cascas cilíndricas.

Uma revisão<sup>3</sup> informal deste método pode ser encontrada na seção **5.2 Volumes** do livro **Cálculo, Volume I** de James Stewart.

<sup>2</sup>  $A(\mathcal{S}_y)$  denota a integral indefinida  $A(\mathcal{S}_y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , integral essa que nos dá a área de uma seção genérica  $\mathcal{S}_y$ .

<sup>3</sup> Também pode encontrar uma síntese deste método nas notas de aula do **PROFESSOR MAURÍCIO RICHARTZ**, clicando no hiperlink **semana11.pdf**.



Num contexto mais genérico, a noção de integral dupla de uma função  $f$  nas variáveis  $x$  e  $y$  pode ser obtida, considerando partições  $\mathcal{P}_m$  e  $\mathcal{Q}_n$  para os intervalos  $[a, b]$  e  $[c, d]$  de  $\mathbb{R}$ , respetivamente.

Em concreto, se

$$\mathcal{P}_m = \{x_0, x_1, \dots, x_m\} \quad \& \quad \mathcal{Q}_n = \{y_0, y_1, \dots, y_n\},$$

com  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  e  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ , correspondem a duas decomposições dos intervalos  $[a, b]$  e  $[c, d]$  em subintervalos da forma

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \& \quad [y_{j-1}, y_j] \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

respetivamente, tem-se que os  $mn$  retângulos da forma

$$\mathcal{R}_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

cujos lados são paralelos aos eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  nos dão uma partição para a região  $\mathcal{R}$ .

Denotando por

$$A(\mathcal{R}_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

a área de  $\mathcal{R}_{ij}$ , por  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  um ponto de  $\mathcal{R}_{ij}$  tem-se que o valor da integral dupla  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$  pode ser definido como o **limite das somas duplas de Riemann** relativas à partição

$$\{\mathcal{R}_{ij} : i = 1, 2, \dots, m \text{ \& } j = 1, 2, \dots, n\}$$

de  $\mathcal{R}$ :

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) A(\mathcal{R}_{ij}),$$

onde

$$\delta := \max_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} A(\mathcal{R}_{ij})$$

denota o diâmetro da partição de  $\mathcal{R}$ .

Dizemos assim que  $f$  **é integrável em  $\mathcal{R}$**  se o limite acima existe e é independente da partição de  $\mathcal{R}$  escolhida.

**Observação 6.1.2 (Partições Finas)** *Note-se que ao fazermos o diâmetro da partição convergir para zero, estamos a considerar um número infinitamente grande retângulos  $\mathcal{R}_{ij}$ , de área infinitesimal, pelo que o limite*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) A(\mathcal{R}_{ij})$$

*pode ser também representado na seguinte forma:*

$$\lim_{mn \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) A(\mathcal{R}_{ij}).$$

Uma vez que a definição de integral dupla corresponde a uma generalização natural do conceito de integral de Riemann, podemos 'facilmente' verificar, com base na definição acima, que as propriedades abaixo também são também válidas sobre qualquer região  $\mathcal{R}$ .

**Proposição 6.1.1 (Propriedades Integral Dupla)**

Seja  $\mathcal{R}$  uma região limitada do plano  $xy$ , e  $f$  e  $g$  duas funções integráveis em  $\mathcal{R}$ . Então valem as seguintes propriedades:

**(I) LINEARIDADE:**

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} (f(x, y) \pm g(x, y)) dA &= \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA \pm \\ &\pm \iint_{\mathcal{R}} g(x, y) dA.\end{aligned}$$

**(II) HOMOGENEIDADE:**

$$\iint_{\mathcal{R}} \lambda f(x, y) dA = \lambda \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA,$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**(III) MONOTONIA:**

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA \geq \iint_{\mathcal{R}} g(x, y) dA,$$

no caso de  $f(x, y) \geq g(x, y)$  em  $\mathcal{R}$ .

(IV) **ADITIVIDADE:** No caso de  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  serem duas regiões do plano que não se interesetam, exceto possivelmente na sua fronteira, tem-se que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA &= \iint_{\mathcal{R}_1} f(x, y) dA \\ &+ \iint_{\mathcal{R}_2} f(x, y) dA,\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ .

Pese embora o fato de a construção anterior nos dar uma definição rigorosa de integral dupla que nos permite estender o conceito de volume para os casos abaixo:

(i) **VOLUME DO SÓLIDO  $\mathcal{S}$ , LIMITADO SUPERIORMENTE POR  $\mathcal{R}$  E INFERIORMENTE PELA SUPERFÍCIE, DE EQUAÇÃO  $z = f(x, y)$ :**

$$\text{Vol}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{R}} (-f(x, y)) dA.$$

(ii) **VOLUME DO SÓLIDO  $\mathcal{S}$ , LIMITADO SUPERIORMENTE PELA SUPERFÍCIE  $z = g(x, y)$  E INFERIORMENTE PELA SUPERFÍCIE, DE EQUAÇÃO  $z = f(x, y)$ , PROJETADAS EM  $\mathcal{R}$ :**

$$\text{Vol}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{R}} (g(x, y) - f(x, y)) dA.$$

a sua aplicabilidade é deveras tediosa de implementar, dado envolver o cálculo de séries numéricas em termos de duplos somatórios.

O próximo resultado, cuja demonstração iremos omitir por questões de complexidade, corresponde a uma generalização do *princípio de Cavalieri*. Este resultado permite-nos calcular o valor de  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$  em termos das integrais iteradas:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &:= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy &:= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

**Proposição 6.1.2 (Teorema de Fubini)** <sup>4</sup>

Seja

$$dA = dx dy$$

o diferencial de área, e  $f$  uma função integrável na região retangular

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}.$$

Então vale a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

**Observação 6.1.3 (Separação de Variáveis)** *Pode acontecer casos em que uma função  $f$  pode ser escrita numa das seguintes formas:*

<sup>4</sup> *Detalhes da demonstração do Teorema de Fubini podem ser consultados nas páginas 332-337 do livro **Vector Calculus (2003)** de Jerrold E. Marsden & Anthony Tromba.*

$$(i) \quad f(x, y) = \alpha h_1(x), \alpha - \text{constante}$$

$$(ii) \quad f(x, y) = \beta h_2(y), \beta - \text{constante}$$

$$(iii) \quad f(x, y) = h_1(x)h_2(y),$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  são funções de uma variável, de domínio  $[a, b]$  e  $[c, d]$  respetivamente.

Assumindo que  $h_1$  e  $h_2$  são funções integráveis nos intervalos  $[a, b]$  e  $[c, d]$ , respetivamente, obtemos que a função  $f$  para os casos acima também é integrável na região retangular  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ .

Aplicação direta da **Proposição 6.1.2** conduz-nos à seguinte sequência de identidades:

(i) **FUNÇÃO  $f$  DEPENDE APENAS DA VARIÁVEL  $x$ :**

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \alpha h_1(x) dA &= \int_c^d \left( \alpha \int_a^b h_1(x) dx \right) dy \\ &= \alpha(d-c) \int_a^b h_1(x) dx. \end{aligned}$$



(ii) **FUNÇÃO  $f$  DEPENDE APENAS DA VARIÁVEL  $y$ :**

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \beta h_1(y) dA &= \int_a^b \left( \beta \int_c^d h_2(y) dy \right) dx \\ &= \beta(b-a) \int_c^d h_2(y) dy.\end{aligned}$$

(iii) **FUNÇÃO  $f$  COMO PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL:**<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} h_1(x) h_2(y) dA &= \int_a^b \left( h_1(x) \int_c^d h_2(y) dy \right) dx \\ &= \left( \int_a^b h_1(x) dx \right) \left( \int_c^d h_2(y) dy \right).\end{aligned}$$

**Exemplo 6.1.1 (Volume de um Sólido)** Suponha que  $\mathcal{S}$  é um sólido limitado superiormente pelo parabolóide elíptico, de equação

$$z = 16 - x^2 - 3y^2$$

<sup>5</sup> No **exercício 1** encontrará alguns exemplos onde pode aplicar diretamente esta propriedade.

*e inferiormente pela região retangular*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ \& \ 0 \leq y \leq 2\}.$$

*Claramente, a função  $f(x, y) = 16 - x^2 - 3y^2$  satisfaz a condição  $16 \geq f(x, y) \geq 0$ , sendo que:*

- (i) Atinge o seu máximo global no ponto de coordenadas  $(0, 0)$ .*
- (ii) Atinge o seu mínimo global no pontos  $(x, y)$ , pertencentes ao conjunto de nível*

$$x^2 + 3y^2 = 16.$$

*Daqui resulta que a integral dupla*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$$

*nos permite calcular o volume pretendido.*

Usando as propriedades de integral dadas pela **Proposição 6.1.1**, temos que

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = 16 \iint_{\mathcal{R}} 1 dA - \iint_{\mathcal{R}} x^2 dA - 3 \iint_{\mathcal{R}} y^2 dA,$$

pelo que o problema de volume se reduz ao cálculo auxiliar das integrais seguintes duplas<sup>6</sup>:

$$\iint_{\mathcal{R}} 1 dA, \iint_{\mathcal{R}} x^2 dA \text{ e } \iint_{\mathcal{R}} y^2 dA.$$

Note que:

- (i)  $\iint_{\mathcal{R}} 1 dA$  representa a área do retângulo  $\mathcal{R}$ , donde facilmente se conclui que

$$\iint_{\mathcal{R}} 1 dA = (2 - 0) \times (2 - 0) = 4.$$

<sup>6</sup> Observe que as integrais duplas  $\iint_{\mathcal{R}} x^2 dA$  e  $\iint_{\mathcal{R}} y^2 dA$  também podem ser interpretadas como volumes, uma vez que  $x^2 \geq 0$  e  $y^2 \geq 0$ .

(ii) Por aplicação direta das fórmulas obtidas na **Observação 6.1.3**, tem-se que  $\iint_{\mathcal{R}} x^2 dA$  e  $\iint_{\mathcal{R}} y^2 dA$  representam a mesma quantidade, uma vez que

$$\iint_{\mathcal{R}} x^2 dA = \int_0^2 \int_0^2 x^2 dy dx = \int_0^2 2x^2 dx$$

$$\iint_{\mathcal{R}} y^2 dA = \int_0^2 \int_0^2 y^2 dx dy = \int_0^2 2y^2 dy.$$

Usando o fato de  $\frac{2}{3}y^3$  ser uma anti-derivada de  $2y^2$ , concluímos que

$$\iint_{\mathcal{R}} x^2 dA = \iint_{\mathcal{R}} y^2 dA = \frac{16}{3},$$

donde

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = 16 \times 4 - \frac{16}{3} - 3 \times \frac{16}{3} = \frac{128}{3}.$$

### Observação 6.1.4 (Truque Cálculo Integrais)

No exercício anterior usámos o fato de a região  $\mathcal{R}$  ser um quadrado de lado 2 para concluir facilmente que as integrais duplas

$$\iint_{\mathcal{R}} x^2 dA \text{ \& } \iint_{\mathcal{R}} y^2 dA$$

*representam o mesmo volume.*

*O mesmo tipo de argumento pode ser utilizado para mostrar que no caso de<sup>7</sup>  $\mathcal{R} = [a, b] \times [a, b]$  se tem*

$$\iint_{\mathcal{R}} h(x) dA = \iint_{\mathcal{R}} h(y) dA,$$

*desde que  $h$  seja de uma variável, e integrável no intervalo  $[a, b]$ .*

*Esta conclusão pode ser facilmente retirada com base na **Observação 6.1.3**.*

**COMO EXERCÍCIO:** Use a **Observação 6.1.4** para calcular o valor da área do sólido delimitado inferiormente pelo quadrado  $\mathcal{R}$  de vértices  $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1)$  &  $(1, 1)$  e superiormente por uma das seguintes funções:

(a)  $f(x, y) = \sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y).$

<sup>7</sup> Esta região  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}^2$  é usualmente denotada por  $[a, b]^2$ .

$$(b) f(x, y) = (e^x + e^y)^2.$$

Para finalizar, procure verificar as igualdades abaixo, **sem calcular o valor das integrais duplas**<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} (\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)) dA &= \\ &= \iint_{\mathcal{R}} (\cos^2(\pi x) + \cos^2(\pi y)) dA \end{aligned}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} (e^x + e^y)^2 dA = \iint_{\mathcal{R}} (e^{-x} + e^{-y})^2 dA.$$

Na sequência de exemplos que ilustrámos anteriormente, assim como em alguns dos itens do **exercício 1**, para o cálculo das integrais duplas usou-se o fato de:

- (i) O **Teorema de Fubini**<sup>9</sup> permitir reduzir o cálculo da integral dupla a integrais iterados, inte-

<sup>8</sup> **DICA:** Use as identidades  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$  &  $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$ .

<sup>9</sup> **Proposição 6.1.2.**

grais esses que podem ser calculos como integrais de funções de uma variável.

(ii) As integrais da forma

$$\int_c^d f(x, y)dy \text{ e } \int_a^b f(x, y)dx$$

poderem ser facilmente calculadas, no caso de as funções  $h_1(x) = f(x, y)$  e  $h_2(y) = f(x, y)$  admitirem anti-derivadas que podem ser calculadas de forma imediata.

No que concerne ao **item (ii)**, pode existir casos em que a funções

$$\int_c^d f(x, y)dy \text{ e } \int_a^b f(x, y)dx$$

não admitem uma anti-derivada fácil de calcular.

Para estes casos, teremos que recorrer técnicas de integração estudadas na disciplina de *Funções de Uma Variável* (FUV), entre as quais:

**(a) Integração por Partes.****(b) Integração por Substituição.**

Para ilustrarmos este procedimento, consideremos de seguida dois exemplos, não necessariamente triviais, que requerem um bom domínio de técnicas de integração.

**Exemplo 6.1.2 (Por Partes & Por Substituição)**

Considere<sup>10</sup> a função  $f$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \arcsin(y + 3),$$

cujo domínio é dado pelo conjunto

$$\mathbb{R} \times [-4, -2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq -2\}.$$

Obviamente que a função  $f$  ser integrável em regiões da forma

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [-4, -2],$$

<sup>10</sup> Função retirada da tabela do **Exemplo 3.6.3**.



uma vez que é contínua em todos os pontos do seu domínio, e uma vez que

$$\mathcal{R} \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \times [-4, -2]}_{\text{domínio de continuidade de } f}.$$

domínio de continuidade de  $f$

Combinando as propriedades de **LINEARIDADE**<sup>11</sup>, envolvendo a integral dupla com o **Teorema de Fubini**<sup>12</sup>, podemos facilmente obter a seguinte igualdade.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA &= 2 \int_a^b \frac{x^3}{3} dx + \\ &+ (b-a) \int_{-4}^{-2} \arcsin(y+3) dy. \end{aligned}$$

No caso de  $\int_a^b \frac{x^3}{3} dx$ , podemos facilmente concluir, usando uma anti-derivada de  $\frac{x^3}{3}$  que

$$\int_a^b \frac{x^3}{3} dx = \frac{b^4 - a^4}{12}.$$

<sup>11</sup> Veja **Proposição 6.1.1**

<sup>12</sup> Veja **Observação 6.1.3**.

*Para o cálculo da integral definida*

$$\int_{-4}^{-2} \arcsin(y+3) dy$$

*não nos é possível fazer de forma imediata, dado não conhecermos a-priori uma anti-derivada para a função  $\arcsin(y+3)$ .*

*Para contornar esta dificuldade, vamos calcular este integral por dois métodos distintos:*

**(I) INTEGRAÇÃO POR PARTES:** Comece por observar que

$$\arcsin(y+3) = y' \arcsin(y+3)$$

$$(y \arcsin(y+3))' = \arcsin(y+3) + \frac{y}{\sqrt{1-(y+3)^2}}.$$

*Destas duas relações obtemos que*

$$\int_{-4}^{-2} \arcsin(y+3) dy = \int_{-4}^{-2} (y \arcsin(y+3))' dy - \int_{-4}^{-2} \frac{y}{\sqrt{1-(y+3)^2}} dy.$$

No caso da integrável  $\int_{-4}^{-2} (y \arcsin(y+3))' dy$ , temos pelo **Teorema Fundamental do Cálculo** que<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{-2} (y \arcsin(y+3))' dy &= \\ &= 4 \arcsin(-1) - 2 \arcsin(1) = -\pi. \end{aligned}$$

Para o caso da integral definida

$$\int_{-4}^{-2} \frac{y}{\sqrt{1-(y+3)^2}} dy,$$

podemos facilmente calcular o seu valor com base na determinação de uma anti-derivada para  $\frac{y}{\sqrt{1-(y+3)^2}}$ .

<sup>13</sup> Note que  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  &  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ . Como a função  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  corresponde à inversa da função seno no intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , concluímos que  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$  &  $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ .

**COMO EXERCÍCIO:**<sup>14</sup>

- (a) Mostre que  $-2\sqrt{1-(y+3)^2} - 3\arcsin(y+3)$  é uma anti-derivada de  $\frac{y}{\sqrt{1-(y+3)^2}}$ .
- (b) Procure mostrar, usando o método de primitivação por partes que

$$\int_{-4}^{-2} \arcsin(y+3)dy = 0.$$

**(II) INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO+POR PARTES**<sup>15</sup>

Observe que a função

$$h(\theta) = \sin(\theta) - 3$$

<sup>14</sup> Esta estratégia para determinação da integral definida, usando apenas o método de integração por partes, é deveras o caminho mais tedioso, mas que lhe permite treinar e revisar conceitos anteriormente abordados em **Funções de Uma Variável (FUV)**.

<sup>15</sup> Com o método de substituição conseguimos determinar um integral definido bem mais fácil de calcular pelo método de integração por partes.

nos dá a inversa da função  $\arcsin(y + 3)$ , cujo domínio é o intervalo  $[-4, -2]$ , e contradomínio o intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Logo, para  $y = \sin(\theta) - 3$  obtemos que

$$(a) \quad -4 \leq y \leq -2 \implies -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$(b) \quad dy = h'(\theta)d\theta = \cos(\theta)d\theta.$$

Fazendo a substituição no integral definido, resulta que

$$\int_{-4}^{-2} \arcsin(y + 3)dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos(\theta)d\theta.$$

Usando agora primitivação por partes, obtemos a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos(\theta)d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin'(\theta)d\theta \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Portanto*

$$\int_{-4}^{-2} \arcsin(y+3)dy = 0.$$

**CONCLUSÃO:**

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA &= 2 \int_a^b \frac{x^3}{3} dx + \\ &+ (b-a) \int_{-4}^{-2} \arcsin(y+3)dy \\ &= \frac{b^4 - a^4}{6}.\end{aligned}$$

### **Exemplo 6.1.3 (Integrais por Recorrência)**

*Considere agora a integral*

$$\iint_{[-\pi,\pi] \times [0,2\pi]} e^{x-y} \sin(x) \cos(y) dA.$$

*Atendendo ao fato da função*

$$f(x,y) = e^{x-y} \sin(x) \cos(y)$$

ser integrável na região  $\mathcal{R} := [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi]$ :

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq 2\pi\},$$

visto ser contínua em  $\mathcal{R}$ .

A identidade  $e^{x-y} = e^x e^{-y}$ , assim como a **Observação 6.1.3** permitem-nos mostrar que o valor de  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$  é dado por

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = \left( \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx \right) \left( \int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy \right)$$

Note que o cálculo de ambos os integrais não é imediato, dado não conhecermos as anti-derivadas de  $e^x \sin(x)$  e  $e^{-y} \cos(y)$ . A forma mais eficiente de calcular os integrais acima, passa por aplicarmos integração por partes.

(i) No caso do  $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx$ , temos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (e^x)' \sin(x) dx \\&= e^{\pi} \sin(\pi) - e^{-\pi} \sin(-\pi) \\&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin'(x) dx \\&= - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(x) dx\end{aligned}$$

(ii) No caso do  $\int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy$ , temos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy &= \int_0^{2\pi} (-e^{-y})' \cos(y) dy \\&= e^{-0} \cos(0) - e^{-2\pi} \cos(2\pi) - \\&\quad - \int_0^{2\pi} e^{-y} \cos'(y) dy \\&= 1 - e^{-2\pi} + \\&\quad + \int_0^{2\pi} e^{-y} \sin(y) dy.\end{aligned}$$



*Em ambos os casos, a integração por partes não nos permitiu chegar a qualquer conclusão imediata, já que esta nos conduziu a integrais envolvendo funções que também não admitem anti-derivada imediata.*

*No entanto, ao integrarmos por partes detetámos uma certa relação recorrência nas fórmulas obtidas, já que nas fórmulas de integração*

$$(i) \ e^x \sin(x) \text{ 'passou a' } e^x \cos(x).$$

$$(ii) \ e^{-y} \cos(y) \text{ 'passou a' } e^{-y} \sin(y).$$

*Se voltarmos a aplicar integração por partes, obtemos as seguintes relações de recorrência:*

$$(i) \ \textbf{CÁLCULO DE } \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx$$

*Substituindo a fórmula de integração por partes*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(x) dx = e^{-\pi} - e^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx,$$

na igualdade anterior, envolvendo  $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx$ , obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx &= -\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(x) dx \\ &= e^{\pi} - e^{-\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx.\end{aligned}$$

(ii) **CÁLCULO DE**  $\int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy$

Pela mesma ordem de ideias, substituindo a fórmula de integração por partes

$$\int_0^{2\pi} e^{-y} \sin(y) dy = -\int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy$$

em  $\int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy$  obtemos a igualdade

$$\int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy = 1 - e^{-2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy.$$

*Das duas relações, podemos concluir<sup>16</sup> que*

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \sinh(\pi) \\ \int_0^{2\pi} e^{-y} \sin(y) dy &= \frac{1 - e^{-2\pi}}{2} = e^{-\pi} \sinh(\pi).\end{aligned}$$

**EM SUMA:**

$$\begin{aligned}&\iint_{[-\pi, \pi] \times [0, 2\pi]} e^{x-y} \sin(x) \cos(y) dA = \\&= \left( \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) dx \right) \left( \int_0^{2\pi} e^{-y} \cos(y) dy \right) \\&= e^{-\pi} \sinh^2(\pi).\end{aligned}$$

<sup>16</sup> A função  $\sinh$  – parte ímpar da função exponencial – é dada por  $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ . Uma breve súmula envolvendo este tipo de funções pode ser encontrado nas minhas notas de aula manuscritas de **Bases Matemáticas (2016)**. Para tal basta clicar no hiperlink **TutorialFuncoes.pdf**.

**COMO EXERCÍCIO:** Repita o mesmo tipo de raciocínio utilizado no **Exemplo 6.1.3** para calcular as integrais duplas

$$\iint_{[a-\pi, a+\pi] \times [b-\pi, b+\pi]} f(x, y) dA$$

para as seguintes funções  $f$  nas variáveis  $x$  e  $y$ :

(a)  $f(x, y) = e^{ax+by} \cos(x) \sin(y)$ .

(b) <sup>17</sup>  $f(x, y) = e^{ax+by} \cos(x + y)$ .

(c) <sup>18</sup>  $f(x, y) = e^{ax+by} \cos^2(x + y)$

## 6.2 Integrais Duplas sobre Regiões Genéricas

Passemos agora ao estudo de integrais duplas sobre uma qualquer região genérica do plano  $xy$ . Estas re-

<sup>17</sup> **DICA:** Use a fórmula  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

<sup>18</sup> **DICA:** Use a fórmula  $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$  e o item anterior.

giões são essencialmente de dois tipos: Verticalmente simples e horizontalmente simples.

**Definição 6.2.1 (Regiões de Integração)** *Sejam  $h_1$  e  $h_2$  duas funções de uma variável e  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ .*

(I) **REGIÃO VERTICALMENTE SIMPLES:** Dizemos que  $\mathcal{R}$  é uma região verticalmente simples se

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\},$$

com  $h_1$  e  $h_2$  contínuas no intervalo

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

(II) **REGIÃO HORIZONTALMENTE SIMPLES:** Dizemos que  $\mathcal{R}$  é uma região horizontalmente simples se

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \text{ e } c \leq y \leq d\},$$

com  $h_1$  e  $h_2$  contínuas no intervalo

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Para podermos aplicar o **Teorema de Fubini**<sup>19</sup> a funções  $f$  definidas sobre *regiões verticalmente/horizontalmente simples*, temos de assumir que  $\mathcal{R}$  está contida no domínio retangular<sup>20</sup>

$$\mathcal{R}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ \& } c \leq y \leq d\}$$

Em concreto, podemos definir  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$  em termos da função auxiliar

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{se } (x, y) \in \mathcal{R}^* \setminus \mathcal{R} \end{cases}$$

pondo

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA := \iint_{\mathcal{R}^*} f^*(x, y) dA.$$

<sup>19</sup> **Proposição 6.1.2**

<sup>20</sup> A região  $\mathcal{R}^*$  dá-nos o produto cartesiano  $[a, b] \times [c, d]$  entre o intervalos  $[a, b]$  e  $[c, d]$ . Geometricamente,  $[a, b] \times [c, d]$  corresponde a um retângulo de vértices  $(a, c)$ ,  $(b, c)$ ,  $(b, d)$  e  $(a, d)$ .

Deste modo, o problema de estudar a integrabilidade de  $f$  na região  $\mathcal{R}$  é equivalente ao estudo da integrabilidade de  $f^*$  no retângulo  $\mathcal{R}^*$ .

Assumindo que  $f^*$  é integrável em  $\mathcal{R}^*$ , temos os seguintes casos:

- (I) **REGIÕES VERTICALMENTE SIMPLES:** Observe que  $f^*(x, y) = f(x, y)$  para valores  $(x, y) \in \mathcal{R}^*$ , com

$$h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$$

e  $f^*(x, y) = 0$ , para o caso em  $y < h_1(x)$  ou  $y > h_2(x)$ .

Integrando  $f^*(x, y)$  na variável  $y$ , obtemos que

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy.$$

Combinando a última igualdade com a **Propo-**

**sição 6.1.2**, resulta que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}^*} f^*(x, y) dA &= \int_a^b \left( \int_c^d f^*(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.\end{aligned}$$

**(II) REGIÕES HORIZONTALMENTE SIMPLES:**

Neste caso, temos  $f^*(x, y) = f(x, y)$  para valores  $(x, y) \in \mathcal{R}^*$ , com

$$h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

e  $f^*(x, y) = 0$ , para o caso em  $x < h_1(y)$  ou  $y > h_2(y)$ .

Integrando  $f^*(x, y)$  na variável  $x$ , obtemos que

$$\int_a^b f^*(x, y) dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx.$$



Fazendo novamente uso da **Proposição 6.1.2**, conclui-se também que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}^*} f^*(x, y) dA &= \int_c^d \left( \int_a^b f^*(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.\end{aligned}$$

A construção anterior conduz-nos 'naturalmente' à seguinte proposição:

**Proposição 6.2.1 (Integração Regiões  $\mathbb{R}^2$ )** *Seja  $f$  uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ , contínua numa região  $\mathcal{R}$  do plano, e  $dA = dxdy$  o diferencial de área.*

(I) **REGIÃO VERTICALMENTE SIMPLES:** *Se  $\mathcal{R}$  é uma região verticalmente simples da forma*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\},$$

*então vale a seguinte igualdade:*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy dx$$

(II) **REGIÃO HORIZONTALMENTE SIMPLES:** Se  $\mathcal{R}$  é uma região horizontalmente simples da forma

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \text{ e } c \leq y \leq d\},$$

então vale a seguinte igualdade:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

**Observação 6.2.1 (Integral Dupla como Área)**

Para o caso de  $f(x, y) = 1$ , decorre naturalmente da

**Proposição 6.2.1** que a integral dupla

$$\iint_{\mathcal{R}} dA := \iint_{\mathcal{R}} 1 dA$$

nos dá o valor da área da região  $\mathcal{R}$ . Em particular:

(I) **REGIÕES VERTICALMENTE SIMPLES:** A integral

$$\iint_{\mathcal{R}} dA = \int_a^b (h_2(x) - h_1(x)) dx$$

458 | 565

*nos dá a área da região compreendida entre as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , e o gráfico das funções  $h_1$  e  $h_2$ .*

**(II) REGIÕES HORIZONTALMENTE SIMPLES:** *A integral*

$$\iint_{\mathcal{R}} dA = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y)) dy$$

*nos dá a área da região compreendida entre as retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , e o gráfico das funções  $h_1$  e  $h_2$ .*

*Uma vez que em ambos os casos a região  $\mathcal{R}$  está contida na região retangular, da forma*

$$\mathcal{R}^* = [a, b] \times [c, d]$$

*podemos facilmente concluir em ambos os casos que o valor de  $\iint_{\mathcal{R}} dA$  é menor ou igual que a área de um*

retângulo, de lados ' $b - a$ ' e ' $d - c$ ', i.e.

$$\iint_{\mathcal{R}} dA \leq \underbrace{(b - a)(d - c)}_{= \iint_{\mathcal{R}^*} dA}.$$

### Observação 6.2.2 (O Porquê da Continuidade)

Ao contrário do **Teorema de Fubini**<sup>21</sup> em que a integrabilidade de  $f$  era suficiente para poder calcular a integral de  $f$  sobre uma região retangular, no caso de regiões mais genéricas **a integrabilidade de  $f$  pode mesmo não ser suficiente para garantir a aplicabilidade da Proposição 6.2.1.**

De fato, para o caso em que

$$g_1(y) = f(x, y) \text{ \& } g_2(x) = f(x, y)$$

são funções contínuas nos pontos  $y \in [c, d]$  e  $x \in [a, b]$ , respetivamente, tem-se que a existência das integrais

<sup>21</sup> **Proposição 6.1.2.**

*indefinidas da forma*

$$\begin{aligned}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} g_1(y) dy &:= \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \\ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} g_2(x) dx &:= \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx\end{aligned}$$

que surgem no cálculo da integral dupla  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$  estar automaticamente assegurada pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**<sup>22</sup>.

Como teve oportunidade de estudar em *Funções de Uma Variável (FUV)*, a continuidade de uma função era um dos pré-requisitos para a aplicabilidade deste resultado.

### **Exemplo 6.2.1 (Verticalmente Simples)**

*Constituem exemplos de regiões verticalmente simples:*

<sup>22</sup> Pode revisar o Teorema Fundamental do Cálculo nas notas de aula do **PROFESSOR MAURÍCIO RICHARTZ**, clicando no hiperlink ***semana8\_parte2.pdf***.

(i) A região determinada pelo sistema de inequações

$$0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad x^n \leq y \leq \sqrt[n]{x} \quad (n \text{ natural})$$

(ii) A região determinada pelo sistema de inequações

$$0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad e^x \leq y \leq (1+x)^n \quad (n \geq 2)$$

(iii) A região compreendida entre as retas verticais

$x = -r$ ,  $x = r$  e a hipérbole de equação

$$y^2 - x^2 = r^2,$$

com  $r > 0$ .

(iv) A região dada pelo semi-círculo de equação

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

com  $r > 0$ , que se encontra acima do eixo  $Ox$ .

(v) A região compreendida entre as retas verticais

$x = 0$  e  $x = 2\pi$  e os gráficos das funções seno e cosseno.

**Exemplo 6.2.2 (Horizontalmente Simples)**

*Constituem exemplos de regiões horizontalmente simples:*

(i) *A região determinada pelo sistema de inequações*

$$y^n \leq x \leq \sqrt[n]{y} \quad \& \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (n \text{ natural})$$

(ii) *A região determinada pelo sistema de inequações*

$$0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad e^y \leq x \leq (1+y)^n \quad (n \geq 2)$$

(iii) *A região compreendida entre as retas horizontais  $y = -r$ ,  $y = r$  e o gráfico da hipérbole, de equação*

$$x^2 - y^2 = r^2,$$

*com  $r > 0$ .*

(iv) *A região dada pelo semi-círculo de equação*

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

*com  $r > 0$ , que se encontra à esquerda do eixo  $Oy$ .*

No ficheiro **GeoGebra**<sup>23</sup>

### **RegioesIntegracao.ggb**

poderá visualizar vários exemplos de regiões verticalmente/horizontalmente simples.

#### **COMO EXERCÍCIO:**

- (a) Determine o integral<sup>24</sup>  $\iint_{\mathcal{R}} dA$  para cada uma das regiões  $\mathcal{R}$  introduzidas no **Exemplo 6.2.1** & **Exemplo 6.2.2**.

<sup>23</sup> *Recomenda-se fortemente* que nesta fase complemente o seu estudo de regiões de integração com recurso ao GeoGebra. Tome pois a liberdade de baixar o ficheiro **RegioesIntegracao.ggb**. Posteriormente tente por exemplo representar em GeoGebra as regiões do **exercício 4** da seção **6.5 Exercícios**.

<sup>24</sup>  $dA = dx dy$  denota o diferencial de área no plano  $xy$ .



(b) Verifique os seus resultados em **GeoGebra**<sup>25</sup> com recurso aos comandos<sup>26</sup>

- `Integral[ <Função>, <Valor Inicial-x>, <Valor Final-x> ]`
- `IntegralEntre[ <Função>, <Função>, <Valor Inicial-x>, <Valor Final-x> ]`

**Exemplo 6.2.3** Considere a função  $f : [-3, 3] \times [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 2y, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } y > 0 \\ 1 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } y \leq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

<sup>25</sup> **App do GeoGebra:** <https://www.geogebra.org/apps/>.

<sup>26</sup> Se testar o comando

`IntegralEntre[ cos(x), sin(x), 0, 2pi]`

em GeoGebra obterá como output 'zero' (Porquê?).

Observe que

$$\iint_{[-3,3] \times [-3,3]} f(x,y) dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dA,$$

onde  $\mathcal{R}$  corresponde à região

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Por outro lado,

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dA = \iint_{\mathcal{R}_1} (x+2y) dA + \iint_{\mathcal{R}_2} 1 dA$$

onde as regiões  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  são dadas por

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } y > 0\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } y \leq 0\}.$$

Observe que a integral  $\iint_{\mathcal{R}_2} 1 dA$  nos dá a área de uma semi-circulo de raio 3, situada abaixo do eixo  $Ox$  pelo que

$$\iint_{\mathcal{R}_2} 1 dA = \frac{\pi 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

Por outro lado, a região  $\mathcal{R}_1$  pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}\}.$$

Por aplicação da **Proposição 6.2.1**, obtemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}_1} (x + 2y) dA &= \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x + 2y) dy dx \\ &= \int_{-3}^3 (x\sqrt{9-x^2} + 9 - x^2) dx. \end{aligned}$$

Para o cálculo<sup>27</sup>, observe que

$$\frac{d}{dx}(9 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -3x\sqrt{9 - x^2}.$$

<sup>27</sup> O fato de a função  $x\sqrt{9 - x^2}$  ser ímpar já nos permitia assegurar que integrais da forma  $\int_{-a}^a x\sqrt{9 - x^2} dx$  (a constante) dão sempre zero. Esta foi uma das dicas sugeridas por um aluno em sala de aula.

*Desta última igualdade podemos facilmente concluir que a função*

$$h(x) = -\frac{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + 9x - \frac{x^3}{3}$$

*corresponde a uma anti-derivada de  $x\sqrt{9-x^2} + 9-x^2$ , donde se conclui que*

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 (x\sqrt{9-x^2} + 9-x^2) dx \\ &= \left[ -\frac{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + 9x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-3}^{x=3} = -0 + 54 - 18 = 36. \end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dA &= \iint_{\mathcal{R}_1} (x+2y) dA + \iint_{\mathcal{R}_2} 1 dA \\ &= 36 + \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Observação 6.2.3 (Cálculo Área da Região  $\mathcal{R}_2$ )**

*O cálculo da integral de área*

$$\iint_{\mathcal{R}_2} 1 dA$$

no **Exemplo 6.2.3** poderia ser realizado com base na seguinte observação:  $\mathcal{R}_2$  é uma região verticalmente simples, limitada pela retas  $x = -3$  e  $x = 3$ , superiormente pelo eixo  $Ox$ , e inferiormente pela função  $-\sqrt{9-x^2}$ , i.e.

$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3 \text{ e } -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq 0\}.$$

*Desta última observação, resulta que*

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}_2} 1 dA &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 dy dx \\ &= \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx.\end{aligned}$$

Por seu turno, a integral  $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$  poderia ser calculada usando a substituição trigonométrica<sup>28</sup>

$$x = 3 \sin(t), \text{ com } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Desta última substituição, resulta que

$$\sqrt{9-x^2} = 3 \cos(t) \text{ \& } dx = 3 \cos(t) dt,$$

donde

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos^2(t) dt.$$

Para terminar o cálculo da integral anterior, teríamos posteriormente de usar a propriedade, envolvendo funções cosseno:

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}.$$

<sup>28</sup> Poderia ter também considerado a substituição trigonométrica  $x = 3 \cos(t)$ . Neste caso, teria de escolher  $t \in [0, \pi]$ , de modo a assegurar que  $3 \sin(t) \geq 0$ .

**Exemplo 6.2.4 (Região Horizontalmente Simples)**

Considere a função  $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$  definida sobre a região

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2 \text{ e } \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi \right\}.$$

Para este caso, podemos facilmente concluir do fato de  $f$  ser contínua em  $\mathcal{R}$  e de  $\mathcal{R}$  ser uma região horizontalmente simples que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dA &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[ -y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right]_{x=0}^{x=y^2} dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (y - y \cos(y)) dy. \end{aligned}$$

*Usando integração por partes obtemos que*

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -y \cos(y) dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -y \sin'(y) dy \\&= [-y \sin(y)]_{y=\frac{\pi}{2}}^{y=\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(y) dy \\&= \frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos'(y) dy \\&= \frac{\pi}{2} + 1.\end{aligned}$$

*Por outro lado, usando o fato de  $\frac{y^3}{3}$  ser uma anti-derivada de  $y^2$ , facilmente concluímos que*

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y^2 dy = \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{12} = \frac{\pi^3}{4}.$$

*Das duas últimas igualdades, concluímos que*

$$\iint_{\mathcal{R}} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dA = \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi}{2} + 1.$$



**COMO EXERCÍCIO:** Calcule<sup>29</sup> a integral dupla

$$\iint_{\mathcal{R}} \cos\left(\frac{\pi y}{x}\right) dA,$$

onde  $\mathcal{R}$  denota a região limitada pelas retas verticais  $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$  e  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , o gráfico da função  $x^3$  e o eixo  $Ox$ .

**Exemplo 6.2.5** Considere agora a integral da forma

$$\iint_{[0,2] \times [-1,1]} |x - y^2| dA.$$

Usando a definição da função módulo:

$$|x - y^2| = \begin{cases} x - y^2 & \text{se } x \geq y^2 \\ y^2 - x & \text{se } x < y^2 \end{cases}$$

obtemos a seguinte igualdade:

$$\int_0^2 |x - y^2| dx = \int_0^{y^2} (y^2 - x) dx + \int_{y^2}^2 (x - y^2) dx$$

<sup>29</sup> Função do **Exemplo 3.2.3**.

*Desta última resulta que*

$$\begin{aligned}\iint_{[0,2] \times [-1,1]} |x - y^2| dA &= \int_{-1}^1 \int_0^2 |x - y^2| dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{y^2} (y^2 - x) dx dy + \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_{y^2}^2 (x - y^2) dx dy.\end{aligned}$$

*Observe que as integrais definidas na variável  $x$ , envolvendo as funções*

$$y^2 - x = \frac{d}{dx} \left( xy^2 - \frac{x^2}{2} \right) \quad \& \quad x - y^2 = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{2} - xy^2 \right)$$

*são dadas por*

$$\int_0^{y^2} (y^2 - x) dx = \left[ xy^2 - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y^2} = \frac{3}{4} y^4$$

$$\int_{y^2}^2 (x - y^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - xy^2 \right]_{x=y^2}^{x=2} = \frac{y^4}{2} - 2y^2 + 2.$$

**COMO EXERCÍCIO:**

(a) Conclua o cálculo de

$$\int_{-1}^1 \int_0^{y^2} (y^2 - x) dx dy \text{ \& } \int_{-1}^1 \int_{y^2}^2 (x - y^2) dx dy.$$

com base nas igualdades obtidas anteriormente.

(b) Use o mesmo tipo de raciocínio para calcular a integral duplas da forma

$$\iint_{[-3,3] \times [-4,0]} |x^2 - y^2| dA.$$

### 6.3 Mudança da Ordem de Integração em Integrais Duplas

Pode também acontecer<sup>30</sup> que a região  $\mathcal{R}$  sobre a qual se esteja a calcular a integral dupla seja simultanea-

<sup>30</sup> O cálculo da integral dupla  $\iint_{[-3,3] \times [-4,0]} |x^2 - y^2| dA$  proposto no final do **Exemplo 6.2.5** pode ser feito recorrendo a uma região horizontalmente ou verticalmente simples.

mente uma região verticalmente e horizontalmente simples. Neste caso, o caminho a seguir passa sempre pela escolha da via que torna o cálculo da integral dupla mais simples.

Abaixo<sup>31</sup> seguem alguns exemplos que englobam regiões que são simultaneamente *horizontalmente e verticalmente simples*:

**Exemplo 6.3.1 (União de Regiões)** *Para cálculo<sup>32</sup> de integrais da forma*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$$

<sup>31</sup> A título de exemplo, quando se pede nos exercícios 5, 7 & 8 da seção **6.5 Exercícios** que se 'inverta a ordem de integração', subentende-se que tem de reescrever primeiro uma região verticalmente simples como uma região horizontalmente simples ou vice-versa.

<sup>32</sup> Neste tipo de exemplo estamos interessados em estudar a aplicabilidade da propriedade de **ADITIVIDADE**, da **Proposição 6.1.1**, para regiões mais genéricas do plano  $xy$ .

suponha que  $\mathcal{R}$  corresponde à união de duas regiões  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ , onde:

(i)  $\mathcal{R}_1$  é a região horizontalmente simples dada por

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -7 \leq y \leq 7 \text{ e } -|y| \leq x \leq 0\}$$

(ii)  $\mathcal{R}_2$  é a região verticalmente simples dada por

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 7 \text{ e } \frac{x^2}{7} \leq y \leq 7 \right\}$$

Esta região pode ser visualizada a partir da figura `png`<sup>33</sup>

### ***UniaoRegioes.png***

*Uma decomposição alternativa da região*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$$

*passaria por decompor em duas regiões verticalmente simples situadas acima e abaixo do eixo  $Ox$ :*

<sup>33</sup> **Ficheiro GeoGebra: *UniaoRegioes.ggb***

- (i) **ACIMA DO EIXO  $Ox$ :** Região verticalmente simples, delimitada pelas retas de equação  $x = -7$  e  $x = 7$ , e pelos gráficos das funções  $-x$  e  $\frac{x^2}{7}$ .
- (ii) **ABAIXO DO EIXO  $Ox$ :** Região verticalmente simples, delimitada pela reta  $x = -7$ , pelo eixo  $Oy$  e pelos gráficos das funções  $-7$  e  $x$ .

### COMO EXERCÍCIO:

- (a) Baixe o ficheiro GeoGebra **UniaoRegioes.ggb**. Introduza neste ficheiro a solução descrita anteriormente.
- (b) Calcule a integral  $\iint_{\mathcal{R}} x dA$  para as duas decomposições da região  $\mathcal{R}$  descritas acima.
- (c) Diga, justificando, se é possível decompor a região  $\mathcal{R}$  em duas regiões verticalmente simples. Em caso afirmativo, inclua<sup>34</sup> a sua solução no ficheiro

<sup>34</sup> Pode depois enviar a sua solução, por e-mail, ao professor para que este a inclua na página da disciplina.

***UniaoRegioes.ggb.*****Exemplo 6.3.2 (Exercício 5, seção 6.5 Exercícios.)**

*Suponha que para uma dada função contínua  $f$ , que-remos calcular um integral da forma*

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_1^y f(x, y) dx.$$

*Observe que as integrais acima representam a união de duas regiões horizontalmente simples representadas na figura png<sup>35</sup>*

***InversaoOrdemIntegracao.png***

*(i) Observe que para o caso da integral*

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

<sup>35</sup> **Ficheiro GeoGebra: *InversaoOrdemIntegracao.ggb***

*podemos considerar a região verticalmente simples compreendida entre o eixo  $Oy$ , a reta<sup>36</sup>  $x = 1$ , e o gráfico<sup>37</sup> das funções  $x^2$  e  $\sqrt{x}$ . Para este caso, temos que*

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

*(ii) De modo análogo, determinando todas as interseções entre as retas  $y = 2$ ,  $y = 3$ ,  $x = 1$  e  $x = y$ , concluímos que a região horizontalmente simples pode ser decomposta em duas regiões vertical-*

<sup>36</sup> O ponto  $(1, 1)$  corresponde à interseção da reta vertical  $x = 1$  com  $x = y^2$  e  $x = \sqrt{y}$ .

<sup>37</sup> As funções  $x^2$  e  $\sqrt{x}$  foram determinadas resolvendo as equações  $x = \sqrt{y}$  e  $x = y^2$  em ordem a  $y$ .



*mente simples. Em concreto*<sup>38</sup>

$$\begin{aligned}\int_2^3 dy \int_1^y f(x, y) dx &= \int_1^2 dx \int_2^3 f(x, y) dy + \\ &+ \int_2^3 dx \int_x^3 f(x, y) dy.\end{aligned}$$

Para funções que nos conduzem a funções de uma variável

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \text{ \& } \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy$$

de anti-derivada simples de calcular, a inversão da ordem de integração não passa de uma questão de redundância no cálculo da integral dupla.

Para os casos em que as anti-derivadas

<sup>38</sup> Observe que esta região de integração nos dá um trapézio. Como exercício, verifique que  $\int_2^3 dy \int_1^y 1 dx$  é igual à área do trapézio de base menor 1, base maior 2 e altura 1.

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \text{ ou } \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy$$

não são imediatas, a inversão de ordem de integração na integral dupla poderá ser uma ferramenta de extrema utilidade.

Para exemplificarmos este caso, considere a região horizontalmente simples do **Exemplo 6.2.4**:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2 \text{ e } \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi \right\}.$$

pode ser decomposta em duas<sup>39</sup> regiões verticalmente simples:

<sup>39</sup> Note que a parábola de equação  $x = y^2$  intersesta as retas horizontais  $y = \frac{\pi}{2}$  e  $y = \pi$ . Estas duas interseções dão-nos geometricamente a solução para o nosso problema de decomposição da região  $\mathcal{R}$ .

- (i) A primeira<sup>40</sup>, compreendida entre as retas<sup>41</sup> de equação  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi^2}{4}$ ,  $y = 0$  e  $y = \pi$ .
- (ii) A segunda, compreendida entre as retas verticais  $x = \frac{\pi^2}{4}$ ,  $x = \pi^2$ , a reta horizontal  $y = \pi$  e o gráfico da função  $\sqrt{x}$ .

Esta solução pode ser visualizada a partir da figura png<sup>42</sup>

### HorizontalVertical.png

**COMO EXERCÍCIO:** Tente identificar qual a principal dificuldade em calcular a integral  $\iint_{\mathcal{R}} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dA$

<sup>40</sup> De fato, esta região corresponde a uma região retangular. Regiões retangulares são exemplos triviais de regiões horizontalmente e verticalmente simples.

<sup>41</sup> O ponto  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4}\right)$  corresponde à interseção da reta horizontal  $y = \frac{\pi}{2}$  com a parábola, de equação  $x = y^2$ .

<sup>42</sup> **Ficheiro GeoGebra: HorizontalVertical.ggb**

em termos da igualdade<sup>43</sup>

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy dx + \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \int_{\sqrt{x}}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy dx.$$

Pode também acontecer casos em que o problema do cálculo da integral permanece, mesmo mudando a ordem de integração. A título de exemplo, considere para as integrais duplas do **Exemplo 6.3.2** a função

$$f(x, y) = e^{-x}.$$

Para esta escolha, obtemos que que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} e^{-x} dx + \int_2^3 dy \int_1^y e^{-x} dx = \\ &= \int_0^1 (e^{-y^2} - e^{-\sqrt{y}}) dy + \int_2^3 (1 - e^{-y}) dy. \end{aligned}$$

<sup>43</sup> A igualdade abaixo resulta da decomposição da região  $\mathcal{R}$  nas duas regiões verticalmente simples mencionadas acima.

Note que nos cálculos acima a integral  $\int_2^3 (1 - e^y) dy$  é simples de calcular. No entanto o cálculo da integral

$$\int_0^1 (e^{-y^2} - e^{-\sqrt{y}}) dy = \int_0^1 e^{-y^2} dy - \int_0^1 e^{-\sqrt{y}} dy$$

já apresenta algumas dificuldades, pelo seguintes motivos:

- (i) Não conhecermos uma anti-derivada para a função  $e^{-y^2}$ , embora saibamos que ela é integrável no intervalo  $[0, 1]$ .
- (ii) Para calcular a integral  $\int_0^1 e^{-\sqrt{y}} dy$  terá de utilizar integração por substituição e integração por partes, na pior das hipóteses.

No caso em que procuramos calcular os integrais anteriores, via mudança da ordem de integração, ob-

temos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} e^{-x} dx &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} e^{-x} dy \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x}e^{-x} - x^2e^{-x})dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^3 dy \int_1^y e^{-x} dx &= \int_1^2 dx \int_2^3 e^{-x} dy + \\ &+ \int_2^3 dx \int_x^3 e^{-x} dy \\ &= \int_1^2 e^{-x} dx + \int_2^3 (3-x)e^{-x} dx.\end{aligned}$$

Em ambos os casos acima, a mudança da ordem de integração permitiu-nos encontrar algumas integrais definidas que podem também ser calculadas usando *integração por substituição* e *integração por partes*, na pior das hipóteses.

No entanto, o problema do cálculo da integral permanece quando tentamos agora calcular  $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ . De fato, fazendo a substituição  $u = x^2$  obtemos que

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^1 2u^2e^{-u^2}du = \int_0^1 u \frac{d}{du}(-e^{-u^2})du.$$

Tentando agora usar integração por partes para calcular  $\int_0^1 u \frac{d}{du}(-e^{-u^2})du$ , obtemos que

$$\int_0^1 u \frac{d}{du}(-e^{-u^2})du = -e^{-1} - \int_0^1 e^{-u^2}du,$$

ou seja voltámos ao caso anterior em que não nos foi possível calcular o valor de  $\int_0^1 e^{-u^2}du$  por desconhecermos qual a anti-derivada de  $e^{-u^2}$ .

Como iremos ter oportunidade de ver no **Capítulo 7 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas**, a utilização de *coordenadas polares* fornece-nos uma ferramenta eficiente para o cálculo deste tipo de integrais.

Para terminarmos esta seção vamos ilustrar mais um problema prático, envolvendo o exemplo do cálculo de integrais duplas sobre uma região pentagonal.

**Exemplo 6.3.3 (Região Pentagonal)** *Considere  $\mathcal{R}$  como sendo a região determinada pelo pentágono de vértices<sup>44</sup>*

$$(-5, -5), (5, -5), (10, 5), (0, 10) \text{ e } (-10, 5).$$

*representada na figura png<sup>45</sup>*

***RegiaoPentagonal.png***

*Esta região é delimitada pelas seguintes retas:*

<sup>44</sup> Como pode facilmente verificar, esta região está contida no interior de uma região retangular, de vértices

$$(-10, -5), (10, -5), (10, 10) \text{ e } (10, -10).$$

<sup>45</sup> ***Ficheiro GeoGebra: RegiaoPentagonal.ggb***



- (i) **RETA HORIZONTAL DE EQUAÇÃO**  $y = 5$ : Reta que une os vértices  $(-5, -5)$  e  $(5, -5)$ .
- (ii) **RETA AFIM DE EQUAÇÃO**  $-2x - y = 15$ : Reta que une os vértices  $(-5, -5)$  e  $(-10, 5)$ .
- (iii) **RETA AFIM DE EQUAÇÃO**  $-2x + y = -15$ : Reta que une os vértices  $(5, -5)$  e  $(10, 5)$ .
- (iv) **RETA AFIM DE EQUAÇÃO**  $x - 2y = -20$ : Reta que une os vértices  $(-10, 5)$  e  $(0, 10)$ .
- (v) **RETA AFIM DE EQUAÇÃO**  $x + 2y = 20$ : Reta que une os vértices  $(10, 5)$  e  $(0, 10)$ .

Como pode verificar geometricamente<sup>46</sup>, a divisão decomposição da região pentagonal em duas regiões

<sup>46</sup> No ficheiro Geogebra **RegiaoPentagonal.ggb** pode também encontrar o conjunto de inequações que permite descrever a região pentagonal como a união de duas regiões, à esquerda e à direita do eixo  $Oy$ , respetivamente.

*horizontalmente simples é a forma mais simples<sup>47</sup> de representar a região de integração.*

*Em concreto, podemos dividir a região pentagonal em duas regiões  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  situadas acima e abaixo do segmento de reta que une os vértices  $(-10, 5)$  e  $(10, 5)$ , onde*

*(I)  $\mathcal{R}_1$  é a região delimitada pelas retas horizontais  $y = -5$  e  $y = 5$  e pelas retas afim  $-2x - y = 15$  e  $-2x + y = -15$ .*

*(II)  $\mathcal{R}_2$  é a região delimitada pelas retas horizontais  $y = 5$  e  $y = 10$  e pelas retas afim  $x - 2y = -20$  e  $x - 2y = 20$ .*

<sup>47</sup> Como poderá verificar geometricamente, a decomposição da região pentagonal em regiões verticalmente simples é um problema não trivial. Uma possível solução passa por dividir o pentágono em cinco triângulos, tal como ilustrado em <http://pt.wikihow.com/Descobrir-a-%C3%81rea-de-um-Pent%C3%A1gono>.

No caso de  $f$  ser uma função contínua em  $\mathcal{R}_1$ , obtemos pela **Proposição 6.2.1** que

$$\iint_{\mathcal{R}_1} f(x, y) dA = \int_{-5}^5 \int_{-\frac{y}{2} - \frac{15}{2}}^{\frac{y}{2} + \frac{15}{2}} f(x, y) dx dy.$$

De modo análogo, a **Proposição 6.2.1** permite-nos também concluir que

$$\iint_{\mathcal{R}_2} f(x, y) dA = \int_5^{10} \int_{-20+2y}^{20+2y} f(x, y) dx dy$$

para o caso de  $f$  também ser contínua em  $\mathcal{R}_2$ .

Portanto, para qualquer função contínua  $f$  na região  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ , obtemos a seguinte sequência de

*igualdades:*

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA &= \iint_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} f(x, y) dA \\&= \iint_{\mathcal{R}_1} f(x, y) dA + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x, y) dA \\&= \int_{-5}^5 \int_{-\frac{y}{2} - \frac{15}{2}}^{\frac{y}{2} + \frac{15}{2}} f(x, y) dx dy + \\&\quad + \int_5^{10} \int_{-20+2y}^{20+2y} f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

**COMO EXERCÍCIO:**

(a) Calcule a área da região pentagonal. Verifique o seu resultado usando a fórmula que aprendeu no ensino médio e/ou em **Geometria Analítica (GA)**.

(b) Calcule o valor do integral  $\iint_{\mathcal{R}} 2xy dA$ .

(c) *Mostre que se  $f(x, y) = h_1(x)h_2(y)$  e  $h_1$  é uma função ímpar, então*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = \int_5^{10} \int_{-20+2y}^{20+2y} f(x, y) dx dy.$$

(d) *Verifique o resultado demonstrado no anterior para calcular as integrais duplas*

$$\iint_{\mathcal{R}} \sin(x)y dA \quad \& \quad \iint_{\mathcal{R}} \sinh(x)y dA.$$

## 6.4 Introdução às Integrais Triplas

No início da seção **6.1 Integrais Duplas sobre Retângulos** começámos por introduzir a noção de integral dupla com base na noção de volume de um sólido  $\mathcal{S}$  limitado superiormente por uma função  $z = f(x, y)$ . Nesta seção iremos introduzir de forma bastante informal a noção de **integral tripla**, tendo como principal motivação o cálculo do volume de uma região genérica no espaço.

Começemos de introduzir várias **regiões-tipo** que nos permitem generalizar a noção de volume para o caso de integrais duplas sobre regiões genéricas  $\mathcal{R}$  situadas num dos planos do referencial  $Oxyz - xy$  ( $z = 0$ ),  $yz$  ( $x = 0$ ) ou  $xz$  ( $y = 0$ ) respetivamente.

**Definição 6.4.1 (Volume Regiões  $\mathbb{R}^3$ )** <sup>48</sup> *Seja  $dV = dx dy dz$  o diferencial de volume e*

$$\iiint_S dV$$

*o volume de uma região limitada  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ .*

(i) **REGIÕES DO TIPO I:** *Se existir uma região do plano  $xy$  e duas funções contínuas  $f$  e  $g$  tal que*

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

<sup>48</sup> *Note que em vários livros de texto, estas fórmulas para cálculo de volume em regiões genéricas do plano surgem como consequência imediata da construção da integral tripla via somas de Riemann.*

então

$$\iiint_S 1 dV = \iint_{\mathcal{R}} (g(x, y) - f(x, y)) dx dy.$$

(ii) **REGIÕES DO TIPO II:** Se existir uma região do plano  $yz$  e duas funções contínuas  $f$  e  $g$  tal que

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : (y, z) \in \mathcal{R} \text{ e } f(y, z) \leq x \leq g(y, z)\}$$

então

$$\iiint_S 1 dV = \iint_{\mathcal{R}} (g(y, z) - f(y, z)) dy dz.$$

(iii) **REGIÕES DO TIPO III:** Se existir uma região do plano  $xz$  e duas funções contínuas  $f$  e  $g$  tal que

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : (x, z) \in \mathcal{R} \text{ e } f(x, z) \leq y \leq g(x, z)\}$$

então

$$\iiint_S 1 dV = \iint_{\mathcal{R}} (g(x, z) - f(x, z)) dx dz.$$

Observe que:

(i) Se  $\mathcal{S}$  for uma **Região do Tipo I**,

$$\iiint_{\mathcal{S}} 1 dV = \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} 1 dz \right) dx dz.$$

(ii) Se  $\mathcal{S}$  for uma **Região do Tipo II**,

$$\iiint_{\mathcal{S}} 1 dV = \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_{f(y,z)}^{g(y,z)} 1 dx \right) dy dz.$$

(iii) Se  $\mathcal{S}$  for uma **Região do Tipo III**,

$$\iiint_{\mathcal{S}} 1 dV = \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_{f(x,z)}^{g(x,z)} 1 dy \right) dx dz.$$

Este tipo de raciocínio leva-nos a concluir que os cálculos dos volumes anteriores podem ser determinados em termos de integrais iteradas envolvendo um integral simples e uma integral dupla sobre uma



região<sup>49</sup> genérica  $\mathcal{R}$ . Para o caso em que  $F$  é uma função contínua nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , podemos<sup>50</sup> obter a seguinte generalização da **Proposição 6.2.1**.

**Proposição 6.4.1 (Generalização Proposição 6.2.1)**

*Seja  $F$  uma função nas variáveis  $x, y$  e  $z$ , contínua numa região limitada  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ , e  $dV = dxdydz$  o diferencial de volume.*

(i) **REGIÕES DO TIPO I:** *Se  $\mathcal{S}$  for uma região limitada da forma*

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

<sup>49</sup> Estamos assumindo que  $\mathcal{R}$  é uma região horizontalmente/verticalmente simples, ou eventualmente retangular.

<sup>50</sup> Por uma questão de falta de tempo, os detalhes deste tipo de construção serão omitidos. Recomenda-se a título de curiosidade que procure este tipo de formulação no seu livro de texto favorito.

então

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) dV = \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_{f(x, y)}^{g(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dx dy. \end{aligned}$$

(ii) **REGIÕES DO TIPO II:** Se  $\mathcal{S}$  for uma região limitada da forma

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : (y, z) \in \mathcal{R} \text{ e } f(y, z) \leq x \leq g(y, z)\}$$

então

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) dV = \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_{f(y, z)}^{g(y, z)} F(x, y, z) dx \right) dy dz. \end{aligned}$$

(iii) **REGIÕES DO TIPO III:** Se  $\mathcal{S}$  for uma região limitada da forma

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : (x, z) \in \mathcal{R} \text{ e } f(x, z) \leq y \leq g(x, z)\}$$

então

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) dV = \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_{f(x, z)}^{g(x, z)} F(x, y, z) dy \right) dx dz. \end{aligned}$$

**COMO EXERCÍCIO:** Procure resolver o **exercício 10** da seção **6.5 Exercícios** com base na **Proposição 6.4.1** e no que aprendeu ao longo da seção **6.2 Integrares Duplas sobre Regiões Genéricas**.

Vamos finalizar este capítulo com uma sequela de exemplos envolvendo o cálculo de integrais triplas. Começemos por abordar o caso de sólidos limitados por planos<sup>51</sup> dados por equações da forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

<sup>51</sup> Reveja a **Observação 2.1.1 da seção 2.1 Função e Gráfico**.

**Exemplo 6.4.1 (Ex. 9 (a), seção 6.5 Exercícios)**

Considere o sólido limitado pelos planos coordenados e pelo plano  $3x + 2y + z = 6$ .

Observe que este tipo de sólido pode ser tratado como **qualquer região de tipo I, II ou III**, tal como ilustrado no gif animado<sup>52</sup>

***VolumePlanosCoordenados.gif***

Em concreto, obtemos o seguinte:

- (I) **REGIÃO DO TIPO I:** Escolheríamos  $\mathcal{R}$  como a região limitada pelos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , e pela reta de equação  $2y + z = 6$ , e

$$0 \leq x \leq 2 - 3x - 2y.$$

<sup>52</sup> **Ficheiro GeoGebra:** *VolumePlanosCoordenados.ggb*

*Daqui resulta que*

$$\begin{aligned}\iiint_S dV &= \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_0^{6-3x-2y} 1 dz \right) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6-3x-2y) dy dx.\end{aligned}$$

(II) **REGIÃO DO TIPO II:** Escolheríamos  $\mathcal{R}$  como a região limitada pelos eixos  $Oy$  e  $Oz$ , e pela reta de equação  $2y + z = 6$ , e

$$0 \leq x \leq 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z.$$

*Daqui resulta que*

$$\begin{aligned}\iiint_S dV &= \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z} 1 dx \right) dz dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left( 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \right) dz dy.\end{aligned}$$

(III) **REGIÃO DO TIPO III** Escolheríamos  $\mathcal{R}$  como a região limitada pelos eixos  $Ox$  e  $Oz$ , e pela reta de equação  $3x + z = 6$ , e

$$0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned}\iiint_S dV &= \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_0^{3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z} 1 dy \right) dx dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{6-3x} \left( 3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z \right) dz dx.\end{aligned}$$

**COMO EXERCÍCIO:**

- (a) Verifique que em todos os casos descritos acima obtemos o mesmo valor para  $\iiint_S dV$ .
- (b) Repita o mesmo tipo de raciocínio para calcular o volume do sólido, limitado pelos planos coordenados e pelo plano  $2x - y + 3z = 6$ .

**Exemplo 6.4.2** Considere agora o sólido  $S$  limitado pelos planos

$$x = 0, x = 1, y = 0, z = 0 \text{ \& } x - y + 2z = 0$$

e pelo cilindro<sup>53</sup> de equação  $z = x^2$ .

As interseções descritas acima podem ser visualizadas a partir do gif animado<sup>54</sup>

### **VolumeCilindroParabolico.gif**

Claramente estamos perante uma **região do Tipo I** dado que a variável  $z$  pode ser descrita em termos de funções que dependem das variáveis  $x$  e  $y$ . A região  $\mathcal{R}$  a determinar uma representação analítica do sólido  $S$  encontra-se portanto no plano  $xy$ .

<sup>53</sup> A equação  $z = x^2$  dá-nos em  $\mathbb{R}^3$  uma superfície cilíndrica do tipo parabólico.

<sup>54</sup> **Ficheiro GeoGebra: VolumeCilindroParabolico.ggb**

*Como esta região<sup>55</sup> é limitada pelas retas de equação  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  e pela reta  $x - y = 0$  tem-se que*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x\}.$$

*Uma vez que  $\mathcal{R}$  nos dá um triângulo retângulo contido na região  $[0, 1] \times [0, 1]$ , podemos facilmente concluir concluir que para valores de  $(x, y) \in \mathbb{R}$  o gráfico da superfície cilíndrica  $z = x^2$  se encontra abaixo do gráfico do plano  $x - y + 2z = 0$ , donde se conclui que*

$$x^2 \leq z \leq \frac{y - x}{2}, \text{ para todos os } (x, y) \in \mathbb{R}.$$

<sup>55</sup> *Pelas condições do enunciado, a região  $\mathcal{R}$  é 'naturalmente' uma região verticalmente simples, dado ser delimitada pelos planos  $x = 0$  &  $x = 1$ .*



Logo

$$\begin{aligned}\iiint_S dV &= \int_0^1 \int_0^x \int_{x^2}^{\frac{y-x}{2}} 1 dz dy dx \\&= \int_0^1 \int_0^x \left( \frac{y-x}{2} - x^2 \right) dy dx \\&= \int_0^1 \left( x^3 - \frac{x^2}{4} \right) dx \\&= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

**COMO EXERCÍCIO:** Calcule o valor das seguintes integrais triplas:

(a)  $\iiint_S x dV.$

(b)  $\iiint_S y dV.$

(c)  $\iiint_S z dV.$

### Exemplo 6.4.3 (Interseção de Parabolóides)

Considere  $\mathcal{S}$  como sendo o sólido limitado pelos parabolóides de equação  $y = 2 - x^2 - z^2$  e  $y = x^2 + z^2$ .

*A interseção dos dois parabolóides pode ser visualizada a partir do gif animado<sup>56</sup>*

### ***VolumeParaboloides.gif***

*Claramente estamos perante uma **Região do tipo III** pois a variável  $y$  aparece representada em função das variáveis  $x$  e  $z$ . Por outro lado temos que*

$$2 - x^2 - z^2 \leq y \leq 2 - x^2 - z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 \geq 0.$$

*Desta duas desigualdades, facilmente se conclui que*

$$x^2 + y^2 \leq y \leq 2 - x^2 - z^2.$$

*Adicionalmente tem-se que a interseção de  $y = 2 - x^2 - z^2$  com  $y = x^2 + z^2$  se dá numa circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1 situada no plano  $xz$ , donde*

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, z) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

<sup>56</sup> **Ficheiro GeoGebra: VolumeParaboloides.ggb**

*Desta última descrição podemos facilmente concluir que*

$$\iiint_S 1 dV = 2 \iint_{\mathcal{R}} (1 - x^2 - z^2) dx dz.$$

### **Exemplo 6.4.4 (Sólido de Steinmetz)** <sup>57</sup>

*O problema do cálculo do volume um sólido de Steinmetz corresponde, na sua versão mais abreviada, à interseção de dois cilindros de raio  $r > 0$ , e cujos eixos induzem retas concorrentes num único ponto  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$ .*

*A título de exemplo considere os cilindros de equação*

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \& \quad x^2 + z^2 = r^2.$$

*A interseção dos dois cilindros pode ser visualizada a partir do gif animado*<sup>58</sup>

<sup>57</sup> Este exemplo vai ao encontro do que se pede no item (d) do **exercício 9**. Mais curiosidades sobre o sólido de Steinmetz podem ser encontradas em <http://mathworld.wolfram.com/SteinmetzSolid.html>.

<sup>58</sup> **Ficheiro GeoGebra: SolidoSteinmetz.ggb**

## **SolidoSteinmetz.gif**

No primeiro caso, temos que o cilindro [infinito] nos dá uma **Região do Tipo I**. No segundo caso o cilindro [infinito] dá-nos uma **Região do Tipo III**.

Note ainda que a projeção da inequação  $x^2 + z^2 \leq r^2$  no plano  $xz$  pode ser descrito pelo sistema de inequações

$$-r \leq x \leq r \quad \text{e} \quad -\sqrt{r^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

enquanto que a projeção da inequação  $x^2 + y^2 \leq r^2$  no plano  $xy$  pode ser descrito pelo sistema de equações<sup>59</sup>

$$-r \leq x \leq r \quad \text{e} \quad -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Destas últimas relações conclui-se que a integral

<sup>59</sup> Este sistema de equações conduz à representação no plano  $xy$  da região delimitada pela circunferência como região horizontalmente simples.

iterada<sup>60</sup>

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 \, dz \, dy \, dx = \\ &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2-x^2} \, dy \, dx = \int_{-r}^r 4(r^2-x^2) \, dx. \end{aligned}$$

### COMO EXERCÍCIO:

- (a) Verifique que o volume do **sólido de Steinmetz** é igual a  $\frac{16}{3}r^3$ .
- (b) Determine a integral tripla que determina o volume dado pela interseção dos cilindros de equação

$$(y-1)^2 + (z+2)^2 = 9 \text{ \& } x^2 + (z+2)^2 = 9.$$

<sup>60</sup> No link

<http://www.math.tamu.edu/~tom.kiffe/calc3/newcylinder/zcylinder.html>

pode encontrar uma fórmula alternativa para o cálculo do volume.

No **Capítulo 7 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas** iremos aprender como calcular os integrais descritos no **Exemplo 6.4.3 & Exemplo 6.4.4** em termos de coordenadas cilíndricas.

Para finalizar, consideremos o cálculo o volume de sólido, cuja base corresponde ao análogo de um quadrilátero em Geometria não-Euclidiana – os *quadriláteros de Saccheri*<sup>61</sup>

### **Exemplo 6.4.5 (Volume Cilindro Hiperbólico)**

*Considere o sólido  $S$  determinado pelos planos*

$$z = 2, z = 5, x = -3, x = 3 \text{ \& } y = 0$$

<sup>61</sup> *Quadrilátero de Saccheri* corresponde ao análogo de um quadrilátero em Geometria Não-Euclidiana. Mais detalhes podem ser encontrados por exemplo no site **planetmath.org** – <http://www.planetmath.org/saccheriquadrilateral>.

e pelo cilindro<sup>62</sup> de equação

$$y^2 - x^2 = 9.$$

Como pode facilmente visualizar a partir do gif animado<sup>63</sup>

**VolumeCilindroHiperbolico.gif**

trata-se duma **Região do Tipo I**, descrita em termos do sistema de inequações

$$\mathcal{S}: \quad -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{9 + x^2} \text{ \& } 2 \leq z \leq 5$$

cuja projeção no plano  $xy$  nos dá uma região<sup>64</sup>  $\mathcal{R}$  **ver-ticalmente simples**.

<sup>62</sup> A equação  $y^2 - x^2 = 9$  define em  $\mathbb{R}^3$  uma superfície cilíndrica do tipo hiperbólico. Para mais detalhes sobre superfícies cilíndricas, reveja a seção **Gráficos de Superfícies Cilíndricas**.

<sup>63</sup> **Ficheiro GeoGebra: VolumeCilindroHiperbolico.ggb**

<sup>64</sup>  $\mathcal{R}$  é a região de  $\mathbb{R}^2$  determinada pelo sistema de inequações  $-3 \leq x \leq 3 \text{ \& } 0 \leq y \leq \sqrt{9 + x^2}$ .

*Daqui resulta que o volume do sólido é dado pela integral tripla*

$$\iiint_S dV = \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_2^5 1 dz \right) dA = \iint_{\mathcal{R}} 3 dA,$$

*onde  $dA$  é o diferencial de área na região  $\mathcal{R}$ .*

*Usando agora o fato de a região  $\mathcal{R}$  ser verticalmente simples, concluímos pela **Proposição 6.2.1** que*

$$\iint_{\mathcal{R}} 3 dA = \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9+x^2}} 3 dy dx = \int_{-3}^3 3\sqrt{9+x^2} dx.$$

*Para calcularmos a integral anterior, comece por observar que a função de uma variável  $h(x) = \sqrt{9+x^2}$  é par<sup>65</sup> Sendo  $[-3, 3] \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo simétrico, con-*

<sup>65</sup>  $h(x) = \sqrt{9+x^2}$  é uma função par uma vez que a igualdade  $h(-x) = h(x)$  é sempre satisfeita para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .



cluimos<sup>66</sup> que

$$\int_{-3}^3 3\sqrt{9+x^2}dx = \int_0^3 6\sqrt{9+x^2}dx.$$

Considere a substituição hiperbólica<sup>67</sup>

$$x = 3 \sinh(t), \quad \text{com}^{68} \quad 0 \leq t \leq \operatorname{arcsinh}(1).$$

Da regra de derivação  $\sinh'(t) = \cosh(t)$  e das relações<sup>69</sup>

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

$$\cosh^2(t) + \sinh^2(t) = \cosh(2t)$$

<sup>66</sup> Para funções  $h$  que sejam pares vale a igualdade  $\int_{-a}^a h(t)dt = 2 \int_0^a h(t)dt$ .

<sup>67</sup>  $\operatorname{arcsinh}$  denota a inversa da função  $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ .

<sup>68</sup> Como  $\sinh(0) = 0$ , podemos concluir que  $\operatorname{arcsinh}(0) = 0$ .

<sup>69</sup> Note que  $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Desta última relação podemos concluir o seguinte:

(i)  $\sinh(t)$  é monótona crescente.

(ii)  $3 \cosh(t) = \sqrt{9 + 9 \sinh^2(t)}$ .

*obtemos a seguinte sequência de identidades*

$$\begin{aligned}\int_0^3 6\sqrt{9+x^2}dx &= \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} 54\cosh^2(t)dt \\&= \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} 27(1+\cosh(2t))dt \\&= 27\left[t + \frac{\sinh(2t)}{2}\right]_{t=0}^{t=\operatorname{arcsinh}(1)} \\&= 27\operatorname{arcsinh}(1) + \\&+ \frac{27}{2}\sinh(2\operatorname{arcsinh}(1)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 6\sqrt{9+x^2}dx &= \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} 54\cosh^2(t)dt \\&= \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} 27(1+\cosh(2t))dt \\&= 27\left[t + \frac{\sinh(2t)}{2}\right]_{t=0}^{t=\operatorname{arcsinh}(1)} \\&= 27\operatorname{arcsinh}(1) + \\&\quad + \frac{27}{2}\sinh(2\operatorname{arcsinh}(1)).\end{aligned}$$

Finalmente, com base na fórmula<sup>70</sup>

$$\operatorname{arcsinh}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$$

e na relação  $\sinh(2t) = 2\sinh(t)\cosh(t)$  concluímos que

$$27\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right)$$

<sup>70</sup> Reveja o **Exemplo 4.6.3** da seção **4.6 Regra da Cadeia**.

nos dá o valor exato<sup>71</sup> da integral tripla  $\iiint_S dV$ .

**Observação 6.4.1 (Cálculos do Exemplo 7)** O cálculo da integral  $\int_{-3}^3 3\sqrt{9+x^2}dx$  poderia ter sido realizado com recurso à substituição trigonométrica

$$x = 3 \tan(\theta), \text{ com } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Neste caso, obteríamos com base nas relações

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta) \quad \& \quad \tan'(\theta) = \sec^2(\theta)$$

resulta que

$$\int_{-3}^3 3\sqrt{9+x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 27 \sec(\theta) \tan'(\theta) d\theta.$$

<sup>71</sup> Em GeoGebra o comando  $\text{Integral}[3\text{sqrt}(9+x^2), -3, 3]$  permite-lhe obter uma aproximação do valor da integral  $\int_{-3}^3 3\sqrt{9+x^2}dx$ .

O cálculo<sup>72</sup> deste último integral caso teria de ser forçosamente<sup>73</sup> realizado usando a fórmula de integração por partes e com recurso à **Tabela de Derivadas, Integrais e Identidades Trigonometricas**<sup>74</sup> que consta na página do GRADMAT de **Funções de Várias Variáveis (FVV)**.

<sup>72</sup> A título sugestivo, teste na **App de GeoGebra** os comandos  $\text{Integral}[\sec(x)^3]$  &  $\text{Integral}[\sec(x)(1 + \tan(x)^2)]$ .

<sup>73</sup> Uma das grandes dificuldades para este caso prende-se com o fato de não conhecermos uma anti-derivada simples de calcular para a função  $\sec^3(\theta) = \sec(\theta)(1 + \tan^2(\theta))$ .

<sup>74</sup> As identidades hiperbólicas que foram utilizadas no **Exemplo 7** não constam nesta tabela.

## 6.5 Exercícios

### EXERCÍCIOS PROF. GIL BERNARDES

1. Calcule o integral de  $f$  sobre o rectângulo  $E$ :
  - (a)  $f(x, y) = y(x^2 - 6x)$ ,  $E = [-2, 1] \times [0, 1]$ .
  - (b)  $f(x, y) = x^3 + y^2$ ,  $E = [0, 1] \times [-1, 1]$ .
  - (c)  $f(x, y) = yx^2 \sin x^3$ ,  $E = [0, 1] \times [0, 2]$ .
  - (d)  $f(x, y) = \sin(x + y)$ ,  $E = [-1, 1] \times [-\pi, \pi]$ .
2. Utilize o teorema de Fubini para calcular os integrais das seguintes funções em todos os pontos do seu domínio:
  - (a)  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por
$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq y < 1/3 \\ 1 & \text{se } 1/3 \leq y \leq 1 \end{cases}$$
  - (b)  $f : [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } y \geq x \\ x & \text{se } y < x. \end{cases}$$

3. Calcule os limites de integração de  $\iint_D f(x, y) dx dy$  sabendo que  $D$  é limitado pelas curvas de equações:

(a)  $x = 3$ ,  $x = 5$ ,  $3x - 2y + 4 = 0$  e  $3x - 2y + 1 = 0$ .

(b)  $y = x^2$  e  $y = x$ .

(c)  $x^2 + y^2 = 9$  e  $y^2 - x^2 = 1$  ( $D$  não contém  $(0, 0)$ ).

(d)  $y = x^2$  e  $y = 4 - x^2$ .

(e)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ .

(f)  $y = 2x$ ,  $x = 2y$  e  $xy = 2$ .

(g)  $y^2 = 8$ ,  $y = 2x$  e  $y + 4x - 24 = 0$ .

(h)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  e  $9x^2 + 4y^2 = 36$ .

4. Para cada uma das seguintes funções, calcule o seu integral sobre o conjunto  $D$  indicado:

- (a)  $f(x, y) = x + y$ ;  $D$  é a região limitada pelas rectas de equação  $y = 2x$ ,  $x = 2y$  e  $y = 3 - x$ .
- (b)  $f(x, y) = (x + y)^2$ ;  $D$  é a região limitada pelas curvas  $y = x$  e  $y = x^2$ .
- (c)  $f(x, y) = x + y$ ;  $D$  é a região limitada pelas curvas  $y = 1 - x^2$  e  $y = x^2 - 1$ .
- (d)  $f(x, y) = x + y$ ;  $D$  é a região limitada pelas curvas  $y = 3 - (x - 1)^2$  e  $y = (x + 1)^2 - 3$ .
5. Sabendo que  $\int_D f(x, y) dx dy$  é dado pelas expressões seguintes, determine a região  $D$  e inverta a ordem de integração:

(a)  $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy.$

(b)  $\int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$



$$(c) \int_{-2}^2 dx \int_{1-\sqrt{2-x}}^{x/2} f(x, y) dy.$$

$$(d) \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_1^y f(x, y) dx.$$

### EXERCÍCIOS PROF. MAURÍCIO RICHARTZ

6. Encontre o volume do sólido:

- (a) limitado pela superfície  $z = 1 + e^x \sin(y)$  e pelos planos  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = \pi$  e  $z = 0$ .
- (b) limitado pela superfície  $z = x \sec^2(y)$  e pelos planos  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = \pi/4$  e  $z = 0$ .
- (c) limitado pelo parabolóide  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$  e pelos planos  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = -2$ ,  $y = 2$  e  $z = 0$ . Faça um esboço desse sólido.

7. Esboce a região de integração e calcule a integral:

$$(a) \int_0^1 \int_x^{2x} (2x + 4y) dy dx,$$

$$(b) \int_1^e \int_0^{\ln x} x e^{-2y} dy dx,$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x dx dy,$$

$$(d) \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy dy dx.$$

8. Calcule as integrais abaixo, invertendo primeiramente a ordem de integração (faça um esboço da região de integração em cada caso):

$$a) \int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy dx,$$

$$b) \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos(x^2) dx dy,$$

$$c) \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy,$$

$$d) \int_1^3 \int_0^{\ln(x)} x dy dx.$$

9. Encontre o volume dos sólidos abaixo. Em cada caso, faça um esboço.

- (a) sólido limitado pelos planos coordenados e pelo plano  $3x + 2y + z = 6$ .
- (b) sólido limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 9$  e pelos planos  $z = 0$  e  $z = 3 - x$ .
- (c) sólido no primeiro octante limitado acima pelo parabolóide  $z = x^2 + 3y^2$ , abaixo pelo plano  $z = 0$  e lateralmente por  $y = x^2$  e  $y = x$ .
- (d) sólido comum aos cilindros  $x^2 + y^2 = 25$  e  $x^2 + z^2 = 25$  (sólido de Steinmetz - pesquise no Google).
- (e) tetraedro limitado pelos planos  $x + 2y + z = 2$ ,  $x = 2y$ ,  $x = 0$  e  $z = 0$ .

10. Calcule as integrais abaixo:

(a)  $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y) \, dx \, dy \, dz,$

(b)  $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{z}{y+1} \, dx \, dz \, dy,$

$$(c) \int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln(x)} x e^{-y} dy dx dz,$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \int_0^x \cos(x+y+z) dz dx dy,$$

11. Faça um esboço da região de integração e calcule  $\iiint_D f(x, y, z) dV$  nos seguintes casos:

(a)  $f(x, y, z) = y$  e  $D$  é o sólido limitado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e  $2x + 2y + z = 4$

(b)  $f(x, y, z) = xy$  e  $D$  é o sólido limitado pelo cilindro  $y^2 + z^2 = 9$  e pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 3x$  e  $z = 0$  no primeiro octante.

(c)  $f(x, y, z) = xy$  e  $D$  é o sólido limitado pelos cilindros parabólicos  $y = x^2$  e  $x = y^2$  e pelos planos  $z = 0$ ,  $z = x + y$ .

12. Sabendo que o volume de um sólido  $R$  pode ser calculado através da integral  $\iiint_R dV$ , determine o volume dos seguintes sólidos:

- (a) Tetraedro limitado pelos planos  $x + 2y + z = 2$ ,  $x = 2y$ ,  $x = 0$  e  $z = 0$ .
- (b) Tetraedro de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 0, 1)$ .
- (c) O sólido limitado pelos parabolóides  $y = x^2 + z^2$  e  $y = 8 - x^2 - z^2$ .
- (d) O sólido limitado pelo cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  e pelos planos  $y = -1$  e  $y + z = 4$ .

# Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

*We cannot direct the wind, but we can adjust the sails.*

– *Bertha Calloway*

O **Capítulo 6 Integrais Duplas e Triplas** centrou-se essencialmente na aplicabilidade do **Teorema de Fubini**<sup>1</sup> para no cálculo de integrais duplas e triplas como integrais iteradas sobre regiões genéricas do plano<sup>2</sup> e do espaço<sup>3</sup>.

Ao longo deste último capítulo dedicámos também parte do nosso estudo ao cálculo de áreas e volumes. Em alguns dos exemplos, como foram o caso do **Exemplo 6.3.3** **Exemplo 6.4.3** e até do **Exemplo 7**. A grande dificuldade residiu essencialmente no fato de as regiões de integração descritas em coordenadas cartesianas resultarem em integrais iterados *difíceis*

<sup>1</sup> Veja **Proposição 6.1.2**.

<sup>2</sup> Veja **Proposição 6.2.1**.

<sup>3</sup> Veja **Proposição 6.4.1**.

*de calcular*<sup>4</sup>.

O tema central deste capítulo será o estudo da aplicabilidade do **Teorema da Mudança de Variáveis** em integrais duplas e triplas. Este resultado possibilita-nos, na grande maioria dos casos, a obtenção de domínios de integração para os quais é mais simples calcular as integrais duplas/triplas de forma iterada.

**Este capítulo apenas inclui uma síntese de resultados principais e alguns exemplos. O texto final será concluído durante o 2º quadrimestre de 2017.**

<sup>4</sup> Quando nos referimos a integrais iterados 'difíceis de calcular', estamos a referir-mo-nos ao domínio das técnicas de integração estudadas em *Funções de Uma Variável (FUV)*.



## 7.1 Teorema da Mudança de Variáveis

### Proposição 7.1.1 (Para duas variáveis)

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\mathcal{R}^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \end{aligned}$$

onde<sup>5</sup>

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

### Proposição 7.1.2 (Para três variáveis)

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{\mathcal{S}^*} f(x(T), y(T), z(T)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \end{aligned}$$

<sup>5</sup> A quantidade  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  corresponde ao módulo do Jacobiano (determinante da matriz Jacobiana). Esta quantidade nunca se pode anular.

onde  $T = (u, v, w)$  e

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 7.1.1 (Região delimitada por losango)**

$$\iint_{\mathcal{R}} \cos(\pi x + \pi y) dx dy,$$

onde

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

**REGIÃO**  $\mathcal{R}$  é delimitada pelas retas de equação

$$x + y = 1, \quad -x + y = 1$$

$$x - y = 1, \quad -x - y = 1.$$

Note que esta região pode ser decomposta como uma região verticalmente ou horizontalmente simples:

(i) **REGIÃO VERTICALMENTE SIMPLES:**  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ , onde

- $\mathcal{R}_1$  é a região definida em termos das inequações

$$0 \leq x + y \leq 1 \quad 0 \leq x - y \leq 1$$

- $\mathcal{R}_2$  é a região definida em termos das inequações

$$0 \leq -x + y \leq 1 \quad 0 \leq -x - y \leq 1$$

(ii) **REGIÃO HORIZONTALMENTE SIMPLES:**  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ , onde

- $\mathcal{R}_1$  é a região definida em termos das inequações

$$0 \leq -x + y \leq 1 \quad 0 \leq x + y \leq 1$$

- $\mathcal{R}_2$  é a região definida em termos das inequações

$$0 \leq -x - y \leq 1 \quad 0 \leq x - y \leq 1$$

Escolhamos a decomposição  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$  em regiões verticalmente simples.

Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \cos(\pi x + \pi y) dx dy &= \iint_{\mathcal{R}_1} \cos(\pi x + \pi y) dx dy + \\ &+ \iint_{\mathcal{R}_2} \cos(\pi x + \pi y) dx dy.\end{aligned}$$

Usando as substituições  $u = x + y$  e  $v = x - y$  em ambas as regiões  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ , obtemos que

(a)  $\mathcal{R}_1$  é definida em termos das inequações  $0 \leq u \leq 1$   
&  $0 \leq v \leq 1$ ;

(b)  $\mathcal{R}_2$  é definida em termos das inequações  $-1 \leq u \leq 0$   
&  $-1 \leq v \leq 0$ .

Das igualdades  $x = \frac{u+v}{2}$  &  $y = \frac{u-v}{2}$  concluimos que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2},$$

532 | 565

donde

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}_1} \cos(\pi x + \pi y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \cos(\pi u) \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(\pi u) du \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}_2} \cos(\pi x + \pi y) dx dy &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \cos(\pi u) \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \cos(\pi u) du \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto:

$$\iint_{\mathcal{R}} \cos(\pi x + \pi y) dx dy = 0.$$

**COMO EXERCÍCIO:**

(a) Verifique também que

$$\iint_{\mathcal{R}} \cos(\pi x + \pi y) dx dy = 0$$

para o caso de  $\mathcal{R}$  ser decomposta nas duas regiões horizontalmente simples descritas acima.

(b) Use o mesmo tipo de raciocínio para calcular

$$\iint_{\mathcal{R}} \sin(\pi x + \pi y) dx dy.$$

## 7.2 Integração em Coordenadas Polares

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}, r > 0, -\pi \leq \theta < \pi$$

DETERMINANTE MATRIZ JACOBIANA:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r.$$

**Definição 7.2.1 (Retângulo Polar)** *Região delimitada pelas inequações*

$$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \quad \& \quad \tan(\alpha)x \leq y \leq \tan(\beta)x,$$

com  $b > a > 0$  e  $\pi \geq \beta \geq \alpha \geq -\pi$

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b : \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

**OBSERVAÇÃO:** Por convenção, ângulos  $\frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2}$  correspondem às retas tangentes de declive  $+\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente.

**Exemplo 7.2.1 (Splines Poli-harmônicos)** Para  $k \in \mathbb{N}$ , considere a função

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^k \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

e a região de integração

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\},$$

com  $b > 1$ .

*Em coordenadas polares, a região  $\mathcal{R}$  corresponde a*

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq b, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

*Por outro lado, temos que*

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^{2k} \ln(r).$$

*Daqui resulta que*

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^b r^{2k} \ln(r) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_1^b r^{2k+1} \ln(r) dr \\ &= 2\pi \int_1^b \left( \frac{r^{2k+2}}{2k+2} \right)' \ln(r) dr \end{aligned}$$

*Usando integração por partes, podemos 'facilmente' concluir que*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \frac{b^{2k+2}}{2k+2} \ln(r) + \frac{1}{(2k+2)^2} (1 - b^{2k+2}).$$

536 | 565



**COMO EXERCÍCIO:** Para a região

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0 \text{ \& } 1 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \right\},$$

calcule  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ , sendo<sup>6</sup>:

(a)  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} e^{-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}.$

(c)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \sin\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$

**Exemplo 7.2.2 (Função Gaussiana)** Suponha agora que pretende calcular o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx := \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

usando coordenadas polares.

Denote por  $I(a) := \int_{-a}^a e^{-x^2} dx.$

<sup>6</sup> Funções retiradas do final do **Exemplo 4.6.5**

Usando o **Teorema de Fubini**, resulta que

$$\begin{aligned} I(a)^2 &= \left( \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right) \\ &= \iint_{[-a,a]^2} e^{-x^2-y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Consideremos agora a função auxiliar  $f^* : [-a,a]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2-y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > a^2 \end{cases}$$

Utilizando coordenadas polares, obtemos que

$$\begin{aligned} \iint_{[-a,a]^2} f^*(x,y) dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta. \end{aligned}$$

Esta última integral iterada pode ser calculada de forma imediata. O seu valor é igual a

$$\pi \left( 1 - e^{-a^2} \right).$$

Por outro lado, fazendo  $a \rightarrow \infty$  concluímos que a região definida em termos da inequação

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

nos dá uma aproximação assintótica do quadrado  $[-a, a]^2$ .

Daqui se conclui que

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)^2 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{[-a, a]^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy.\end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy &= \lim_{a \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-a^2}) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Finalmente, do fato de  $e^{-x^2} > 0$  se conclui que

$$I(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \geq 0,$$

*pelo que a equação*

$$I(a)^2 = \pi(1 - e^{-a^2})$$

*admite apenas como solução uma raiz – a raiz positiva.*

*Fazendo  $a \rightarrow \infty$ , concluímos que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \sqrt{\pi}.$$

### **Exemplo 7.2.3 (Interseção duas Circunferências)**

$$\iint_{\mathcal{R}} (x^2 - y^2) dx dy$$

*onde  $\mathcal{R}$  é a região determinada pela interseção circunferências de equação*

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 8x.$$

### **INTEGRAL EM COORDENADAS POLARES:**

$$\iint_{\mathcal{R}} (x^2 - y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{8 \cos(\theta)} r^3 \cos(2\theta) dr d\theta.$$

54º
565

**Exemplo 7.2.4 (Área de um Elipsóide)** Para o cálculo da área de elipsóide de equação

$$\frac{(x-a)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-b)^2}{\beta^2} = 1.$$

teremos que considerar a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \frac{x-a}{\alpha} = r \cos(\theta) \\ \frac{y-b}{\beta} = r \sin(\theta) \end{cases}, 0 < r \leq 1, -\pi \leq \theta < \pi$$

DETERMINANTE MATRIZ JACOBIANA:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) & -r\alpha \sin(\theta) \\ \beta \sin(\theta) & r\beta \cos(\theta) \end{pmatrix} = \alpha\beta r.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} \iint_{\frac{(x-a)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-b)^2}{\beta^2} \leq 1} dA &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \alpha\beta r dr d\theta \\ &= \alpha\beta\pi. \end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO:** Para  $\alpha = \beta = R$ , temos que a fórmula anterior nos dá a fórmula de área de uma circunferência de centro  $(a, b)$  e raio  $R$ .

Próximos exemplos englobam **regiões do tipo angular** determinadas pelas equações de uma rosa de quatro pétalas e de um cardióide representadas no gif animado<sup>7</sup>

### CurvasCoordenadasPolares.gif

**Exemplo 7.2.5 (Densidade de uma Rosa 4 Pétalas)**  
Suponhamos<sup>8</sup> que  $W$  é a rosa de quatro pétalas, descrita em termos da equação

$$r^2 = 9 \sin^2(2\theta).$$

Note que as pétalas da rosa são delimitadas pelos eixos  $Ox$  e  $Oy$ . Daqui resulta que

$$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4,$$

<sup>7</sup> Ficheiro GeoGebra: CurvasCoordenadasPolares.ggb

<sup>8</sup> Veja **exercício 5** da seção 7.8 Exercícios.

onde

$$W_1 = \left\{ (r, \theta) : 0 < r \leq 3|\sin(2\theta)| \text{ \& } -\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ (r, \theta) : 0 < r \leq 3|\sin(2\theta)| \text{ \& } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \right\}$$

$$W_3 = \left\{ (r, \theta) : 0 < r \leq 3|\sin(2\theta)| \text{ \& } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$W_4 = \left\{ (r, \theta) : 0 < r \leq 3|\sin(2\theta)| \text{ \& } \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \right\}.$$

Logo

$$\iint_W \rho(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^4 \iint_{W_i} \rho(x, y) dx dy,$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \iint_W \rho(x, y) dx dy = & \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \int_0^{3|\sin(2\theta)|} \rho(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta + \\ & \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{3|\sin(2\theta)|} \rho(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta + \\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3|\sin(2\theta)|} \rho(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta + \\ & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{3|\sin(2\theta)|} \rho(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta. \end{aligned}$$

**Observação 7.2.1 (Lemniscata de Bernoulli)** Se a região  $W$  do **Exemplo 7.2.5** fosse a lemniscata de Bernoulli dada pela equação

$$r^2 = 3 \cos(2\theta),$$

teríamos que  $W$  teria de ser também decomposto em 4



*regiões, delimitadas pelas retas de equação*

$$y = x \quad \& \quad y = -x.$$

**COMO EXERCÍCIO:** Escreva a integral  $\iint_W \rho(x, y) dx dy$  em coordenadas polares, para o caso de  $W$  ser a lemniscata de Bernoulli descrita acima.

**Exemplo 7.2.6 (Recorte de um Cardióide)** Área delimitada pelo cardióide descrito pela equação na forma polar:

$$r = 3 + 3 \cos(\theta),$$

situada à direita do eixo  $Oy$ , e situada entre as retas de equação

$$\sqrt{3}x + 3y = 0 \quad \& \quad \sqrt{3}x - y = 0.$$

**INTEGRAL DE ÁREA:**

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{3+3\cos(\theta)} r dr d\theta.$$

## 7.3 Integração em Coordenadas Cilíndricas

### (i) REGIÕES DO TIPO I:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}, r > 0, -\pi \leq \theta < \pi$$

Neste caso

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) dV = \\ &= \iint_{\mathcal{R}^*} \int_{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}^{g(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} F(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \times \\ & \quad \times r \, dz dr d\theta. \end{aligned}$$

### (ii) REGIÕES DO TIPO II:

$$\begin{cases} x = x \\ y = r \cos(\theta) \\ z = r \sin(\theta) \end{cases}, r > 0, -\pi \leq \theta < \pi$$

Neste caso

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) dV = \\ &= \iint_{\mathcal{R}^*} \int_{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}^{g(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} F(x, r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \times \\ & \quad \times r \, dx dr d\theta. \end{aligned}$$

(iii) **REGIÕES DO TIPO III:**

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = y \\ z = r \sin(\theta) \end{cases}, r > 0, \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

Neste caso

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{S}} F(x, y, z) dV = \\ &= \iint_{\mathcal{R}^*} \int_{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}^{g(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} F(r \cos(\theta), y, r \sin(\theta)) \times \\ & \quad \times r \, dy dr d\theta. \end{aligned}$$

**Exemplo 7.3.1 (Cone em Coordenadas Cilíndricas)**

Pretendemos calcular a integral  $\iiint_S 2y dV$ , sendo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : yz \geq 0, \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 5\}$$

$$\iiint_S 2y dV = \iint_{\mathcal{R}} \left( \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^5 2y dx \right) dy dz,$$

onde

$$\mathcal{R} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : yz > 0 \text{ \& } y^2 + z^2 \leq 25\}.$$

**Região do Tipo II.** Temos de utilizar coordenadas cilíndricas da forma

$$\begin{cases} x = x \\ y = r \cos(\theta) \\ z = r \sin(\theta) \end{cases}, r > 0, -\pi \leq \theta < \pi$$

**Exemplo 7.3.2 (Cones Elípticos)** Sólido limitado pelos paraboloides elípticos da forma

$$x = \alpha^2 - \frac{(y-b)^2}{\beta^2} - \frac{(z-c)^2}{\gamma^2} \text{ e } x = \alpha^2 + \frac{(y-b)^2}{\beta^2} + \frac{(z-c)^2}{\gamma^2}$$

e pelos planos  $y = 0$  e  $x + y + z = 0$ .

## 7.4 Integração em Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases},$$

para  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$  &  $-\pi \leq \theta < \pi$ .

$$\begin{aligned} & \iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{S^*} f(\rho \cos(\theta) \sin(\phi), \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \rho \cos(\phi)) \times \\ & \quad \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta. \end{aligned}$$

**Observação 7.4.1 (Volumes em Esféricas)** *A integral*

$$\iiint_{S^*} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

*dá-nos uma fórmula para cálculo do volume do sólido  $S$  em termos de coordenadas esféricas.*

**Exemplo 7.4.1 (Esfera de Raio  $R$ )** ...

**Exemplo 7.4.2** *O sólido limitado abaixo pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e acima pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$*

## 7.5 Aplicações

**Esta seção será escrita apenas no decurso do próximo quadrimestre.**

## 7.6 Problemas em Aberto

Vamos terminar este capítulo enunciando alguns *problemas em aberto*<sup>9</sup> para que você, aluno, resolva fazendo uso do que aprendeu sobre integração em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.

Começemos por enunciar dois problemas envolvendo áreas:

### Problema 7.6.1 (Circunferências e Hipérboles)

Determine a área da região descrita pela inequações

$$x^2 + y^2 \leq 5, \quad x^2 - y^2 \leq 1 \quad \& \quad y^2 - x^2 \leq 1.$$

**DICA:** Cada hipérbole intersesta a equação da elipse em quatro (04) pontos. Num total, temos oito (08) in-

<sup>9</sup> O aluno que resolver corretamente três (03) dos quatro (04) problemas obterá **Conceito A**, "independentemente" do resultado das provas. A resolução terá de envolver obrigatoriamente coordenadas polares, cilíndricas ou esféricas. Os valores obtidos para a resolução não poderão ser aproximados. Mais detalhes podem ser encontrados mais à frente, na seção 7.7 **Sobre os Problemas em Aberto**.

*terseções. Para começar por determinar os intervalos angulares, comece por determinar todas as interseções.*

### **Problema 7.6.2 (Lemniscata & Rosa 4 Pétalas)**

*Encontre uma fórmula de área resultante da interseção da lemniscata de Bernoulli, de equação*

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\theta)$$

*com a rosa de quatro pétalas, de equação*

$$r^2 = 2a^2 \sin^2(2\theta),$$

*onde  $a > 0$  é uma constante.*

*A visualização das duas regiões, delimitadas pelas equações paramétricas acima pode ser visualizada a partir do gif animado<sup>10</sup>*

***CurvasCoordenadasPolares.gif***

<sup>10</sup> ***Ficheiro GeoGebra: CurvasCoordenadasPolares.ggb***



O próximo problema corresponde a uma extensão do **Exemplo 6.4.4** da seção **6.4 Introdução às Integrais Triplas**.

### **Problema 7.6.3 (Cortes Hiperbólicos em Sólidos)**

*Determine o volume do sólido comum às seis (06) superfícies cilíndricas de equação*

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 5, & x^2 - y^2 &= 1, & y^2 - x^2 &= 1, \\x^2 + z^2 &= 5, & x^2 - z^2 &= 1, & z^2 - x^2 &= 1.\end{aligned}$$

*Para ter uma ideia geométrica do problema a resolver, visualize o gif animado<sup>11</sup>*

***CortesHiperbolicosSolidoSteinmetz.gif***

O último problema desta seção envolve um domínio técnico abrangente de coordenadas esféricas.

<sup>11</sup> *Ficheiro GeoGebra: CortesHiperbolicosSolidoSteinmetz.ggb*

**Problema 7.6.4 (Interseção de Três Esferas)** <sup>12</sup>

*Determine volume resultante da interseção das três esferas de centros  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 1, 0)$  e raio 2.*

*Uma ilustração geométrica do problema a resolver pode ser visualizada a partir do gif animado*<sup>13</sup>

***VolumeIntersecaoEsferas.gif***

<sup>12</sup> *A resolução do problema envolvendo a interseção de duas esferas pode ser consultada em*

*<http://mathworld.wolfram.com/Sphere-SphereIntersection.html>.*

<sup>13</sup> ***Ficheiro GeoGebra: VolumeIntersecaoEsferas.ggb***

## 7.7 *Sobre os Problemas em Aberto*

**São Paulo, 19 de abril de 2017**

Prezado aluno,

Agora que já captei a sua atenção, vamos lá esclarecer o que o professor pretendia quando colocou quatro (04) problemas em aberto na seção **7.6 Problemas em Aberto**:

1. Primeiro o professor pretende que você estude com afinco para a *P2* e que se prepare antecipadamente para a eventualidade de ir na *REC*.
2. Depois o professor pretendeu que você fosse apanhado de surpresa (pegadinha).
3. O professor não pretende apenas que você resolva o(s) problema(s), tampouco que copie ou peça para alguém lhe resolver. O professor pretende que você resolva todos os problemas

propostos, sim, mas pretende que o faça de forma perspicaz. Resolver problemas de forma convencional você já o faz em prova. Mas aí está a jogar com o fator tempo e com o fator pressão.

4. Obviamente que o professor não vai atribuir conceito  $A$  ao aluno que tenha obtido conceito  $F, D$  ou  $C$  no final, pois aí estaria a subverter o processo de avaliação delineado e discutido para este quadrimestre.

**Em suma:** O professor vai tomar como referência as notas que você obteve em todas as provas que realizou. São estas que vão determinar o seu Conceito a *Funções de Várias Variáveis*. Em caso de dúvida de conceito, o professor tomará em linha de conta as resoluções entregues e fará uma eventualmente uma curta entrevista, de aproximadamente 20 minutos, em que lhe fará perguntas pertinentes sobre as reso-

luções que realizou, assim sobre a matéria em geral da disciplina.

Espero ter sido agora claro.

O professor,

Nelson Faustino

**PS:** Este pequeno esclarecimento já não é zoeira.

## 7.8 Exercícios

### EXERCÍCIOS PROF. MAURÍCIO RICHARTZ

1. Utilizando integração dupla em coordenadas polares, calcule:

(a)  $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2) dy dx,$

(b)  $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x+y) dx dy,$

- (c) (Desafio:) a área da região do plano delimitada pela lemniscata de Bernoulli  $r^2 = 2a^2 \cos(2\theta)$  (pesquise no google para descobrir a forma da lemniscata).

- (d) volume de uma esfera de raio  $R$ .

- (e) volume do sólido limitado abaixo pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e acima pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2. Use coordenadas cilíndricas e/ou esféricas para calcular  $\iiint_D f(x, y, z) dV$ , fazendo um esboço da

região de integração em cada caso:

- (a)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $D$  é o sólido delimitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 16$  e pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = -5$  e  $z = 4$ .
- (b)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $D$  é o sólido limitado abaixo pelo plano  $xy$  e acima pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
- (c)  $f(x, y, z) = x$  e  $D$  é o sólido delimitado pelos cilindros  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 9$  e pelos planos  $z = 0$  e  $z = x + y + 3$ .
- (d)  $f(x, y, z) = e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  e  $D$  é o sólido delimitado pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  no primeiro octante.

3. Faça um esboço do sólido cujo volume é calculado pela integral dada. Em cada caso, calcule também a integral.

(a) 
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta,$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta,$$

4. (Opcional: Mudança de coordenadas e o Jacobiano) Aprendemos a usar coordenadas cartesianas/polares para calcular integrais duplas e coordenadas cartesianas/cilíndricas/esféricas para calcular integrais triplas, mas essas não são as únicas possibilidades. De acordo com a simetria do problema, a escolha adequada das coordenadas pode simplificar bastante os cálculos.

- a) Leia a seção 15.10 do Stewart sobre mudança de coordenadas em integrais múltiplas. Você aprenderá, entre outras coisas, o que é o Jacobiano de uma mudança de coordenadas.
- b) A partir do Jacobiano, mostre que  $dA = r \, dr \, d\theta$  para coordenadas polares,  $dV = r \, dr \, d\theta \, dz$  para coordenadas cilíndricas e



$dV = \rho^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$  para coordenadas esféricas.

c) Calcule as integrais abaixo fazendo uma mudança apropriada de coordenadas:

(i)  $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dA$  onde  $R$  é o paralelogramo delimitado pelas retas  $x = 2y$ ,  $x = 2y + 4$ ,  $3x = y + 1$  e  $3x = y + 8$ .

(ii)  $\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} dA$  onde  $R$  é o retângulo delimitado pelas retas  $x = y$ ,  $x = y + 2$ ,  $x = -y$  e  $x = -y + 3$ .

5. **Aplicações:** Se  $\rho(x, y)$  representa a densidade superficial de um objeto  $W$ , então  $\iint_W \rho(x, y) dA$  representa a massa  $M$  desse objeto (a região de integração se estende por toda a superfície do objeto). As coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  do centro de massa do objeto, por sua vez, podem ser

calculadas com as seguintes integrais:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_W x \rho(x, y) dA,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_W y \rho(x, y) dA.$$

Já o momento de inércia desse objeto em torno do eixo  $z$  (momento de inércia polar) é dado pela integral  $I = \iint_W (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$ . Sabendo disso, encontre a massa, o centro de massa e o momento de inércia polar dos seguintes objetos:

- (a) Quadrado de lado 2, com centro no ponto  $(1, 1)$  e densidade constante 5.
- (b) Semi-círculo de raio  $R$ , no semiplano superior e centrado na origem. Assuma que a densidade em um ponto do semi-círculo é

diretamente proporcional ao quadrado da distância entre a origem e esse ponto. Assuma que a constante de proporcionalidade é  $k$ .

### EXERCÍCIOS PROF. GIL BERNARDES

6. Passando para coordenadas polares, calcule  $\iint_D f(x, y) dx dy$  onde  $f(x, y)$  e  $D$  são dados respectivamente por:

(a)  $f(x, y) = xy$ ;

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ \& } x, y \geq 0\}.$$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(c)  $f(x, y) = |xy|$ ;

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\}.$$

$$(d) \quad f(x, y) = \sqrt{2ax - x^2 - y^2};$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2ax\}.$$

$$(e) \quad f(x, y) = y + |x|;$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x, x \leq y\}.$$

7. Procedendo a convenientes mudanças de variável, com o objectivo de simplificar a região de integração, calcule os integrais duplos das seguintes funções nos conjuntos indicados:

a)  $x^2 + y^2$ ; o quadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 0)$  e  $(1, 1)$ .

b)  $x - y$ ; o triângulo de vértices  $(-2, -1)$ ,  $(4, 2)$  e  $(-1, 1)$ .

c)  $e^{-(x^2+y^2)}$ ; a coroa circular limitada pelas circunferências de centro na origem e raios 1 e 2.

- d)  $xy$ ; a região primeiro quadrante limitada pela elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

8. Calcule

$$\iint_E (x-y)e^{(x+y)} dx dy$$

onde

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 + (x-y)^2 \leq 3, \\ x+y \geq 0, x-y \leq 0\}.$$

9. Seja  $A$  a região do plano  $xy$  limitada pelas curvas de equação

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x^2 \quad \text{e} \quad y = 2x.$$

- (a) Determine a área de  $A$ .
- (b) Utilizando a alínea anterior, determine a área de  $h(A)$  onde  $h : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por

$$h(x, y) = (x^2 y^{-1}, x^{-1} y^2).$$