Bases Matemáticas

Livro de Exercícios

Prof. Dr. Nelson Faustino

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

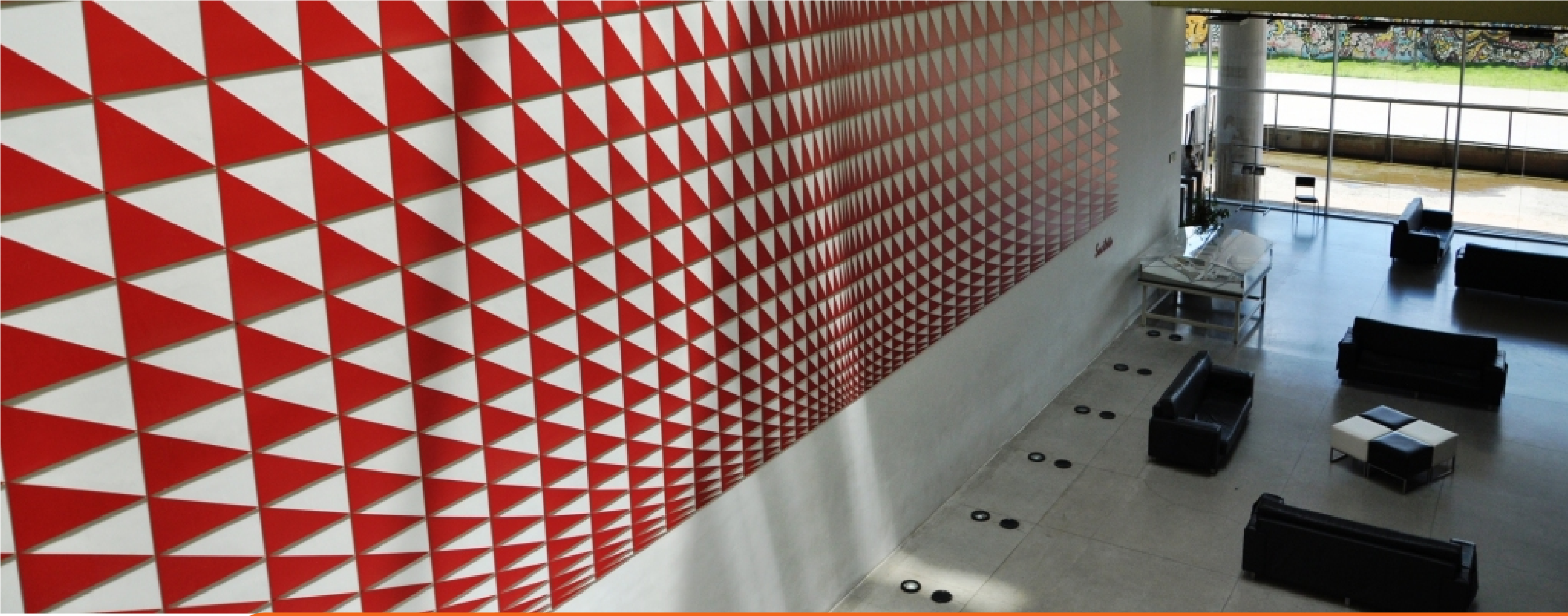
http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/

Última versão, 28 de novembro de 2020

Sumário

II Pré-Cálculo

Fundamentos da Matemática



1. Conjuntos e Funções

O que há de novo?

Este capítulo corresponde a uma reformulação da **Lista L1 | Teoria de Conjuntos e Funções (2016)**.

- **08 DE JUNHO DE 2018**
  - Foram adicionados cinco novos exercícios: **1, 3, 7, 8 & 42.**
  - Foram adicionadas questões que já sairam em prova. Estas foram devidamente identificadas ao longo deste capítulo.
  - Terminologia **Injetora(s)** resp. **Sobrejetora(s)** resp. **Bijetora(s)** foi substituída pela terminologia **Injetiva(s)** resp. **Sobrejetiva(s)** resp. **Bijetiva(s)**.
  - Alguns exercícios da **Lista L2 | Conjuntos Numéricos (2016)** foram reformulados incorporados neste capítulo. São eles o **14 & 39** (**16.** resp. **13.** da **Lista L2 | Conjuntos Numéricos**).
  - Foi excluído o exercício **23.** da **Lista L1 | Teoria de Conjuntos e Funções (2016)**. Este último transitou para o **Capítulo 2** (veja **exercício 49**).
- **12 DE JUNHO DE 2018**
  - Foram inseridas várias notas de rodapé, em comentário aos exercícios.
  - Foi retirado o item (d) do **Exercício 2**.
  - Houve uma troca de ordem entre os quatro últimos exercícios da **seção 1.1**.
  - Houve uma troca de ordem entre os dois últimos exercícios da **seção 1.1**.
- **18 DE JUNHO DE 2018**
  - Corrigido item (c) do **Exercício 9.** (*Leis de Morgan*).
  - Foram adicionados quatro novos exercícios: **4,10,15, 19 & 27**.
  - Foi adicionada uma nova seção: **1.7 Representação Gráfica usando o GeoGebra**
- **24 DE JUNHO DE 2018**
  - Corrigidos item (d) do **Exercício 9** (*partições de conjuntos*) & item (c) do **Exercício 33** (nesta versão $A \subseteq \mathbb{N}$ é finito).
  - Acrescentada tabela ao **Exercício 19** (Propriedades mais importantes das operações entre conjuntos).

  - Item (d) foi adicionado ao **Exercício 47**.
- **03 DE JULHO DE 2018**
  - Corrigido erro no item (d) do **Exercício 33** (*para todo o $p \in A$ ao invés de para todo o $p \in \mathbb{N}$*).
- **03 DE OUTUBRO DE 2018**
  - Comentários em rodapé relativos ao **Exercício 2** foram corrigidos (Obrigado à *L. Florêncio* pela chamada de atenção).
  - Corrigidas propriedades de INDEMPOTÊNCIA & LEI DO COMPLEMENTO na tabela que antecede o **Exercício 14**.

1.1 Operações entre Conjuntos

1. Seja[1] $A = \{gru, vix\}$. Decida quais das afirmações abaixo é correta ou incorreta:
   (a) $\{vix\} \in A$
   (b) $\emptyset \in A$
   (c) $\{vix\} \subseteq A$
   (d) $vix \in A$
   (e) $vix \subseteq A$.
2. Seja A o conjunto de todos os números decimais, B o conjunto de todos os números decimais pares, C o conjunto de todos os decimais ímpares, $D = \{3,4,5\}$ e $E = \{3,5\}$.
   Diga, justificando, qual/quais desses conjuntos é o conjunto X que satisfaz cada uma das condições abaixo:
   (a) X e B são *disjuntos*[2].
   (b) $X \subseteq D$ e $X \not\subseteq B$. [3]
   (c) $X \subseteq A$ e $X \not\subseteq C$. [4]
3. Decida[5] qual das afirmações abaixo é correta ou incorreta:
   (a) $\{r,a,m,o\} = \{r,o,m,a\}$.
   (b) $\{r,o,m,a,a,a,a,a\} \subseteq \{m,o,r,a\}$.
   (c) $\{r,r,r,a,m,o,o,o,o,o\} \subseteq \{m,a,r\}$.
   (d) $\{a,m\} \in \{\{a,m\}\}$
   (e) $\{r,o\} \subseteq \{\{r,o,r\}\}$.
   (f) $\emptyset \subseteq \{\{a\}\}$.
4. Escreva os conjuntos abaixo na forma $\{x \ : \ P(x)\}$, onde $P(x)$ denota os elementos x que satisfazem a propriedade P.
   (a) $\{1,2,4,8,16,32,64,\ldots\}$.
   (b) $\{1,1,2,3,5,8,13,21\}$.
   (c) $\{A,B,AB,O\}$.
   (d) {Brasil, Rússia,Índia, China, África do Sul}.
   (e) {Sarney, Collor, Itamar, Fernando Henrique ,Lula, Dilma, Temer,Bolsonaro} .
   (f) $\{1808,1822,1889\}$.

[1] Observe que $\emptyset$ (conjunto vazio) é sempre subconjunto de qualquer conjunto X. Em particular, vale $\emptyset \subseteq \emptyset$. No entanto $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, onde $\{\emptyset\} = \mathscr{P}(\emptyset)$ (conjunto das partes do conjunto vazio).

[2] Dois conjuntos X e B são disjuntos quando $X \cap B = \emptyset$. Em particular, os conjuntos $X = C$ e $X = E$ satisfazem esta condição.

[3] $X \not\subseteq B$ quando existe um $x \in X$ tal que $x \notin B$. Em particular, os conjuntos $X = D$ e $X = E$ satisfazem as condições deste item.

[4] Os únicos subconjuntos de A que não s ao subconjunto de C são B & D, uma vez que $B \cap C = \emptyset$ & $4 \in D$, mas $4 \notin C$. Portanto $X = B$ e $X = D$ são a solução do exercício.

[5] O conjunto das partes (ou conjunto potência) de C é definido por $\mathscr{P}(C) : \{X \ : \ X \subseteq C\}$.

5. Formule os enunciados abaixo em termos de teoria de conjuntos:
   (a) Um computador é usado para gerar aleatoriamente um número entre 1 e 2000. O conjunto A consiste em colecionar todos os números terminados em 9 enquanto que o conjunto B consiste em colecionar um número menor que 200.
   (b) Suponha que você seleciona uma carta de um baralho normal de 52 cartas. O conjunto A consiste em colecionar todas as possibilidades de sair um rei enquanto que o conjunto B consiste em colecionar todas as cartas do naipe de espadas.
6. Decida quais dos conjuntos abaixo tem seis elementos (i.e. cardinalidade 6):
   (a) $\{b,r,a,s,i,l\}$
   (b) $\{\{b,r,a,s,i,l\}\}$
   (c) $\{b,r,a,\{s\},\{i,l\}\}$
   (d) $\{b,r,a,\{s\},\{i\},\{i,l\}\}$
   (e) $\{b,r,a,\{s\},\{i\},\{i,l\}\}$
   (f) $\{b,r,a,\{s\},\{i\},\{i,l\},\{\emptyset\}\}$
7. Encontre todos os subconjuntos de:
   (a) $B=\{\{p,i\},\{a,u,i\}\}$.
   (b) $I=\{r,o,m,a\}$.
   (c) $F=\{\{p,a\},\{r,i\},s\}$.
8. Decida qual das afirmações abaixo é correta ou incorreta. C é um conjunto qualquer não-vazio.
   (a) $C \in \mathscr{P}(C)$
   (b) $C \subseteq \mathscr{P}(C)$
   (c) $\{C\} \in \mathscr{P}(C)$
   (d) $\{C\} \subseteq \mathscr{P}(C)$
9. Para quaisquer conjuntos A, B e C mostre que:
   (a) Se A^c é o complementar de A, então A é o complementar de A^c (i.e. $(A^c)^c = A$).
   (b) Se $A \subseteq B$, então $B^c \subseteq A^c$.
   (c) $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.
   (d) São válidas as *leis de Morgan*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \ \& \ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

   (e) São válidas as propriedades distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \ \& \ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

   (f) $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são conjuntos disjuntos. Adicionalmente, são válidas as seguintes partições de conjuntos:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \ \& \ B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B).$$

10. Sejam A e B dois conjuntos arbitrários.
   (a) Mostre que[6] $(A \cup B) \setminus A \subseteq B$.
   (b) Dê um exemplo de dois exemplos de conjuntos A e B para os quais $(A \cup B) \setminus A \neq B$.
11. Para três conjuntos A, B e C, suponha que $A \cap B \neq \emptyset$ e $A \cap C \neq \emptyset$.
   (a) Mostre que se A é um conjunto com um único elemento, então $B \cap C \neq \emptyset$.
   (b) Para o caso de A ser um conjunto de dois elementos, encontre um exemplo de três conjuntos A, B e C, nas condições do enunciado, para os quais a condição $B \cap C = \emptyset$ se verifica.

[6] Para quaisquer conjuntos X e Y, a operação $X \setminus Y$ (diferença entre conjuntos) é definida com base na igualdade $X \setminus Y = X \cap Y^c$, onde Y^c denota o complementar do conjunto Y. Em alguns livros de texto esta operação aparece denotada por $X - Y$.

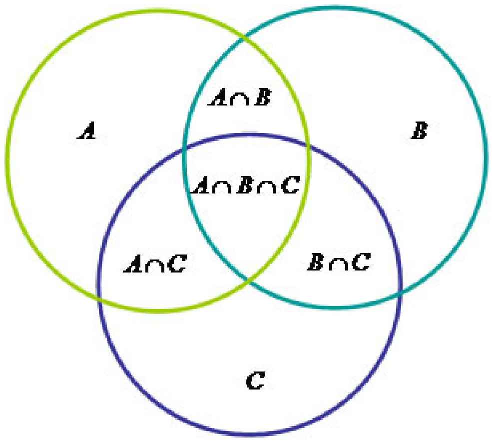


Figura 1.1: Diagrama de Venn-Euler associado aos conjuntos A, B e C.

12. **Questões das Provas RECs de 2018** [7]
Para quaisquer dos conjuntos A e B, mostre que:
(a) $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$.
(b) $\mathscr{P}(B)\supseteq\mathscr{P}(B\setminus A)\cap\mathscr{P}(A\cap B)$.

1.2 Diagramas de Venn-Euler

13. Com recurso ao diagrama de Venn-Euler da **Figura 1.1**, diga, justificando, qual das seguintes afirmações implica a igualdade de conjuntos $A=B$, independentemente da escolha do conjunto C.
(a) $A\cap C=B\cap C$.
(b) $A\cup C=B\cup C$.
(c) $A\setminus C=B\setminus C$.
14. Sejam[8] A, B e C três conjuntos finitos de cardinalidade $|A|$, $|B|$ e $|C|$, respetivamente.
(a) Recorra à representação em *diagrama de Venn-Euler* para deduzir seguintes as igualdades:

$$\begin{aligned} |A| &= |A\setminus B|+|A\cap B| \\ |B| &= |B\setminus A|+|A\cap B| \\ |A\cup B| &= |A|+|B|-|A\cap B|. \end{aligned}$$

(b) Para o exemplo ilustrado na **Figura 1.1**[9], verifique numericamente que as igualdades anteriores são satisfeitas.
(c) Recorra à representação em *diagrama de Venn-Euler* da **Figura 1.1** para deduzir uma fórmula geral para $|A\cap(B\cup C)|$ e $|A\cup B\cup C|$.
15. Seja $A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ a operação de diferença simétrica entre dois conjuntos A e B.
(a) Mostre que os conjuntos $A\,\Delta\,B$ e $A\cap B$ são disjuntos. Represente pictoricamente a disjunção entre estes dois conjuntos com recurso a *diagramas de Venn-Euler*.
(b) Mostre que os conjuntos $A\,\Delta\,B$ e $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ são iguais. Represente pictoricamente esta igualdade com recurso a *diagramas de Venn-Euler*.

[7] Vide `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Provas/BM/REC04Outubro2018.pdf` & `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Provas/BM/REC06Outubro2018.pdf`
[8] Este exercício corresponde ao **Exercício 16.** da **Lista L2 | Conjuntos Numéricos (2016)**.
[9] Figura criada com recurso ao arquivo GeoGebra `OperacoesEntreConjuntos.ggb`. Este encontra-se disponível em `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/FicheirosGeogebra.htm`.

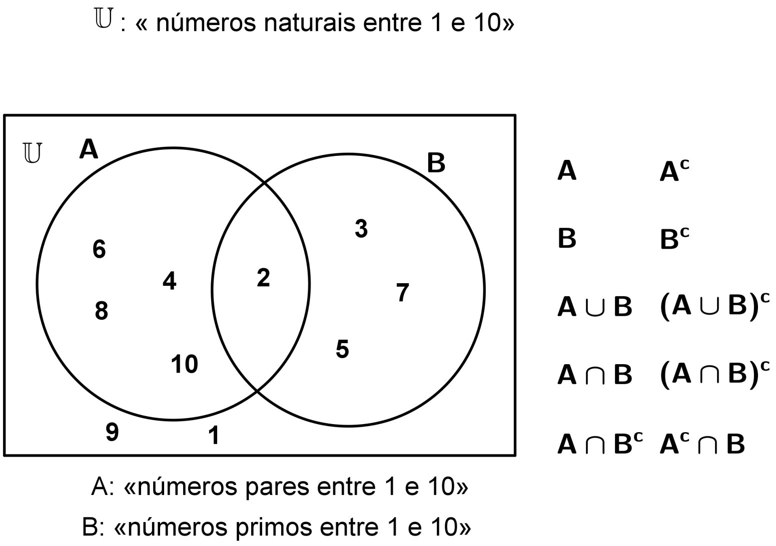


Figura 1.2: Diagrama de Venn-Euler associado aos subconjuntos A e B do conjunto universo $\mathbb{U}$.

16. Para o exemplo da **Figura 1.2**, decida qual/quais das seguintes inclusões/igualdades[10] é verdadeira:
    (a) $\mathscr{P}(A \,\Delta\, B) \subseteq \mathscr{P}(A \setminus B)$.
    (b) $\mathscr{P}(B \setminus A) \subseteq \mathscr{P}(A \,\Delta\, B)$.
    (c) $\mathscr{P}(A \setminus B) \cup \mathscr{P}(A \setminus B) = \mathscr{P}(A \,\Delta\, B)$.
17. Use o diagrama de Venn-Euler para representar os conjuntos abaixo:
    (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, 1 < x \leq 7\}$ & $B = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, -2\pi \leq x < 2\pi\}$.
    (b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, 1 < x \leq 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, -2\pi \leq x < 2\pi\}$ & $C = \{-1, 0, 2, 5\}$.
18. Represente num diagrama de Venn-Euler três conjuntos A, B e C para cada um dos seguintes casos:
    (a) $A \subseteq B, C \subseteq B, A \cap C = \emptyset$
    (b) $A \subseteq B, C \not\subseteq B, A \cap C \neq \emptyset$
    (c) $A \subseteq C, A \neq C, B \cap C = \emptyset$
    (d) $A \subseteq (B \cap C), B \subseteq C, C \neq B, A \neq C$
19. Considere novamente a operação *diferença simétrica entre dois conjuntos* (Δ) introduzida no **Exercício 15**.
    Determine o conjunto X tal que a igualdades abaixo são sempre satisfeitas:
    (a) $(A \,\Delta\, B) \cup X = (A \cup C) \,\Delta\, (B \setminus C)$.
    (b) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \setminus B) \,\Delta\, X$ [DICA DE RESOLUÇÃO EM RODAPÉ][11].
    (c) $A \setminus (B \,\Delta\, C) = X \,\Delta\, (A \cap B)$.
    DICA: Faça uso de *diagramas de Venn-Euler*. O diagrama[12] da figura 1.1, envolvendo três conjuntos A, B & C, poderá vir a ser útil[13] ao longo da resolução do exercício:

[10] $A \,\Delta\, B$ denota *diferença simétrica entre dois conjuntos* A e B discutida no **Exercício 15.**

[11] Comece por verificar com recurso aos diagramas de Venn-Euler que $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C)$. Observe ainda que apenas $A \cap B^c \cap C$ é subconjunto de $A \setminus B$.

[12] Retirado do site `http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com/2012/11/diagramas-questoes-resolvidas.html`.

[13] Também poderá vir a ser útil na resolução do item (c) do **Exercício 14**.

Alternativamente, poderá recorrer à tabela[14] de propriedades[15] abaixo (válidas para quaisquer conjuntos X, Y & Z):

PROPRIEDADE	UNIÃO	INTERSEÇÃO
COMUTATIVIDADE	$X \cup Y = Y \cup X$	$X \cap Y = Y \cap X$
ASSOCIATIVIDADE	$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$	$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
DISTRIBUTIVIDADE	$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
IDEMPOTÊNCIA	$X \cup X = X$	$X \cap X = X$
LEI DO COMPLEMENTO	$X \cup X^c = \mathbb{U}$ (conjunto universo)	$X \cap X^c = \emptyset$ (conjunto vazio)
LEIS DE MORGAN	$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$	$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$
ELEMENTO NEUTRO	$X \cup \emptyset = X$	$X \cap \mathbb{U} = X$
ELEMENTO ABSORVENTE	$X \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$ (conjunto universo)	$X \cap \emptyset = \emptyset$ (conjunto vazio)

20. Suponha que o conjunto universo $\mathbb{U}$ denota todas as possibilidades de linhas do *metrô de São Paulo & CPTM*[16].
    (a) Diga, por palavras suas, o que representa o conjunto das partes $\mathscr{P}(\mathbb{U})$.
    (b) Para o caso de $V \in \mathscr{P}(\mathbb{U})$ denotar o conjunto de todas as estações de metrô da linha verde, e $A \in \mathscr{P}(\mathbb{U})$ denotar o conjunto de todas as estações da linha azul, determine os conjuntos $A \cap V$, $A \setminus V$ e $V \setminus A$.
21. Faça uso do que aprendeu até agora sobre teoria de conjuntos para verificar se os dados mencionados na afirmação abaixo estão corretos:

    "*Os seguintes dados foram obtidos em uma pesquisa feita com* 1000 *entrevistados:* 312 *profissionais liberais,* 470 *pessoas casadas,* 525 *pessoas com superior completo,* 42 *profissionais liberais com superior completo,* 147 *pessoas casadas com superior completo,* 86 *profissionais liberais casados e* 25 *profissionais liberais casados com curso superior completo.*"

1.3 Produto Cartesiano de Conjuntos

22. Determine o produto cartesiano $A \times B$ entre os seguintes conjuntos A e B:
    (a) $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{2, 3\}$.
    (b) $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ \pi < x < 2\pi\}$.
    (c) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 3x = 0\} \cup \{2, 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ \pi < x < 2\pi\} \cap \{4, 5, 6\}$.
23. Tendo como referência as linhas amarela e lilás do mapa de *metrô de São Paulo*, forme o conjunto $E \times L$, onde E é o nome da estação de metrô e L o número da linha.
24. Considere como conjunto universo $\mathbb{U}$ todos os números naturais de 1 a 15. Se $A \subseteq \mathbb{U}$ denotar o subconjunto dos números primos menores que 7, e B denotar conjunto de todos os múltiplos de 3:
    (a) Determine os conjuntos $A \times B$ e $\mathscr{P}(A \times B)$.
    (b) Determine os conjuntos $B \times A$ e $\mathscr{P}(B \times A)$.
    (c) Diga, justificando, se as igualdades $A \times B = B \times A$ e $\mathscr{P}(A \times B) = \mathscr{P}(B \times A)$ são verdadeiras.

[14] Com base nas propriedades de ASSOCIATIVIDADE, DISTRIBUTIVIDADE & nas LEIS DE MORGAN (que constam na tabela) resulta que as igualdades $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$ & $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$ são sempre satisfeitas, para quaisquer conjuntos X, Y & Z. Combinando estas duas últimas propriedades, obtemos que $(A \setminus B) \, \Delta \, X = (A \setminus B) \setminus X \cup X \setminus (A \setminus B)$

[15] Como exercício, procure resolver novamente o item (e) do **Exercício 9** com base nas propriedades listadas na tabela.

[16] **Mapa de metrô consultado:** `http://minutoligado.com.br/wp-content/uploads/2012/10/metro-sp-mapa-metro-sp.jpg`

25. Para dois conjuntos A e B, mostre[17] que $A \times B = B \times A$ se e só se[18] $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$.
26. Mostre que para os conjuntos A, B, C e D não vazios[19], valem as seguintes propriedades[20]:
    (a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
    (b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
    (c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
    (d) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
27. Dê um exemplo de conjuntos A, B, C & D para os quais $(A \cup C) \times (B \cup D) \neq (A \times B) \cup (C \times D)$.
28. **QUESTÃO DA PROVA P1 DE 2016 (TURMA A2-NOTURNO, VERSÃO A)** [21]
    A tabela abaixo representa a compatibilidade doador-receptor para o plasma sanguíneo. As linhas da tabela representam o grupo sanguíneo do doador, as colunas o grupo sanguíneo do receptor e a marca ✓ assinalada na tabela indica que existe compatibilidade entre o doador e o receptor.

	O	A	B	AB
O	✓	✓	✓	✓
A		✓		✓
B			✓	✓
AB				✓

    Considere $U = \{O, A, B, AB\} \times \{O, A, B, AB\}$ como sendo o conjunto universo e o elemento de $(D, R) \in U$
    como sendo um par ordenado doador/receptor.
    (a) Determine, com base na tabela, o subconjunto $S \subseteq U$ que representa todos os casos em que não há compatibilidade entre doador e receptor.
    (b) Determine o subconjunto $T \subseteq U$ de todos os receptores do grupo sanguíneo A (independentemente de haver ou não compatibilidade).
    (c) Determine as seguintes operações entre os conjuntos S e T determinados nos itens anteriores: $S \cap T$ e $S^c \cup T^c$.
    DICA: O item (c) do **Exercício 9** poderá vir a ser útil em algum momento.
29. O atendente de um centro médico faz a triagem dos pacientes que chegam ao pronto-socorro de acordo com terem ou não um plano de saude (codificando 1 para aqueles que tem convênio e 0 para aqueles que não têm) e de acordo com sua condicão física: (b) para boa, (r) para regular e (s) para séria.
    Considere o conjunto universo $\mathbb{U}$ como o conjunto que coleciona todas as caraterísticas dos pacientes que chegam ao pronto-socorro de acordo com o procedimento de triagem descrito.
    (a) Determine o *conjunto das partes* $\mathscr{P}(\mathbb{U})$.
    (b) Se A denotar o conjunto que coleciona os casos em que paciente está em sérias condições, especifique quais são os elementos de A.

[17] Por definição de conjunto vazio, é óbvio que $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ (se $B = \emptyset$) e $\emptyset \times B = B \times \emptyset = \emptyset$ (se $A = \emptyset$). Por outro lado, também é óbvio que $A \times B = B \times A$ se $A = B$, donde se conclui que a implicação " $\Leftarrow$ " é imediata.

[18] Para provarmos a implicação " $\Rightarrow$ ", observe que a hipótese $A \times B = B \times A$ nos permite escrever qualquer elemento (x, y) do conjunto $A \times B$ como $(x, y) = (b, a)$, para algum $a \in A$ & $b \in B$. Usando agora a definição de par ordenado, concluímos que $x = b$ & $y = a$, donde $(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B)$. Ou seja, a hipótese $A \times B = B \times A$ implica as seguintes inclusões entre conjuntos: $A \subseteq A \cap B$ & $B \subseteq A \cap B$. Estas duas últimas inclusões apenas são verdadeiras no caso de $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$. Esta última igualdade ($A = B$) resulta do fato das inclusões de conjuntos $A \cap B \subseteq A$ & $A \cap B \subseteq B$ serem sempre verdadeiras, por definição (i.e. $A \subseteq A \cap B \subseteq B$ & $B \subseteq A \cap B \subseteq \Rightarrow A \subseteq B$ & $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$).

[19] Como poderá facilmente verificar, as igualdades de conjuntos são sempre satisfeitas para o caso de pelo menos um dos conjuntos A, B, C ou D ser vazio.

[20] Para o caso do item (d) do **Exercício 26**, observe que $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$ significa que $(x, y) = (a, b)$ $(a \in A$ & $b \in B)$ ou $(x, y) = (c, d)$ $(c \in C$ & $d \in D)$. Usando agora a definição de par ordenado, podemos concluir que $x \in A \cup C$ (por termos $x = a$ ou $x = c$) e $y \in B \cup D$ (por termos $y = b$ ou $y = d$), donde $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

[21] URL: http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Provas/BM/P1_TurmaA2_VersaoA.pdf

(c) Se B denotar o conjunto que coleciona os casos em que paciente não tem convênio, especifique quais são os elementos de B.
(d) Determine as seguintes operações entre conjuntos: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap B^c$ & $A \cup B^c$.
(e) Com base nas *leis de Morgan*, determine as seguintes operações entre conjuntos: $A^c \cap B$ & $A^c \cup B$.

1.4 Imagem e Pré-Imagem de uma Função

30. Diga, justificando, se os exemplos abaixo nos permitem definir uma função:
    (a) P o conjunto das prefeituras do Brasil, E o conjunto dos governos estaduais do Brasil e $L = \{(p,e) \in P \times E\ :\ \text{a prefeitura } p \text{ dependente financeiramente do governo estadual } e\}$.
    (b) F o conjunto de todas as pessoas da sua família de 1^o grau (incluíndo você) e $P = \{(f,c) \in F \times \mathscr{P}(F)\ :\ c \text{ é o conjunto de todos os filhos da pessoa } f\}$.
    (c) S é o conjunto de todos os carros registrados no Estado de SP, P o conjunto de todas as placas de identificação (incluíndo letras e dígitos) e
$$L = \{(s,p) \in S \times P\ :\ \text{a placa de identificação do carro } s \text{ é dada por } p\}.$$
31. Para os conjuntos[22] $A = \{g,r,u\}$ e $B = \{v,i,x\}$, diga justificando se podemos definir um função $f : A \to B$ partir dos seguintes subconjuntos de $A \times B$. Em caso afirmativo, determine todas as possibilidades para conjunto imagem $f(X)$ ($X \in \mathscr{P}(A)$) e conjunto pré-imagem $f^{-1}(Y)$ ($Y \in \mathscr{P}(B)$).
    (a) $G = \{(g,i),(r,v),(u,i)\}$.
    (b) $H = \{(g,i),(r,v),(g,x)\}$.
32. Para $A = \{1,2,3\}$, considere as função $f : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ definida pela expressão $f(X) = A \setminus X$.
    (a) Determine os valores de $f(\{1\})$ e de $f(\{2,3\})$
    (b) Determine os valores de $f(\{1\}) \cap \{1,3\}$ e de $f(\{2,3\}) \cup \{2\}$.
    (c) Determine todos os subconjuntos Y e Z de A que satisfazem as seguintes igualdades:
$$f(\{1\}) \cap Y = Y\ \&\ f(\{2,3\}) \cup Z = f(\{2,3\}).$$
    (d) Determine as pré-imagens $f^{-1}(\{1\})$ e $f^{-1}(\{2,3\})$.
    (e) Determine todos os subconjuntos Y e Z de A que satisfazem as seguintes propriedades
$$f^{-1}(Y) \subseteq \{2,3\}\ \&\ \{1\} \subseteq f^{-1}(Z).$$

[22] Reformulação do exercício **12.** da **Lista L1 | Teoria de Conjuntos e Funções**.

33. Dados dois números naturais p e q, a expressão $\mod(p,q)$ denota o resto da divisão de p por q.
    (a) Diga por palavras suas o que representa o *conjunto pré-imagem*[23] $f^{-1}(\{0\})$, para o caso de f ser uma função definida pontualmente por $f(p) = \mod(p,q)$ (p é variável, e q um número escolhido).
    (b) Para o caso de $f : \mathbb{N} \to R$ ser definida pontualmente por $f(p) = \mod(p,5)$, determine o conjunto[24] R.
    (c) Considere agora o conjunto R determinado no item anterior. Dê um exemplo um subconjunto finito A de $\mathbb{N}$, e de uma função $g : A \to R$ que verifique a seguinte condição:
    $$f(p) = g(p) \text{ para todo o } p \in A.$$
    (d) Diga, justificando, se as funções f e g consideradas nos dois items anteriores são iguais[25].
34. Sabendo que o conjunto $F = \{(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \ : \ n \leq x < n+1\}$, define uma função[26] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$:
    (a) Determine[27] o valor de f nos pontos $x = -0.4$, $x = -0.5$, $x = 1.1$, $x = 2$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = e$ (e denota o número de Neper).
    (b) Calcule os conjuntos pré-imagem $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{0,1\})$ e $f^{-1}(\{0,2\})$.
    (c) Determine, caso exista, um subconjunto $A \times \mathbb{Z}$ de F para o qual se pode definir uma função $g : A \to \mathbb{Z}$ com a propriedade $g(A) = A$.
    (d) Dê um exemplo um subconjunto $\mathbb{R} \times B$ de F para o qual se pode definir uma função $g : \mathbb{R} \to B$ que satisfaça a propriedade $g^{-1}(B) \subseteq B$.

1.5 Composição de Funções

35. Seja P o conjunto de todas as prefeituras do Brasil, E o conjunto dos governos estaduais do Brasil e $f : P \to E$ uma função que a cada prefeitura do Brasil associa o estado a que este pertence. Supondo que B é o conjunto de todos os nomes de prefeitos do Brasil, represente esquematicamente, com recurso a um diagrama sagital (ou de setas), as seguintes funções:
    (a) Uma função g como sendo a função que associa a cada prefeito a prefeitura a que preside.
    (b) Uma função h como sendo a função que associa a cada prefeito ao estado a que pertence.
36. Para as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas pontualmente por $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e $g(x) = x - 1$:
    (a) Determine as expressões analíticas, dadas pelas regras de composição $(fog)(x) = f(g(x))$ e $(gof)(x) = g(f(x))$.
    (b) Diga, justificando, se $fog : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definem funções.
37. Para as funções $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definidas pontualmente por $g(x) = 2x - 3$ e $f(n) = n^2 - 4n + 1$.
    (a) Determine a composição $gof : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.
    (b) Determine o conjunto pré-imagem $(gof)^{-1}(\{-1\}) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ (gof)(n) = -1\}$.
    (c) Dê um exemplo de $k \in \mathbb{Z}$ para o qual se verifica a igualdade[28] $(gof)^{-1}(\{k\}) = \emptyset$.

[23] Por definição, $f^{-1}(\{0\}) = \{p \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{mod}(p,q) = 0\}$.
[24] R é o conjunto de todos os possíveis restos da divisão de p por 5. Para obter esta resposta, aplique o *algoritmo de Euclides* (para a divisão).
[25] Para verificar no item (d) do **Exercício 33** as funções f e g, tem de verificar se os domínios são iguais e se estas verificam a equação $f(p) = g(p)$ para todos os pontos do domínio.
[26] Esta função é conhecida na literatura por *função de truncamento*. Em particular, $n = \lfloor x \rfloor$ (truncamento de $x \in \mathbb{R}$) dá-nos o maior inteiro não superior a x.
[27] Pode verificar a solução do seu problema com recurso ao comando `floor( <x> )` do GeoGebra – `https://www.geogebra.org/graphing`.
[28] Essencialmente, consiste em dar um exemplo para o qual a equação quadrática não admite raízes reais ou as raízes

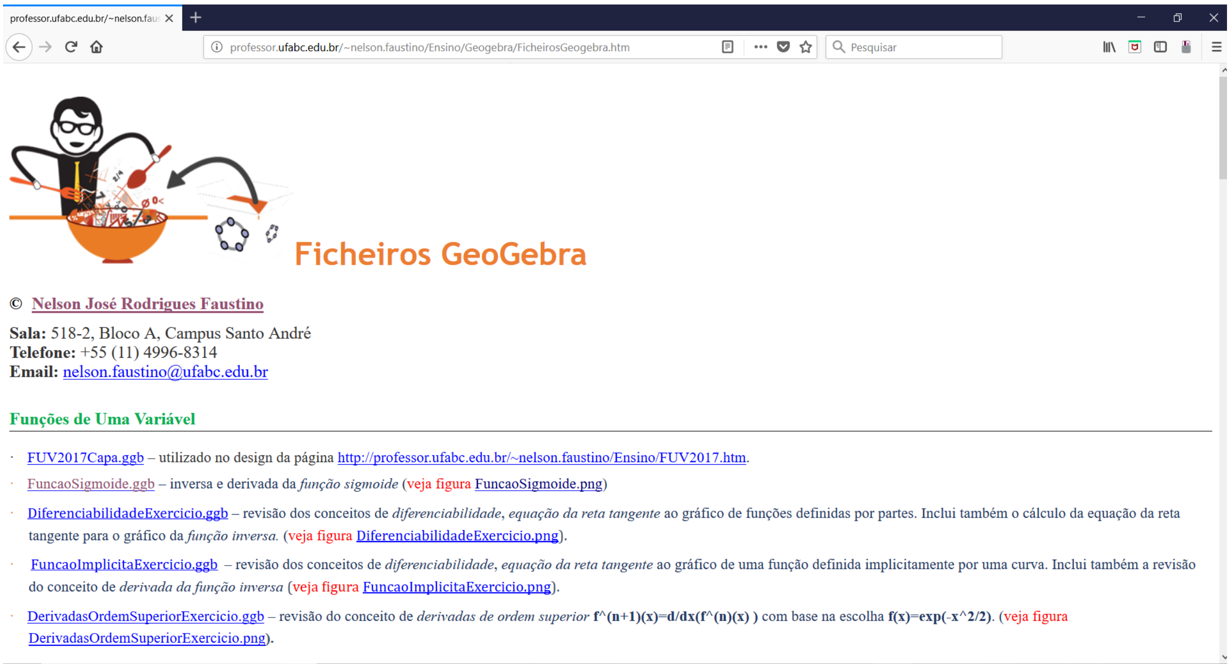
1.6 Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

38. Diga, justificando, se as expressões matemáticas $\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ e $\frac{x}{x+2}$ definem a mesma função $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$.
39. A *função sinal* é uma função real de variável real, denotada por $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$, que a cada número real faz corresponder os valores -1 (se $x<0$), 0 (se $x=0$) e 1 (se $x>0$).
    No caso de considerarmos um subconjunto M de $\mathbb{R}$ com m elementos:
    (a) Dê um exemplo de um conjunto M para o qual a função $\operatorname{sgn}: M\to\{-1,0,1\}$ é injetiva.
    (b) Dê um exemplo de um conjunto M para o qual $\operatorname{sgn}: M\to\{-1,0,1\}$ não é injetiva.
    (c) Diga, justificando, se $\operatorname{sgn}: M\to\{-1,0,1\}$ é sempre uma função sobrejetiva.
    (d) Dê um exemplo de conjunto $M\neq\{-1,0,1\}$ para o qual $sgn: M\to\{-1,0,1\}$ é uma função bijetiva.
40. Demonstre as seguintes propriedades de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas:
    (a) Uma função $f: X\to Y$ é injetiva se e só se existe uma função $g: Y\to X$ tal que $gof: X\to X$ é igual à função identidade em X
    (i.e. $g(f(x))=x$, para todo o $x\in X$).
    (b) Uma função $f: X\to Y$ é sobrejetiva se e só se existe uma função $g: Y\to X$ tal que $fog: Y\to Y$ é igual à função identidade em Y
    (i.e. $f(g(y))=y$, para todo o $y\in Y$).
    (c) Uma função $f: X\to Y$ admite inversa $f^{-1}: Y\to X$ se e só se $f: X\to Y$ for uma função bijetiva (i.e. injetiva e sobrejetiva).
41. Considere a função $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ definida pontualmente por $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.
    (a) Determine fog, onde $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ é a função definida por $g(x)=\dfrac{1}{x}$. O que pode concluir quanto a fog?
    (b) Determine fof. O que pode concluir quanto a f?
42. Seja[29] A um conjunto não vazio, e $\mathscr{P}(A)$ o conjunto das partes de A.
    (a) Mostre que a função $f:\mathscr{P}(A)\to\mathscr{P}(A)$ definida por $f(X)=A\cap X$ é a função identidade.
    (b) Para a função $g:\mathscr{P}(A)\to\mathscr{P}(A)$ definida por $g(X)=A\setminus X$, calcule gog. O que pode concluir quanto à inversa de g?

desta (no caso de existirem) não são números inteiros.

[29] Este exercício corresponde essencialmente ao item **2. e)** da **PROVA P1 (2016) DAS TURMAS D-DIURNO E A2-NOTURNO.**

1.7 Representação Gráfica usando o GeoGebra

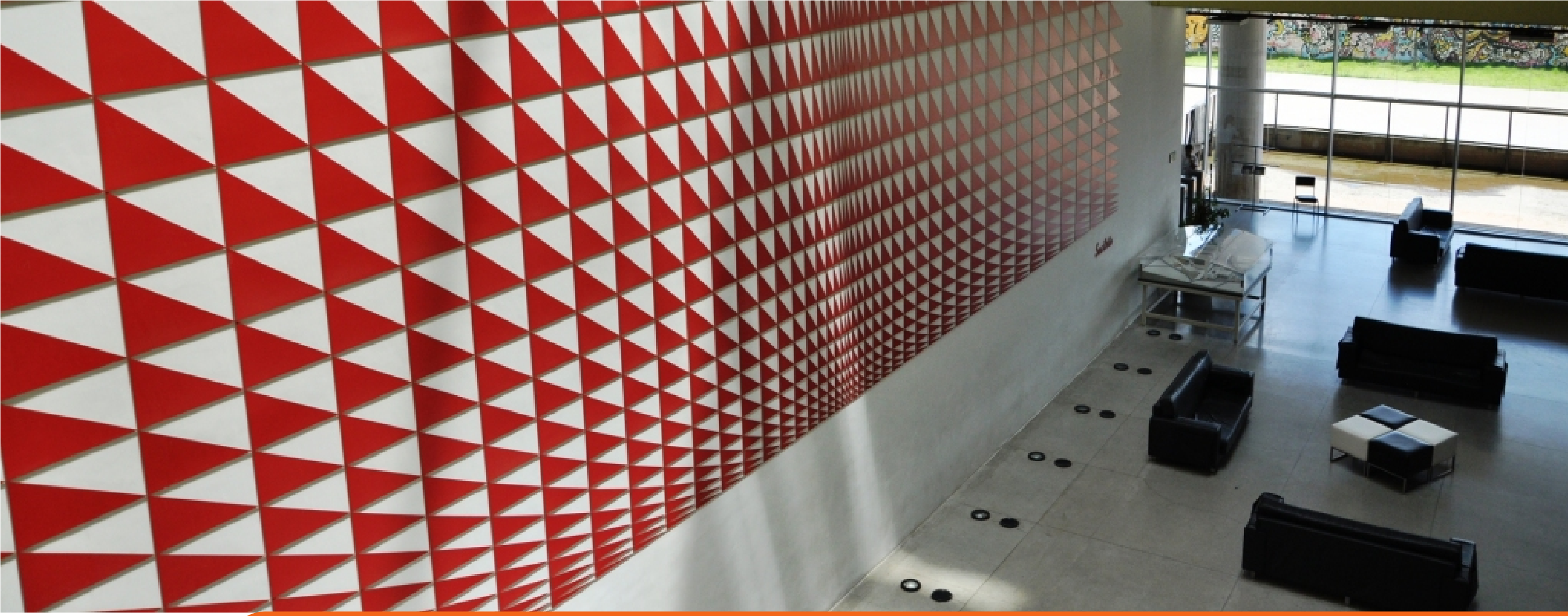


43. Use os comandos $\wedge$ (e) para representar no GeoGebra o produto cartesiano dos conjuntos abaixo:
    (a) $A\times B$, sendo $A=\{x\in\mathbb{R}\ :\ 1<x\leq 3\}$ & $B=\{x\in\mathbb{R}\ :\ 2\leq x<5\}$.
    (b) $C\times D$, sendo $C=\{x\in\mathbb{R}\ :\ -2<x<-2\}$ & $D=\{x\in\mathbb{R}\ :\ -3\leq x\leq 3\}$.
44. Represente no GeoGebra[30] os produtos cartesianos $A\times B$ e $B\times A$, para o caso de:
    (a) $A=\{x\in\mathbb{R}\ :\ 1\leq x\leq 3\}$ & $B=\{x\in\mathbb{R}\ :\ 2\leq x\leq 5\}$.
    (b) $A=\{x\in\mathbb{R}\ :\ -2\leq x\leq -2\}$ & $B=\{x\in\mathbb{R}\ :\ -3\leq x\leq 3\}$.
45. Use os comandos $\wedge$ (e) e $\vee$ (ou) para determinar as seguintes operações[31] entres os conjuntos A,B,C e D definidos no **Exercício 43**:
    (a) $(A\times B)\cap(C\times D)$.
    (b) $(A\times B)\cup(C\times D)$.
    (c) $(A\cup C)\times(B\cup D)$.
    (d) $(A\cap C)\times(B\cap D)$.
46. Represente no GeoGebra a interseção dos conjuntos $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x-y\leq 4\}$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x+y>2\}$ e $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y<3\}$.

[30] **URL:** `https://www.geogebra.org/graphing`
[31] Este exercício serve, em particular, para revisar o **Exercício 26**.

47. Use o *teste da reta vertical*[32] para mostrar graficamente que os conjuntos abaixo não definem funções:
    (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - y^2 = 3\}$.
    (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 4\}$.
    (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - 3xy + y^3 = 0\}$.
    (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2\}$.
48. Encontre subconjuntos S dos conjuntos dados no **Exercício 47** para os quais S já define uma função.
    DICA: Graficamente, estes conjuntos apenas podem intersetar reta vertical `x=c` em um e um só ponto.

[32] Em GeoGebra, o teste da reta vertical pode ser realizado do seguinte modo: **(i)** Definir o parâmetro constante (p.e. digite `c=1` no GeoGebra); **(ii)** Representar cada um dos conjuntos acima (escrevendo normalmente, como faz no seu caderno); **(iii)** Utilizar o comando `Interseção( <Objeto>, <Objeto> )` para calcular a interseção de cada uma das equações que definem o conjunto com a reta vertical `x=c` (p.e. `Interseção`$(x^2 - 3xy + y^3 = 0, x = c)$ nos devolve como resultado três pontos no caso de escolhermos `c=1`).



2. Conjuntos Numéricos

O que há de novo?

Este capítulo corresponde a uma reformulação da **Lista L2 | Conjuntos Numéricos (2016)**.

- **08 DE JUNHO DE 2018**
  - Foi adicionado um novo exercício: **71.**
  - Foram excluídos os exercícios **8.**, **11.** & **13.** da **Lista L2 | Conjuntos Numéricos (2016)**. Este último transitou para o **Capítulo 1** (veja **exercício 39**).
  - Foram adicionadas questões que já sairam em prova. Estas foram devidamente identificadas ao longo deste capítulo.
- **18 DE JUNHO DE 2018**
  - Foi adicionado um novo exercício: **45.**
- **24 DE JUNHO DE 2018**
  - Houve uma permuta de ordem entre os exercícios da seção 2.3 (antiga seção 2.2) & da seção 2.2 (antiga seção 2.3). Houve também uma reformulação dos nomes: seção **Método de Indução Matemática** passou a chamar-se **Primeiro Princípio de Indução Matemática**; seção **Boa Ordenação vs. Segundo Princípio de Indução** passou a chamar-se **Segundo Princípio de Indução vs. Recursão**.
  - **Exercício 76** transitou para a seção **2.4 Aplicações do Princípio de Indução Matemática**.
  - Foram adicionados doze novos exercícios: **50, 53, 54, 56, 60, 63, 64, 65, 66, 67, 70 & 74**. Este último corresponde a uma aplicação prática do *Princípio da Casa dos Pombos* formulado no **Exercício 73.**
  - Foram adicionados os itens (c) e (d) ao **Exercício 55** como forma de consolidar os conceitos de *Imagem* e de *Pré-Imagem* de uma função.
  - Foi excluído o exercício **4.** da **Lista L2 | Conjuntos Numéricos (2016)**.
  - Foram excluídos os itens (a) e (b) do **Exercício 58**, o item (c) do **Exercício 73** (*Princípio da Casa dos Pombos*) & o item (c) do **Exercício 76** (*conjunto das partes*).
  - Foram reformulados o item (c) do **Exercício 61** (*Princípio da Boa Ordenação*), **Exercício 73**, & item (b) do **Exercício 75** (*Árvore genealógica de um zangão*).

- **03 DE JULHO DE 2018**
  - Foram inseridas várias notas de rodapé, em comentário aos exercícios.
  - Adicionados dois novos exercícios no final da seção **2.4 Aplicações do Princípio de Indução Matemática Exercício 77** (*duplo fatorial*) & **Exercício 78** (*números harmônicos*).
  - Adicionado item (c) ao **Exercício 45**.
  - Foi corrigido o **Exercício 60** (contradomínio de f é $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e não $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, como na anterior versão) & **Exercício 65** ($n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ao invés de $n\in\mathbb{N}$).
- **11 DE JULHO DE 2018**
  - Foi corrigido os item (c) iii. do **Exercício 66** ($n\geq k+1$ ao invés de $n\geq k$).

2.1 Números Naturais e Inteiros

42. Para quaisquer dois números m e n, suponha que a igualdade $n^2-m^2=n+m$ é verdadeira.
    (a) Mostre que se m e n são números naturais[1], então $n=m+1$.
    (b) Nas condições do enunciado, encontre um exemplo de dois números inteiros m e n para os quais a igualdade $n=m+1$ não se verifica.
43. Encontre o erro na seguinte demonstração:
    "Suponhamos que m é um número par e n um número ímpar. Então existe um número natural k tal que $m=2k$ *e* $n=2k+1$, *donde se conclui que*

$$n^2-m^2=(n-m)(n+m)=((2k+1)-2k)((2k+1)+2k)=n+m.\text{”}$$

44. Verifique se os seguintes conjuntos numéricos são iguais:

$$\{n+4\ :\ n\in\mathbb{N}\text{ e }0<n<5\}\text{ e }\{9-n\ :\ n\in\mathbb{N}\text{ e }1<n\leq 4\}.$$

45. Para os conjuntos numéricos $A=\{\ n^2+n-1\ :\ n\in\mathbb{N}\}$ e $B=\{2n-1\ :\ n\in\mathbb{N}\}$:
    (a) Mostre[2] que $A\subseteq B$.
    (b) Mostre[3] que $B\not\subseteq A$.
    DICA: Encontre um elemento $b\in B\setminus A$.
    (c) Diga, justificando se a função $f:\mathbb{N}\to B$ definida pontualmente por $f(n)=n^2+n-1$ é uma função sobrejetiva.
46. Dados dois números naturais p e q, mostre que existe um número natural m tal que $mp>q$.
47. Para todo o subsconjunto $B\subseteq\mathbb{N}$, considere a função $s:\mathbb{N}\to B$ (*função sucessor*), definida por $s(n)=n+1$.
    (a) Mostre que no caso de $B=\mathbb{N}$, a função $s:\mathbb{N}\to B$ é injetiva mas não é sobrejetiva.
    (b) Mostre que no caso de $B=\mathbb{N}\setminus\{1\}$, a função $s:\mathbb{N}\to B$ já é bijetiva.
48. Um elemento $p\in\mathbb{N}$ chama-se *antecessor* de $q\in\mathbb{N}$, quando se tem $p<q$ mas não existe $r\in\mathbb{N}$ tal que $p<r<q$.
    (a) Prove que, exceto 1, todo o número natural tem um *antecessor*.
    (b) Para todo o $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, defina a função *antecessor* $a:A\to B$, indicando qual o conjunto domínio A, e o conjunto contradomínio B.
    (c) Prove que a função $a:A\to B$ determinada no item anterior é bijetiva[4].

---

[1]Caso nada seja dito em contrário, convencionamos o conjunto todos os número naturais (conjunto $\mathbb{N}$) coincide com o conjunto dos inteiros positivos.

[2]No item (a) **Exercício 45**: Provar que $A\subseteq B$ consiste essencialmente em provar que todo o elemento n^2+n-1 é um número ímpar, ou equivalentemente, que n^2+n é um número par.

[3]No item (a) **Exercício 45**: Para provar que $B\not\subseteq A$ basta encontrar um número m que seja ímpar ($m=2k-1$) para o qual a igualdade $n^2+n-1=m$ não é satisfeita.

[4]Reveja o Exercício 20. da **Lista L1 | Teoria dos Conjuntos e Funções**.

Dica: Mostre que a *função sucessor* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ definida no exercício 47 é sua a função inversa de $a : A \to B$.

49. Diga, justificando, se as funções abaixo são bijetivas.
   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida for $f(n) = n+2$.
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida for $f(n) = n+2$.
   (c) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida for $g(n) = \sqrt{n^2}$.
   (d) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida for $g(n) = \sqrt{n^2}$.
   (e) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida for $h(n) = 2n$ (se $n > 0$) e $h(n) = 1-2n$ (se $n \leq 0$).
   (f) $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida for $h(n) = 2n$ (se $n > 0$) e $h(n) = \frac{n}{2}$ (se $n \leq 0$).

2.2 Primeiro Princípio de Indução Matemática

50. Mostre que a igualdade[5]

$$1+8+27+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

é verdadeira[6] para todo o $n \in \mathbb{N}$.

51. **Questão da Prova P1 de 2017 (Turma A-Diurno)**
Mostre que a igualdade

$$2.2!+\ldots+n.n! = (n+1)!-2$$

é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

52. **Questão da Prova Supletiva de 2017 (Turmas D-Diurno & A2-Noturno)**
Use o *Primeiro Princípio de Indução Matemática* para mostrar que a igualdade

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

53. Encontre o erro no seguinte trecho de demonstração pelo *Primeiro Princípio de Indução Matemática*:
"Queremos demonstrar que a igualdade

$$1.3^0+3.3^1+5.3^2+\ldots+(2n+1)3^n = n3^{n+1}$$

é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assumindo que esta é verdadeira para $n = k$, obtemos que

$$\begin{aligned} 1.3^0+3.3^1+5.3^2+\ldots+(2k+1)3^k+(2k+3)3^{k+1} &= k3^{k+1}+(2k+3)3^{k+1} \\ &= (3k+3)3^{k+1} \\ &= 3(k+1)3^{k+1} \\ &= (k+1)3^{k+2}, \end{aligned}$$

provando assim que a igualdade acima também é verdadeira para $n = k+1$."

54. Mostre para todo o $n \in \mathbb{N}$, o número natural $4^{n+1}+24n-4$ é divisível por 36.

55. Faça uso do que aprendeu no tópico da ementa **Conjuntos e Funções** para demonstrar as seguintes propriedades pelo *Primeiro Princípio de Indução Matemática*:

[5] Esta igualdade é conhecida na literatura por *Teorema de Nichomachus*. Para mais detalhes, veja o link `http://mathworld.wolfram.com/NicomachussTheorem.html`.

[6] Para obter a equivalência com a formulação do *Teorema de Nichomachus*, comece por provar que

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(a) Para quaisquer n conjuntos da forma $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$), vale a seguinte generalização das *leis de Morgan*:
$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c &= A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c \\ (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c &= A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c.\end{aligned}$$
(b) Para quaisquer $n+1$ conjuntos da forma $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, vale a seguinte generalização das *leis de distributividade*:
$$\begin{aligned}B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) &= (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \ldots (B \cup A_n) \\ B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n).\end{aligned}$$
(c) Se $f : X \to Y$ é uma função, então para para os n subconjuntos de X, da forma $A_1, A_2, \ldots, A_n$, valem as seguintes propriedades[7]
$$\begin{aligned}f(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= f(A_1) \cup f(A_2) \cup \ldots \cup f(A_n) \\ f(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &\subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \cap \ldots \cap f(A_n).\end{aligned}$$
(d) Se $f : X \to Y$ é uma função, então para para os n subconjuntos de Y, da forma $B_1, B_2, \ldots, B_n$, valem as seguintes propriedades[8]:
$$\begin{aligned}f^{-1}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(B_n) \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(B_n).\end{aligned}$$

56. Sejam M e N dois conjuntos finitos com m e n elementos respetivamente.
    (a) Use o *Primeiro Princípio de Indução Matemática* para mostrar[9] que $M \times N$ e $N \times M$ têm mn elementos.
    DICA: Faça indução apenas sobre o número de elementos de um dos conjuntos.
    (b) Mostre que se o número de elementos de $M \times N$ é um número primo, então pelo menos um dos conjuntos tem um único elemento.
57. Para uma família de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *disjuntos dois a dois*[10], contidos num subconjunto M de m elementos:
    (a) Diga, justificando, porque a igualdade $|(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c| = m$ é sempre satisfeita.
    DICA: Use o **Exercício 55**.
    (b) Use o *princípio de indução matemática*[11] para demonstrar a seguinte igualdade[12]:
    $$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_j|.$$
    (c) Nas condições do enunciado do problema, use o *princípio de indução matemática* para determinar, para todo o $B \in \mathscr{P}(M)$, uma fórmula geral para $|B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n)|$.
    DICA: Use novamente o **Exercício 55**.
58. Mostre que para todo o $x > 1$, a desigualdade[13] $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^n > 1 - \frac{n}{x}$ é verdadeira para todo o

---

[7]Para provar que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ (caso base), observe que $y \in f(A_1 \cup A_2)$ é equivalente a termos $y = f(x)$, com $x \in A_1 \cup A_2$ (isto é, $x \in A_1$ ou $x \in A_2$) que por sua vez é equivalente a termos $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Por sua vez, a inclusão $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ (um outro caso base do item (c) do **Exercício 55**) é uma consequência imediata do fato de de $A_1 \cap A_2$ ser um subconjunto de A_1 e de A_2. Como exercício: Dê um exemplo de uma função $f : X \to Y$, e de dois conjuntos A_1 e A_2 para os quais $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

[8]Para provar que $f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$ (caso base) comece por observar que $x \in f^{-1}(A_1 \cup A_2)$ é equivalente a termos $f(x) \in A_1 \cup A_2$. Por sua vez, decorre da definição de *união de dois conjuntos conjuntos* que $f(x) \in A_1 \cup A_2$ é equivalente a termos $x \in f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$. De modo análogo, usando a definião de *conjunto pré-imagem* & de *interseção de dois conjuntos* é possível provar de modo análogo que $x \in f^{-1}(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$ (verifique este fato como exercício).

[9]Como teve a oportunidade de demonstrar no **Exercício 25**, a igualdade $M \times N = N \times M$ apenas quando pelo menos um dos conjuntos é vazio, ou se os dois conjuntos são iguais. O que pretendemos provar no item (a) do **Exercício 56** é que a igualdade $|M \times N| = |N \times M|$ (caso finito) se verifica sempre, mesmo que a igualdade $M \times N = N \times M$ não seja satisfeita.

[10]Dizemos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos dois a dois se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos os $i \neq j$.

[11]Também conhecido na literatura por *Princípio de Indução Finita (PIF)*.

[12]Esta igualdade designa-se por *princípio aditivo da combinatória*.

[13]A desigualdade do **Exercício 58** é uma adaptação da *desigualdade de Bernoulli*. Para mais detalhes veja p.e. o link

$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

2.3 Segundo Princípio de Indução vs. Recursão

59. Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $s(n) = n+1$.
    (a) Calcule as seguintes funções compostas: $sos : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $sosos : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $sososos : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
    (b) Use o *princípio de indução matemática* para determinar, para todo o m natural, uma fórmula geral para calcular a função composta s^m:
    $$s^m(n) := \underbrace{(soso\dots os)}_{m \text{ vezes}}(n).$$
60. Para a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definida pontualmente por $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, prove que para todo o n par[14], a função composta f^n definida por:
    $$f^n(x) := \underbrace{(fofo\dots of)}_{n \text{ vezes}}(x).$$
    é sempre igual à *função identidade*[15] (ou seja, que a equação $f^n(x) = x$ é sempre satisfeita, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$).
61. O *Princípio da Boa Ordenação*[16] diz-nos o seguinte:

    "Todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um elemento mínimo."

    (a) Use o *Princípio da Boa Ordenação* para demonstrar o *Segundo Princípio de Indução*: *"Se para todo o $n \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{N}$ contém todos os naturais m tal que a implicação $m < n \Rightarrow n \in S$ é verdadeira, então $S = \mathbb{N}$."*
    DICA: Mostre por redução ao absurdo que $\mathbb{N} \setminus S = \emptyset$.
    (b) Adaptação de **QUESTÃO DA PROVA REC DE 2016 (TURMA A2-NOTURNO)**[17]
    Mostre que os conjuntos $S = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \cos(n\pi) = (-1)^n\}$ & $\mathbb{N}$ são iguais[18].
    DICA: Use o item anterior.
62. De acordo com a *axiomática de Peano*, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pode ser construído indutivamente, com base nos axiomas **A1**,**A2** e **A3**:
    A1: Se n é um número natural, então o *sucessor de n*, definido por $s : n \mapsto n+1$, também é um número natural.
    A2: O conjunto $\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$ tem um único elemento, i.e. existe um único número natural n_1 que não é sucessor de nenhum outro.
    A3: Se $M \subseteq \mathbb{N}$ é um conjunto tal que $n_1 \in (\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})) \cap M$, e para todo o $n \in M$ se tem que $s(n) \in M$, então $M = \mathbb{N}$.
    Assumindo que os axiomas **A1**,**A2** e **A3** são verdadeiros, resolva os seguintes items:
    (a) Assumindo que a igualdade $0+0=0$ é verdadeira, mostre que a igualdade $n+0=n$ se verifica para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Diga, justificando, se também podemos demonstrar a igualdade $0+n=n$.
    (b) Use o *princípio de indução matemática* para demonstrar que para quaisquer dois elementos m e n de $\mathbb{N}$, se verifica a igualdade $m+n=n+m$.

`http://mathworld.wolfram.com/BernoulliInequality.html`.

[14] Para usar a hipótese de indução, comece por observar que para $n = k+2$, a função f^{k+2} pode ser reescrita como $f^{k+2} = f^2 o f^k$, ou alternativamente como $f^k o f^2$.

[15] Após a resolução do **Exercício 60**, diga **(i)** que pode concluir quanto à inversa de f (reveja **Exercício 40**); **(ii)** o que pode concluir quanto à composição $f^n o f^n$ para qualquer n natural.

[16] Leia as páginas 34 a 37 do livro APOSTOL T. M (1975) – Calculus, volume I, Wiley & Sons.

[17] Este item substitui o item (b) da versão anterior da questão (**Questão 14.(b) da Lista L2 | Conjuntos Numéricos**).

[18] A propriedade $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ será útil para reescrever $\cos((k+1)\pi)$ (caso $n = k+1$) em termos de $\cos(k\pi)$ (caso $n = k$).

(c) Mostre que se $0.5 \in \mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$, então o conjunto numérico $M = \{0.5, 1.5, 2.5, \ldots\}$ coincide com o conjunto $\mathbb{N}$. Mostre ainda que 5.5 é um elemento de $\mathbb{N}$.

(d) Diga justificando porque de acordo com a construção indutiva considerada em c), o número 6 não pode ser considerado um número natural.

63. **QUESTÃO DA PROVA P1 DE 2016 (TURMA A2-NOTURNO)** Para o caso do soma dos n primeiros números naturais de uma sequência numérica ser determinada pelas relações $S_1 = 3$, $S_2 = 5$ e $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$ $(n \in \mathbb{N})$, mostre que a fórmula

$$S_n = 2^n + 1$$

é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

64. **QUESTÃO DA PROVA SUB DE 2016 (TURMA A2-NOTURNO)**
Mostre que os *números de Fibonacci*, definidos recursivamente por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$ satisfazem para todo o $n \in \mathbb{N}$ a igualdade

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

65. Mostre que a sequência numérica a_n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ definida recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$ e pela fórmula

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-3} + \frac{3}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-1} \quad (n > 2)$$

satisfaz a igualdade $a_n = F_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, onde F_n correspondem aos *números de Fibonacci* definidos no **Exercício 64**.

66. A função fatorial $(n!)$ é uma função $s : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ definida via a fórmula de recursão

$$s(n) = \begin{cases} 1 & ,\text{se } n = 0 \\ ks(k-1) & ,\text{se } n = k \ \&\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Diga, justificando, se a função fatorial é injetiva.

(b) Mostre que a função fatorial não é sobrejetiva.

(c) Para os coeficientes binomiais definidos pela fórmula $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$:

i. Verifique que $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ e $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$ para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ii. Verifique que $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$ e $\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

iii. Use o *Segundo Princípio de Indução*[19] para mostrar que a fórmula

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$$

é verdadeira para todo o $n \geq k+1$ $(n \in \mathbb{N})$.

67. Mostre que a sequência de números x_n $(n \in \mathbb{N})$ definida recursivamente por $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ &

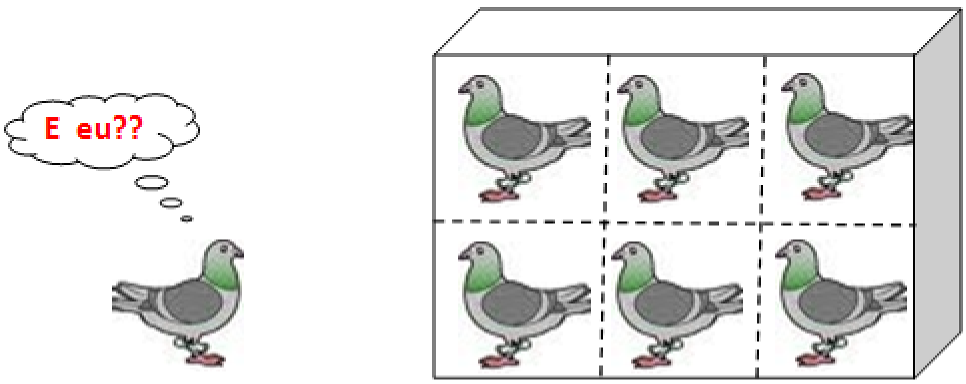
$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

satisfaz a desigualdade $x_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[19] Na literatura, o *Segundo Prinípio de Indução* costuma ser mencionado como o *Princípio Forte de Indução*.

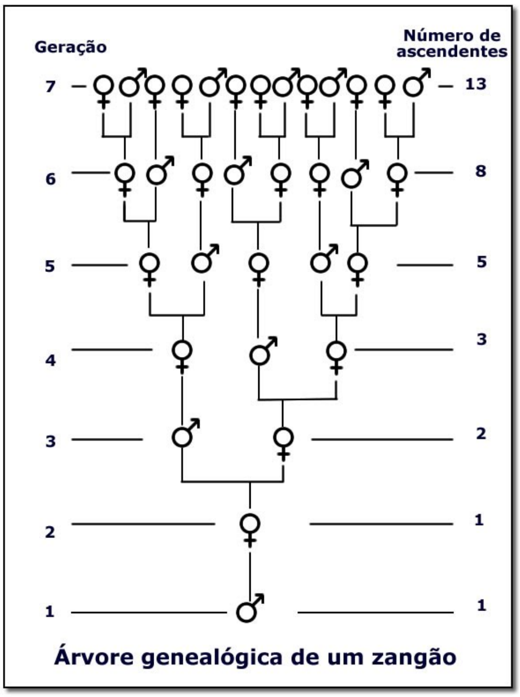
2.4 Aplicações de Indução Matemática

68. Suponha que as igualdades abaixo são verdadeiras[20]:
    $1+5=6, \quad 2+6=14 \quad \& \ 3+7=24.$
    (a) Calcule de forma indutiva o valor das seguintes somas: $5+9$, $6+10$ e $7+11$.
    (b) Use o *princípio de indução matemática* para determinar uma fórmula geral que nos permita calcular indutivamente o valor da soma $n+(n+4)$, para qualquer n natural.
69. Use o *princípio de indução matemática* para mostrar que existem 3^m-1 possibilidades de construir uma função $f:M\to\{-1,0,1\}$, que seja diferente da função sinal $\mathrm{sgn}:M\to\{-1,0,1\}$ introduzida no **exercício 39**.
70. Seja $f:X\to Y$ uma função, e $A_1,A_2,\ldots,A_n,B$ subconjuntos de X.
    Determine de forma indutiva qual a relação entre o conjuntos imagem
    $f(B\cup A_1), f(B\cup A_2),\ldots, f(B\cup A_n)$ & $f(B\cup(A_1\cap A_2\cap\ldots A_n))$.
    DICA: Use o **Exercício 55.**
71. Considere as funções $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ e $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definidas pontualmente por $f(n)=2^n$ e $g(n)=n!$ (função fatorial).
    (a) Determine os 6 primeiros termos das funções f e g.
    (b) Use o *princípio de indução matemática* para mostrar que existe $n_0\in\mathbb{N}$ para o qual a desigualdade $f(n)\leq g(n)$ é sempre satisfeita.
72. Para um conjunto finito A com n elementos, use o princípio de indução matemática para mostrar que:
    (a) Para todo o $n\in\mathbb{N}$ existem $n!$ possibilidades de definir uma função injetiva.
    (b) Uma função $f:A\to A$ é injetiva se e só se $f:A\to A$ for sobrejetiva (logo bijetiva).
73. A formulação elementar do *Princípio da Casa dos Pombos* (**en:** *Pigeonhole Principle*) corresponde ao seguinte enunciado[21]:
    "Se tivermos 3 pombos para colocar em 2 casas, então uma das casas irá ter pelo menos 2 pombos."
    Represente[22] por A o conjunto dos pombos e por B o conjunto das casas.
    (a) Use a representação em diagrama sagital para mostrar que o *Princípio da Casa dos Pombos* é equivalente a provar que é impossível construir uma função injetiva de domínio A e contradomínio B.
    (b) Mostre que para todo o n natural, é impossível construir uma função injetiva de domínio A e contradomínio B, onde A representa um conjunto de $n+1$ pombos e B o conjunto de n casas i.e. que pelo menos uma das casas irá ter pelo menos 2 pombos.



[20] Adaptação de uma pergunta de um teste de QI, nível 2.
[21] O *Princípio da Casa dos Pombos* também é conhecido na literatura por *Princípio das Gavetas de Dirichlet*.
[22] Figura do **Exercício 73** foi retirada do site `http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_002-principio-das-casas-dos-pombos/`.

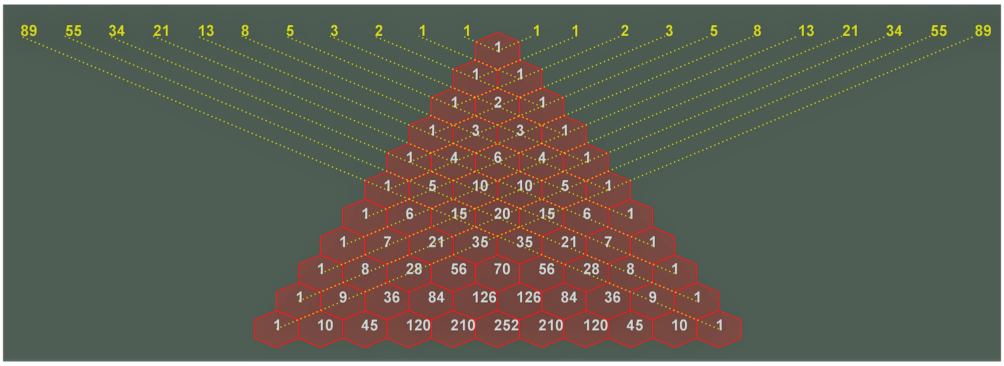
74. Suponha que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é um subconjunto finito de $I = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x \leq 1\}$ com pelo menos 3 (i.e. $|A| = n \geq 3$)[23].
Prove que para pelo menos dois elementos a_i, a_j de A, a quantidade[24] $\max\{a_i, a_j\} - \min\{a_i, a_j\}$ vale $\dfrac{1}{n-1}$, no máximo.
DICA: Combine o *princípio de indução matemática*, com o *Princípio da Casa dos Pombos* considerado no **Exercício 73**.
75. Para se determinar o número de abelhas em uma colmeia, considerou-se a seguinte árvore[25] genealógica de um zangão:



(a) Sabendo que um zangão tem apenas um dos pais (pois resultam de um ovo não fertilizado), ao passo que a fêmea exige ambos os pais (pois resultam de um ovo fertilizado), construa a árvore genealógica até à *Geração 10*, indicando o número de ascendentes em cada uma das gerações subsequentes.

[23]Excluímos o caso de $n = 2$, pois para este caso a solução é trivial: Escolhendo $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$ ou $0 \leq a_2 < a_1$, teremos sempre que a quantidade $\max\{a_1, a_2\} - \min\{a_1, a_2\}$ toma o valor máximo quando $\min\{a_1, a_2\} = 0$ e $\max\{a_1, a_2\} = 1$ (ou seja, quando escolhemos os elementos $0, 1 \in I$).
[24]A quantidade $\max\{a_i, a_j\} - \min\{a_i, a_j\}$ mede a distância entre dois pontos $a_i, a_j \in \mathbb{R}$. Como iremos ver mais à frente no **Capítulo 3**, esta quantidade pode ser reescrita como $|a_i - a_j|$ (itens (b), (c) & (d) do **Exercício 80**).
[25]**Árvore genealógica de um zangão** foi retirada do site `https://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm`.

(b) Procure encontrar qual a relação indutiva entre o número de ascendentes em cada geração e as diagonais sucessivas[26] do triângulo de Pascal, representado na figura[27] abaixo.



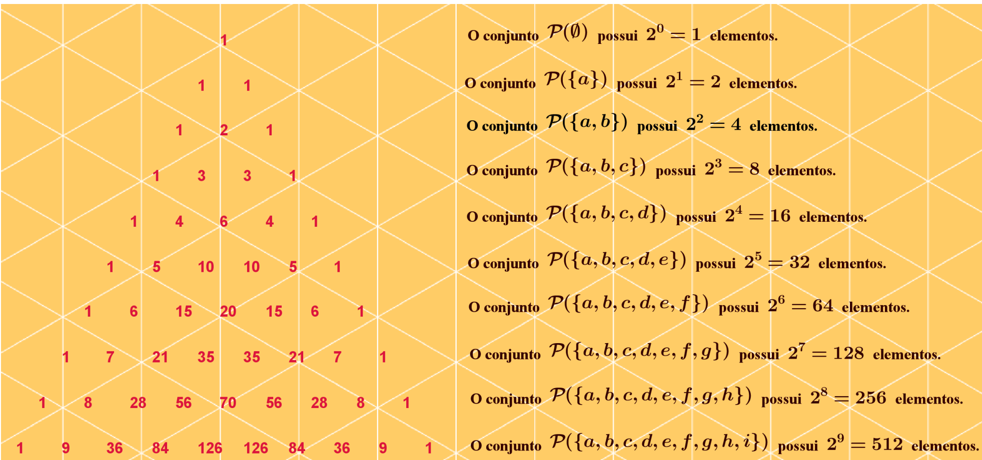
(c) Se a_n representar o número total de abelhas na colmeia até à *Geração* n, mostre pelo *princípio de indução matemática* que o número de ascendentes dentro de duas gerações será igual a $a_n + 1$.

76. Seja A um conjunto finito com n elementos.

(a) Use o *princípio de indução matemática* para mostrar que existem $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ subconjuntos S de A com k elementos.

(b) Mostre que o *conjunto das partes* $\mathscr{P}(A)$ tem 2^n elementos.

DICA: Demonstre a igualdade $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = 2^n$ pelo *princípio de indução matemática*, tal qual ilustrado na figura[28] abaixo.



[26] Primeiramente, comece por mostrar que os elementos das diagonais sucessivas do triângulo de Pascal são da forma $\left(\begin{array}{c} n-1-k \\ k \end{array}\right)$, onde n denota o número da diagonal.

[27] O triângulo de Pascal representado no item (c) do **Exercício 75** foi produzida com recurso ao arquivo GeoGebra `NumerosFibonacci.ggb`. Este encontra-se disponível para baixar em `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/FicheirosGeogebra.htm`.

[28] Figura gerada com recurso ao arquivo GeoGebra `ConjuntoDasPartes.ggb`. Este encontra-se disponível para baixar em `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/FicheirosGeogebra.htm`.

77. A função *duplo fatorial* ($n!!$) é uma função $f:\mathbb{N}\cup\{-1,0\}\to\mathbb{N}$ definida via a fórmula de recursão

$$f(n)=\begin{cases}1 & \text{, se } n\in\{-1,0\}\\ kf(k-2) & \text{, se } n=k\ \&\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

(a) Mostre que

$$n!!=\begin{cases}\dfrac{(2k+1)!}{2^k k!} & \text{, se } n=2k+1\ \&\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\ 2^k k! & \text{, se } n=2k\ \&\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\end{cases}$$

(b) Mostre que para todo o $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, as funções fatorial e duplo fatorial estão relacionadas pela fórmula

$$n!=n!!(n-1)!!$$

(c) Mostre[29] que para todo o $n\geq 8$ par se tem a desigualdade $n!!>2^n$.

(d) Mostre[30] que para todo o $n>4$ ímpar se tem a desigualdade $n!!>\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$.

78. Os *números harmônicos* H_n ($n\in\mathbb{N}$) são números definidos pelo somatório

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

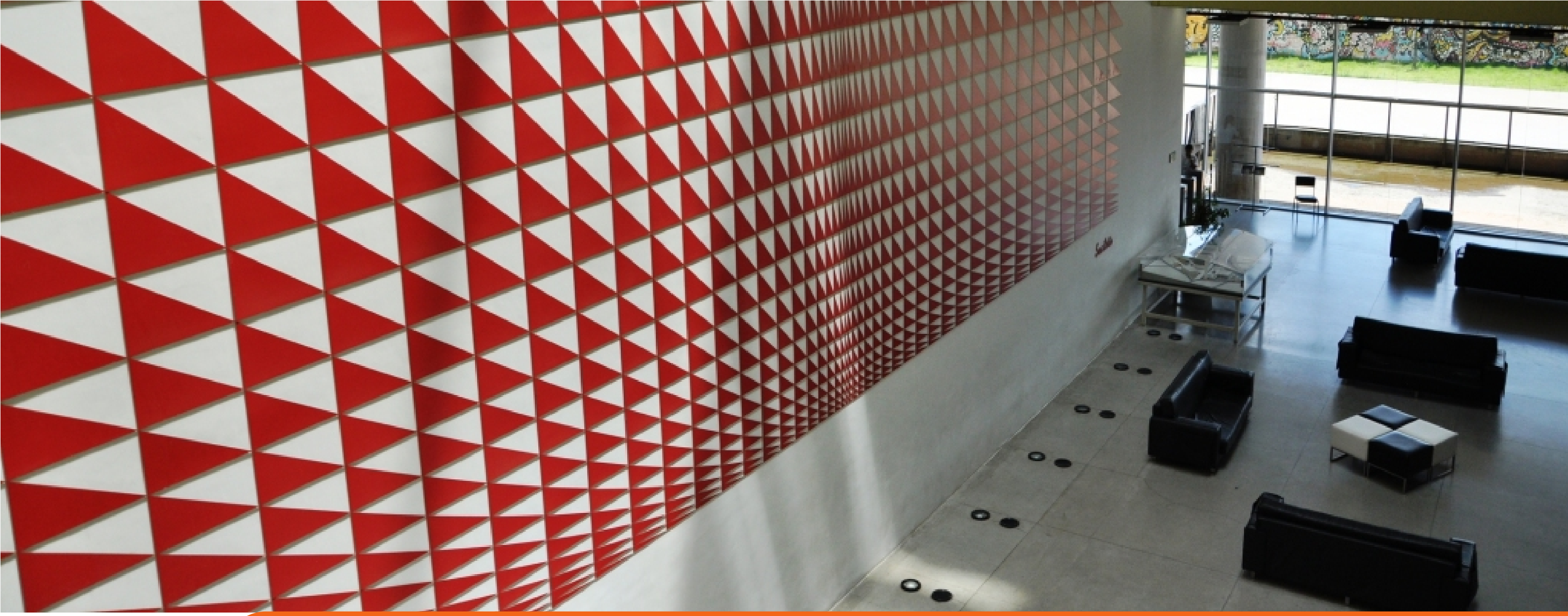
(a) Mostre que para todo o $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ se tem a desigualdade $H_n\geq 1+\frac{\log_2(n)}{2}$.

(b) Mostre que para todo o $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ se tem a igualdade

$$\sum_{m=1}^{n-1}H_m=n(H_n-1).$$

[29] O item (c) do **Exercício 77** é complementar ao item (b) do **Exercício 71**.

[30] O item (d) do **Exercício 77** também é complementar ao item (b) do **Exercício 71**. Para este caso particular, deve observar que se $n=2k+1$ ($n\in\mathbb{N}$ ímpar) nos conduz à igualdade $k=\frac{n-1}{2}$ (com $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$).



3. Números Reais

O que há de novo?

O material deste capítulo é totalmente novo, em comparação com o material desenvolvido em anos anteriores.

- **12 DE JUNHO DE 2018**
  - Foram coletados vários exercícios de prova dos anos anteriores (2016 & 2017). Estes encontram-se devidamente assinalados no texto.
  - Foram incluídos alguns exercícios (reformulados) que constavam na **Lista 3 | Funções de uma Variável Real (2016)**. São eles, os exercícios **79, 81** e os exercícios **111, 112 & 113**.
- **24 DE JUNHO DE 2018**
  - Houve uma troca de ordem entre as seções 3.1 (antiga seção 3.2) & seções 3.2 (antiga seção 3.1).
  - Foram adicionados dois novos exercícios: **96, 101 & 102**. Em particular, o **Exercício 102** foi incluído para testar se assimilou até aqui os seguintes temas: *função injetiva & indução matemática*.
  - Foram adicionados os itens (a) & (c) ao **Exercício 86**.
- **03 DE JULHO DE 2018**
  - Foi adicionado o item (e) ao **Exercício 80**.
  - Foi corrigido o item (c) do **Exercício 86**.
- **11 DE JULHO DE 2018**
  - Foram incluídos os itens (f) & (g) ao **Exercício 86**.
  - Foi excluído o item (d) do **Exercício 82**.
  - Item (b) do **Exercício 83** foi reformulado.
  - **Exercício 85** foi também corrigido ($x^2 \geq 2\sqrt{3}$ ao invés de $x^2 = 2\sqrt{3}$).
- **24 DE JULHO DE 2018**
  - Item (c) do **Exercício 86** foi corrigido ($\frac{a_{k-1}}{a_k}$ ao invés de $\frac{a_k}{a_{k-1}}$ para todo o $k \geq 3$).
  - Item (g) do **Exercício 86** foi modificado; Foi adicionado o item (h) ao **Exercício 86**.
  - Exercício (95) foi corrigido ($169n^2 \geq 13n^2$ ao invés de $169n^2 > 13n^2$).

– Incluída uma figura que inclui uma dica para resolução do **Exercício 93.** (cortesia de *A. Cruccianni*).

3.1 Igualdades e Desigualdades

79. Seja[1] $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ a *função sinal* introduzida no **Exercício 39**, e $|x|$ o módulo de um número real definido por $|x| = x$ (se $x \geq 0$) e $|x| = -x$ (se $x < 0$).
    (a) Diga, justificando, por que $x \mapsto |x|$ não define uma função injetiva.
    (b) Mostre que para todo o $x \in \mathbb{R}$, se tem a igualdade $x = |x| \operatorname{sgn}(x)$.
    (c) Diga, justificando se $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ é uma função sobrejetiva.
    DICA: Use o item anterior para provar, por definição, que sgn é sobrejetiva.
80. Mostre que para quaisquer dois números reais a e b se tem as seguintes igualdades:
    (a) $ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2$.
    (b) $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|b-a|}{2}$.
    (c) $\min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|b-a|}{2}$.
    (d) $|b-a| = \max\{a,b\} - \min\{a,b\}$.
    (e) $|-a| = |a|$.
    (f) $|ab| = |a|\,|b|$.
    (g) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, se $b \neq 0$.
    (h) $|a| = \sqrt{a^2}$.
    DICA: Comece por mostrar que $a^2 = |a|^2$.
81. Diga[2], justificando, se ambas as expressões algébricas $\sqrt{x^2}$ e $(\sqrt{x})^2$ definem a função[3] módulo $x \mapsto |x|$.
    DICA: O item **(f)** do **Exercício 80.** permite-lhe obter uma resposta parcial do exercício. Caso tenha dúvidas da solução do exercício, recorra ao GeoGebra[4]:

    `https://www.geogebra.org/graphing`.

82. Mostre que para quaisquer dois números reais a e b se tem as seguintes desigualdades:
    (a) $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
    DICA: Use o fato de $(a-b)^2$ corresponder sempre a um *número real não negativo*.
    (b) $a < ta + (1-t)b < b$, para todo o $0 < t < 1$.
    (c) **DESIGUALDADE TRIANGULAR**
    $|a+b| \leq |a| + |b|$.
    (d) $|a-b| \geq |\,|a| - |b|\,|$.
    DICA: Comece por mostrar primeiro que para dois números reais c e d a desigualdade $|d| \geq |c|$ é equivalente

    $$d \geq |c| \geq -d.$$

    (e) $a^2 \leq b^2$ se e somente se $|a| \leq |b|$.
    DICA: A dica do item anterior também se aplica aqui.

[1] Reformulação do **Exercício 7.** da **Lista 3 | Funções de uma Variável Real (2016)**.
[2] Reformulação do **EXERCÍCIO 6.** da **Lista 3 | Funções de uma Variável Real (2016)**.
[3] Este exercício é análogo ao **EXERCÍCIO 38**.
[4] As expressões simbólicas que terá de utilizar são `sqrt( <x> )` (função raiz quadrada) & `abs( <x> )` (função módulo).

83. Para dois números reais a e b:
   (a) Mostre que a sequência de desigualdades
$$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b| \leq \sqrt{(2a)^2+(2b)^2}$$
   é sempre satisfeita.
   (b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ se tem a desigualdade $|a|+|b| \leq \sqrt{(ax)^2+(bx)^2}$.
   DICA: Faça uso da igualdade $\sqrt{(ax)^2+(bx)^2} = |x|\sqrt{a^2+b^2}$.
84. Suponha que a equação quadrática da forma $ax^2+bx+c=0$ $(ac \neq 0)$ admite duas soluções distintas $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$, respetivamente.
   (a) Mostre que r_1 e r_2 têm *o mesmo sinal*[5] se e somente se $\operatorname{sgn}(ac) = 1$.
   (b) Mostre que r_1 e r_2 têm *sinais distintos*[6] se e somente se $\operatorname{sgn}(ac) = -1$.
   (c) Se $a \neq 0$ mas $c = 0$, diga justificando se as raízes r_1 e r_2 de $ax^2+bx=0$ satisfazem a condições $r_1 \leq 0$ e $r_2 \leq 0$?
85. Prove que se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x^2 \geq 2\sqrt{3}$, então $|x^8-4x^4+3| \geq 99$.
   DICA: Comece por fatorar o polinômio x^8-4x^4+3 na forma
$$x^8-4x^4+3 = (x^4-r_1)(x^4-r_2),$$
   onde r_1 e r_2 são as raízes do polinômio $p(y) = y^2-4y+3$ (substituição $y = x^4$).
86. Use o princípio de indução matemática[7] para demonstrar as seguintes igualdades e desigualdades:
   (a) Se a e b são dois números reais, então a igualdade
$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$
   é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
   (b) **GENERALIZAÇÃO DA DESIGUALDADE TRIANGULAR**
   $|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são n números reais.
   (c) **UM CASO PARTICULAR DA DESIGUALDADE TRIANGULAR GENERALIZADA**
   Mostre que no caso da sequência de desigualdades
   $0 < |a_3| < |a_4| < \ldots < |a_n|$
   ser verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$, então a desigualdade
   $\left|\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| < n-3$
   é sempre satisfeita.
   (d) **QUESTÃO 2. DA PROVA REC DE 2016 (TURMA D-DIURNO)**
   Use a propriedade $2^{ab} = (2^a)^b$ para mostrar que a igualdade[8]
$$1+2^x+2^{2x}+\ldots+2^{(n-1)x} = \frac{2^{nx}-1}{2^x-1} \quad (x \neq 0)$$
   (e) **QUESTÃO 2. DA PROVA REC DE 2016 (TURMA A2-NOTURNO)**
   Use as propriedades $\log_3(ab) = \log_3(a)+\log_3(b)$ e $\log_3(a^b) = b\log_3(a)$ para mostrar que a igualdade[9]
$$\log_3(x)+\log_3(x^2)+\ldots+\log_3(x^n) = \frac{n(n+1)}{2}\log_3(x) \quad (x > 0)$$

[5] Dizer que r_1 e r_2 têm o mesmo sinal é equivalente a escrevermos $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(c)$, onde $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ denota a *função sinal*.

[6] Dizer que r_1 e r_2 têm o mesmo sinal é equivalente a escrevermos $\operatorname{sgn}(a) = -\operatorname{sgn}(c)$.

[7] Os itens deste exercício são análogos aos da seção **2.2 Princípio de Indução Matemática**.

[8] A igualdade a ser provada no item (d) do **Exercício 86** corresponde a uma progressão geométrica de razão $r = 2^x$.

[9] Para o caso de $x = 3$ ($\log_3(3) = 1$) esta fórmula de indução do item (e) do **Exercício 86** diz-nos o somatório dos n primeiros números inteiros é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$; para o caso de $x = 9$ ($\log_3(9) = 2$) esta fórmula de indução dá-nos o somatório dos n primeiros números pares.

(f) Prove que se $x \neq 0$, então a desigualdade

$$|x|^{n+1} + \frac{1}{|x|^{n+1}} > |x|^n + \frac{1}{|x|^n}$$

é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(g) Mostre[10] que a sequência de números reais x_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) gerada pela condições $x_0 = 1$, e pela fórmula

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_{n-1}}$$

satisfaz a sequência de desigualdades $1 < x_n \leq \frac{3}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(h) Mostre[11] que a sequência de números reais x_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) gerada pela condições $x_0 = x_1 = 1$, e pela fórmula

$$x_n = x_{n-1} + \frac{2 - x_{n-1}^2}{x_{n-1} + x_{n-2}}$$

satisfaz a sequência de desigualdades $1 < x_n \leq \frac{3}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

3.2 Demonstrações por Redução ao Absurdo

87. Mostre que o conjunto $\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n^2 < n\}$ é vazio.
88. Mostre que não existe nenhum número racional cujo quadrado seja igual a 3.
89. Mostre que a fração $\dfrac{4}{0}$ não é um número real.
    DICA: Comece por considerar a igualdade $\dfrac{4}{0} = x$, com $x \in \mathbb{R}$.
90. Mostre que para dois números racionais, $a, b \in \mathbb{Q}$, o número $a + b\sqrt{3}$ é irracional se $b \neq 0$.
    DICA: Use o fato de $\sqrt{3}$ (solução positiva da equação $x^2 = 3$) ser irracional[12].
91. Mostre[13] que a equação quadrática $4x^2 - 8x - 1 = 0$ não admite soluções racionais.
    DICA: Comece por encontrar as constantes reais a, h e k tais que $4x^2 - 8x - 1 = a(x-h)^2 + k$.
92. Mostre que a equação quadrática $x^2 - x + 1 = 0$ não admite soluções reais.
    DICA: A dica do item anterior também se aplica a este item.
93. Prove que $\log_5(7)$ é um número irracional.
    DICA: Por definição, $x = \log_a(b)$ é o número que satisfaz a igualdade $a^x = b$. Em particular, $\log_5(7)$ é solução da equação $5^x = 7$.
94. Mostre que se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $\sqrt{a^2 + b^2} \neq |a| + |b|$.

3.3 Demonstrações por Contraposição

95. Mostre que o conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ 169n^2 \geq 13n\}$ é igual a $\mathbb{Z}$.
    DICA: Considerando $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$ como conjunto universo, mostre que o seu complementar (A^c) é igual ao conjunto vazio ($\emptyset$).
96. Mostre que se $x \in \mathbb{R}$ é um número irracional, então $\sqrt{x}$ também é um número irracional.

[10] A sequência gerada no item (h) do **86** dá-nos uma aproximação para $\sqrt{2}$ (raiz positiva do polinômio $x^2 - 2$) pelo *método de Newton* (que irá ter oportunidade de estudar em Cálculo Numérico). Para mais detalhes, consulte o link http://mathworld.wolfram.com/NewtonsIteration.html.

[11] A sequência gerada no item (h) do **86** dá-nos uma aproximação para $\sqrt{2}$ (raiz positiva do polinômio $x^2 - 2$) pelo *método da secante*. Para mais detalhes, consulte o link http://mathworld.wolfram.com/SecantMethod.html.

[12] Mostrámos essencialmente no **Exercício 89.** que $\sqrt{3}$ é irracional.

[13] Não vale usar a fórmula de Bhaskara.

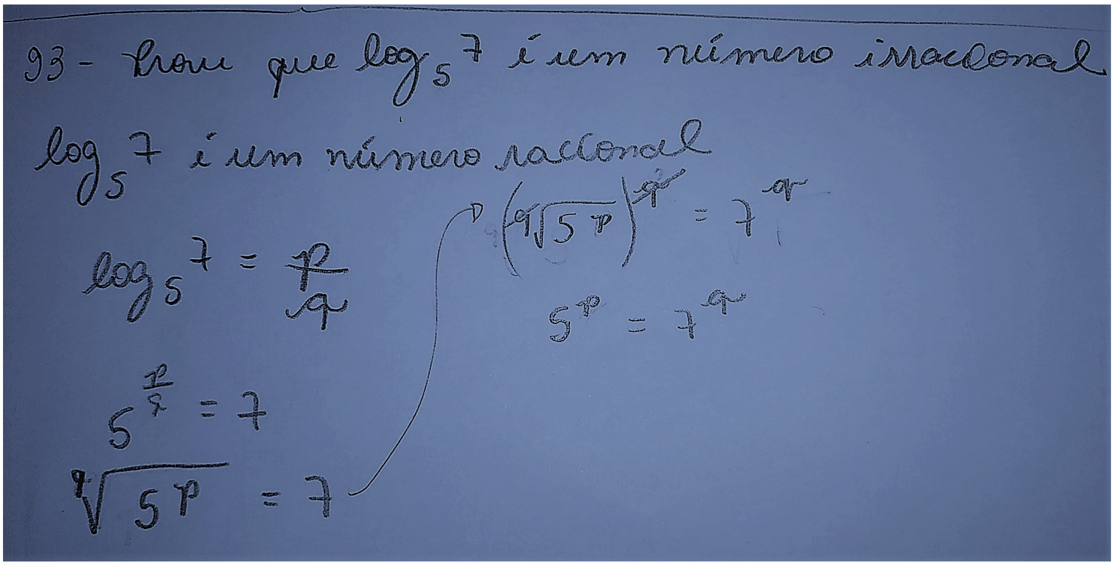


Figura 3.1: Dica para resolução do **Exercício 93.** enviada por *A. Crucciani* (15 de julho de 2018).

97. Mostre[14] que se $\sqrt{a^2+b^2} = |a|+|b|$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
98. Mostre que $\max\{a,b\} \neq \min\{a,b\}$ se e somente se $a \neq b$.
    DICA: Faça a demonstração usando a formulação contrapositiva. As igualdades demonstradas no **EXERCÍCIO 80.** poderão vir a ser úteis.
99. Mostre[15] que $(a-b)^2 \neq (a+b)^2$ se e somente se $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
100. Sejam a e b dois números reais.
    (a) Mostre que a igualdade
    $$(1-ab)^2 - (a-b)^2 = (1-a^2)(1-b^2)$$
    é sempre satisfeita.
    (b) Mostre que $\left|\frac{a-b}{1-ab}\right| \geq 1$ implica $|a| \geq 1$ ou $|b| \geq 1$.
    DICA: Faça a demonstração usando a formulação contrapositiva. Depois faça uso das propriedades dos módulos e do item demonstrado anteriormente.
101. Para equação quadrática da forma $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c \in \mathbb{Q})$, mostre que uma solução da equação (caso exista) é um número irracional se e somente se a outra solução também é um número irracional.
102. Mostre[16] que para todo o n ímpar[17] maior que 1, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pontualmente por $f(x) = x^n$ é injetiva[18].

[14] Esta questão corresponde à formulação contrapositiva do **EXERCÍCIO 94**.
[15] O item (g) do **Exercício 80** permite-nos ainda concluir que $(a-b)^2 \neq (a+b)^2$ se e somente se $|a-b| \neq |a+b|$.
[16] O que se pretende no **Exercício 102** é que faça uso da formulação contrapositiva de função injetiva: *Uma função $f : X \to Y$ é injetiva se para todos os $a,b \in X$, a implicação $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ é verdadeira.*
[17] Pode fazer a demonstração por indução sobre o conjunto dos números inteiros. Neste caso terá de fazer uso da fórmula recursiva $x^{n+2} = x^2x^n$ (verdadeira para todo o $x \in \mathbf{R}$). Alternativamente, pode aplicar diretamente o item (a) do **Exercício 86** para provar que $a^n - b^n = 0$ (equivalente a $f(a) = f(b)$) implica a igualdade $a = b$.
[18] Para provar o CASO BASE ($n = 3$), observe que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (veja item (a) do **Exercício 86**). Logo $a^3 - b^3 = 0$ se e somente se $a - b = 0$ ou $a^2+ab+b^2 = 0$. Se $a = b = 0$, então igualdade anteriormente é trivialmente satisfeita. Caso contrário (i.e. se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$), tem-se que $a^2+b^2 > 0$, donde $a^2+ab+b^2 \neq 0$. Para este caso a condição $a^3 - b^3 = 0$ implica que $a - b = 0$.

3.4 Resolução de Equações e Inequações

103. **Resolução[19] de Inequações de grau 2**
Para a *função quadrática* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pontualmente por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$:
    (a) Encontre as constantes h e k tais que $f(x) = a(x-h)^2 + k$.
    (b) Mostre que se $b^2 \leq 4ac$, então a inequação $f(x) \geq 0$ é sempre satisfeita, desde que $a > 0$.
    (c) Formule e demonstre o análogo do item anterior para o caso de $b^2 \leq 4ac$ e $a < 0$.
    (d) Se $a < 0$ e $b^2 > 4ac$, então para $a < 0$, a inequação $f(x) \geq 0$ admite como conjunto solução o intervalo[20]
$$f^{-1}\left([0, +\infty[\right) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \min\{r_1, r_2\} \leq x \leq \max\{r_1, r_2\}\},$$
    onde r_1 e r_2 são as raízes de f.
    (e) Formule e demonstre o análogo do resultado acima para as seguintes condições:
        i. Conjunto solução da inequação $f(x) \leq 0$ para $a > 0$ e $b^2 > 4ac$.
        ii. Conjunto solução da inequação $f(x) \leq 0$ para $a < 0$ e $b^2 > 4ac$.
        iii. Conjunto solução da inequação $f(x) \geq 0$ para $a > 0$ e $b^2 > 4ac$.
104. **Questão da Prova REC de 2016 (Turma D-Diurno)**
Determine a interseção do conjunto $\mathbb{N}$ com conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ -(x-2)^2 + 9 \geq 5\right\}$.
105. **Questão da Prova REC de 2016 (Turma A2-Noturno)**
Determine a interseção do conjunto $\mathbb{Z}$ com conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x-4)^2 + 2 < 18\}$.
106. **Questão da Prova P2 de 2016 (Turma D-Diurno)**
Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais x que satisfazem as seguintes inequações:
    (a) $\dfrac{3}{2-x} > x - 1$.
    (b) $|2x+1| \leq |x-1| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
107. **Questão da Prova SUB de 2016 (Turma D-Diurno)**
Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais x que satisfazem as seguintes inequações:
    (a) $\dfrac{(x+1)^3}{x^3+1} < 1$.
    (b) $|x+3| - |3x-2| \geq 1$.
108. **Questão da Prova SUB de 2016 (Turma A2-Noturno)**
Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais x que satisfazem as seguintes inequações:
    (a) $x^3 - 5x^2 + 8x > 0$.
    (b) $|x+2| - |2x-1| \leq 1$.
109. **Questão da Prova P1 de 2017 (Turma A-Diurno)** Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais x que satisfazem as seguintes inequações:
    (a) $|x-4| - |2-3x| < 2$.
    (b) $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{|x+1|} \geq 1$.

[19] Reformulação do **Exercício 3.** da **Lista 3 | Funções de uma Variável Real (2016)**.
[20] Por definição $f^{-1}\left([0, +\infty[\right)$ (conjunto pré-imagem de f) é definido por $f^{-1}\left([0, +\infty[\right) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \geq 0\}$.

110. **QUESTÃO DA PROVA SUB DE 2017 (TURMA A-DIURNO)**
Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais x que satisfazem as seguintes inequações:
(a) $\sqrt{2-3x} \geq \sqrt{x-4}$.
(b) $\dfrac{|x+1|}{x^3-x^2-2x} < 1$.

3.5 Cálculo Simbólico usando o GeoGebra

111. Use os comandos GeoGebra[21]

`Fatorar( <Polinômio> )` & `Raiz( <Polinômio> )`

para fatorar e determinar as raízes dos polinômios abaixo:
(a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3$
(b) $g(x) = x^5 + x^4 + 2x^2 - x - 3$

112. Para os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ definidos no **Exercício 111**, use o comando

`Simplificar( <Função> )`

para simplificar $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ como um quociente de polinômios da forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

113. Use os resultados obtidos nos **exercícios 111 & 112** para:
(a) Concluir se $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ (determinado no **Exercício 112**) e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (polinômios $f(x)$ e $g(x)$ definidos no **exercício 111**) definem a mesma função.
(b) Resolver as inequações[22] $f(x)g(x) < 0$ e $0 < \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq 1$.

[21] URL: `https://www.geogebra.org/graphing`
[22] Para uma dada função h, as soluções de inequações da forma $h(x) > 0$ resp. e $h(x) < 0$ correspondem graficamente aos valores $\mathrm{sgn}(h(x)) = 1$ resp. $\mathrm{sgn}(h(x)) = -1$. Pode confirmar graficamente a solução obtida neste item com recurso ao comando GeoGebra `sgn( <x> )`.

Pré-Cálculo

4. Funções de uma Variável Real

O que há de novo?

Este capítulo corresponde a uma reformulação da lista **Lista L4 | Funções de Variável Real II (2016 & 2017)**.

- **11 DE JULHO DE 2018**
  - Foram excluídos os exercícios **1., 2., 5., 7. & 8.** da **Lista L4 | Funções de Variável Real II**. Foi ainda excluído o item (d) do exercício **19.**
  - Foram adicionados 13 novos exercícios: **117, 118, 121, 124,125,126, 127, 128, 129, 130, 131, 134, 136.**
- **24 DE JULHO DE 2018**
  - Incluídas duas figuras para complementar resolução do **Exercício 117**.
  - Corrigido item (b) do **Exercício 124**.
  - Corrigido item (b) do **Exercício 129.** $(f(x) - g(x) \geq -1$ ao invés de $f(x) - g(x) \geq 1$. Caso contrário, o conjunto vazio seria o conjunto solução).
- **26 DE JULHO DE 2018**
  - Incluída figura para complementar resolução do **Exercício 128**.
- **02 DE AGOSTO DE 2018**
  - Incluída uma figura com proposta de resolução do **Exercício 121.** (cortesia de *L.B. Sanchez*).
- **06 DE AGOSTO DE 2018**
  - Corrigido item (d) do **Exercício 135.**
  - Incluída uma figura com proposta de resolução do item (d) do **Exercício 135.** (grato a *V. Rocca* pela deteção do erro, e por ter enviado a sua resolução).

4.1 Paridade, Domínio e Inversa de uma Função

114. Estude as seguintes funções quanto à paridade:
    (a) $|x+5|$.
    (b) $\frac{x^3-x}{x^2+1}$.
    (c) $\sqrt{|1-x^2|}$.
    (d) $\operatorname{sgn}(x)$.
115. Para a função f definida por $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, mostre que
    (a) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ é a parte par de f.
    (b) $\dfrac{2x}{1-x^2}$ é a ímpar de f.
    (c) A parte par e ímpar de f satisfazem a igualdade
    $$\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2 - \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2 = 1.$$
116. Sejam f e g são duas funções reais de variável real.
    (a) Diga, justificando, quais as condições que temos de impor a f e a g de modo a que $f+g$ (soma de funções) e fg (produto de funções) sejam funções pares.
    (b) Diga, justificando, quais as condições que temos de impor a f e a g de modo a que $f-g$ (diferença de funções) e $\frac{f}{g}$ (quociente de funções) sejam funções ímpares.
    (c) Mostre que se g é uma função par, então fog também é uma função par.
    (d) Mostre que se f e g são funções ímpares, então fog também é uma função ímpar.
    (e) Dê um exemplo de duas funções f e g de tal modo que g seja ímpar mas que fog seja par.
117. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pontualmente por
    $$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$
    (a) Mostre que a inequação $|f(x)| < 1$ é satisfeita para todos o $x \in \mathbb{R}$.
    (b) Diga, justificando, para que conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ a função $g : X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ nos dá a inversa de f.
118. Sejam f e g duas funções definidas por $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
    (a) Estude f e g quanto à paridade.
    (b) Determine o contradomínio da função g.
    (c) Mostre que
    $$f(x)^2 + g(x)^2 = 1.$$
    O que pode concluir quanto ao contradomínio de f?
119. Para as funções $f(x) = \sqrt{2-x}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$
    (a) Determine o domínio de f e de g.
    (b) Determine o domínio de gof e de fog.
    (c) Indique qual o contradomínio de f.
    (d) Verifique se f e g são injetivas.
    (e) Determine f^{-1}, explicitando qual o seu domínio e a sua expressão analítica.
120. Use a igualdade $x^c = b^{c \log_b x}$ $(x > 0)$ para resolver a inequação $0 < x^{1.25} < 1.34$ (escolha convenientemente a base b do logaritmo $\log_b$).

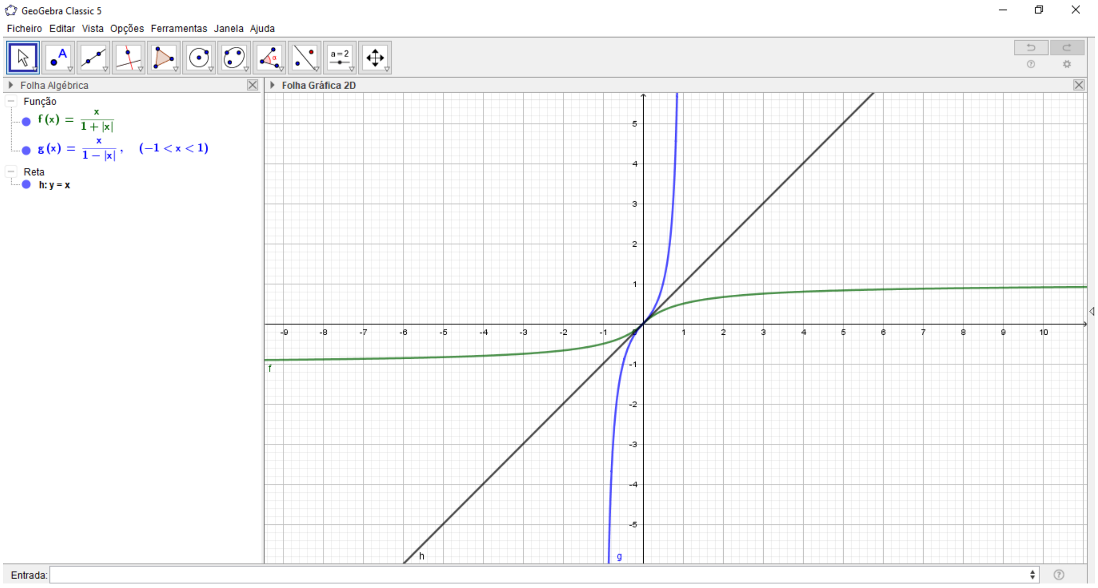


Figura 4.1: Resolução gráfica do **Exercício 117**. A verde temos o gráfico da função f; a azul temos o gráfico da função g (inversa da função f). A função g foi definida com recurso ao comando `g(x) = Se(-1 < x < 1, x / (1 - abs(x)))`. Graficamente, a condição $|f(x)| < 1$ significa que o contradomínio da função f está compreendido entre as retas $y = -1$ e $y = 1$ (sem tocar nestas).

Figura 4.2: Comentário sobre o item (b) do **Exercício 117**: Se tivéssemos utilizado a condição $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (conjunto de pontos para os quais o denominador $1 - |x|$ não se anula) ao invés da condição $-1 < x < 1$ (contradomínio da função f, a verde), então o gráfico da função $\frac{x}{1-|x|}$ (a laranja) nunca definiria o gráfico da função inversa de f, uma vez que para valores de $x < -1$ e $x > -1$ o gráfico a laranja não corresponde a uma reflexão do gráfico a azul, em relação à reta $y = x$ (a preto).

121. Mostre que é impossível determinar uma função ímpar $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$ que satisfaça pelo menos uma das condições enunciadas nos itens abaixo:
   (a) $|f(u)+f(v)| > |u+v|$, para todos os $u,v \in [-a,a]$.
   (b) $f(x)f(-x) > 0$, para todo o $x \in [-a,a]$.
   DICA: Use redução ao absurdo.
122. Para as funções $f(x) = \sqrt[4]{\frac{e}{x}}$, $g(x) = \ln\left(-\frac{\pi}{x}\right)$ e $h(x) = -4+\ln\left(\frac{x-2}{3}\right)$:
   (a) Determine o domínio.
   (b) Verifique se são funções injetivas.
   (c) Determine a expressão analítica da inversa de cada função, indicando o seu domínio e conjunto imagem (contradomínio).
123. Determine a expressão analítica das inversas das seguintes funções, indicando os domínios e conjunto imagem (contradomínio):
   (a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$
   (b) $f(x) = -3+2\ln\left(\frac{x}{3}\right)$
   (c) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ (função *sigmóide*).
124. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real de variável real que satisfaz a desigualdade abaixo, para todos os $u,v \in \mathbb{R}$:

$$|f(u)-f(v)| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}|u-v|.$$

   (a) Mostre que f é uma função injetiva.
   (b) Mostre que se f é uma função ímpar, então a desigualdade abaixo também é satisfeita, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

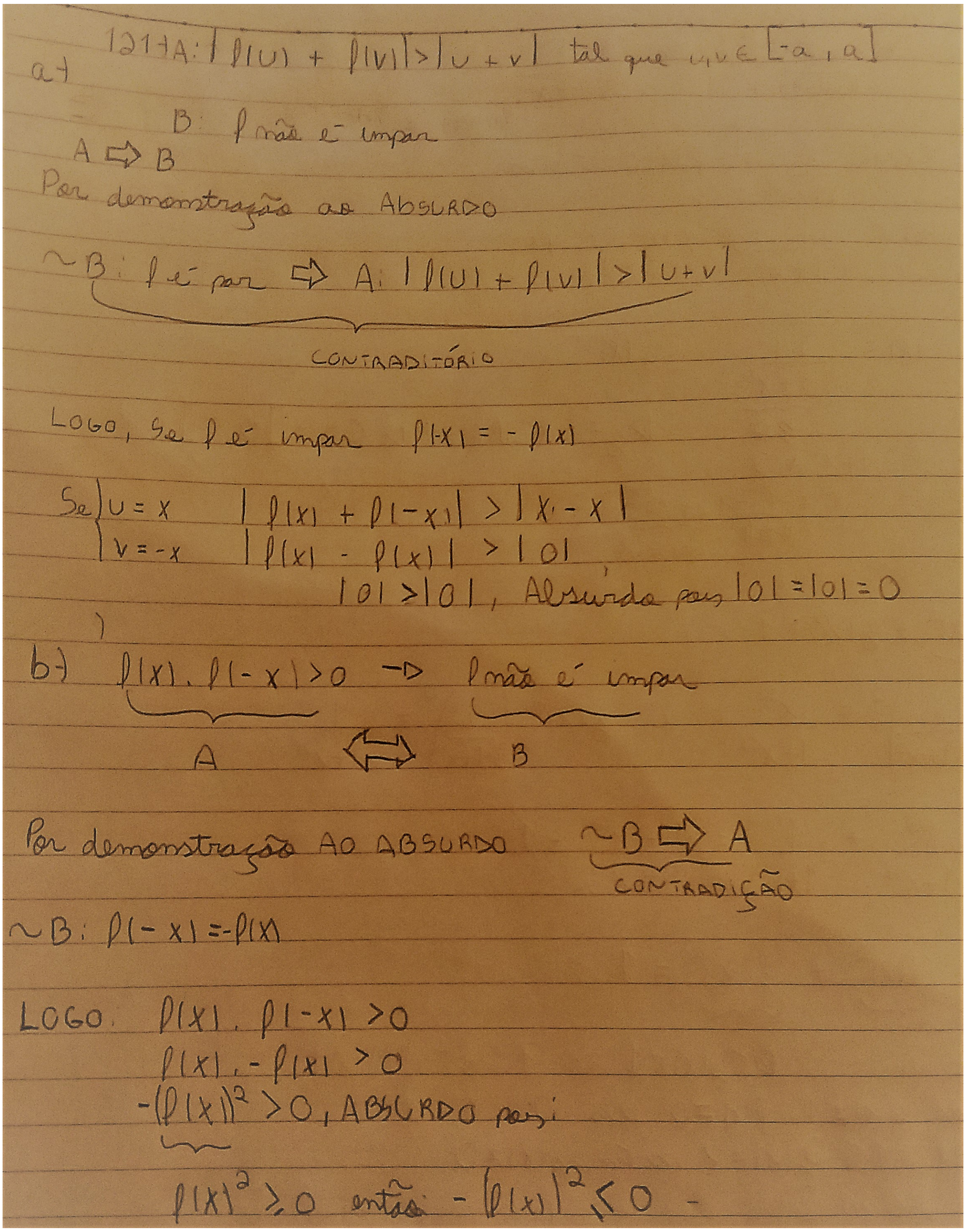
$$|f(x)| \geq \tfrac{\sqrt{5}}{2}|x|.$$

   (c) Mostre que para a função inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a desigualdade abaixo também é satisfeita, para todos os $y,z \in f(\mathbb{R})$:

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(z)| \leq \frac{2}{5}\sqrt{5}\,|y-z|.$$

4.2 Funções Modulares e com Radicais

125. Determine, caso exista, a função inversa associada a cada uma das funções radicais. Indique qual o domínio e o contradomínio.
   (a) $\sqrt{x^2-2x}$.
   (b) $\sqrt{x^2+4x+5}$.
   (c) $\sqrt{x^2-x-6}$.
   (d) $\sqrt{x^3+8}$.
   (e) $\sqrt{(x+2)^3}$.
126. Usando a substituição $y = a^x$ $(a > 0)$, determine a função inversa associada a cada uma das funções abaixo. Indique qual o domínio e o contradomínio.
   (a) $\sqrt{4^x-2^{x+1}}$.
   (b) $\sqrt{16^{-x}+4^{-x+1}+5}$.
   (c) $\sqrt{100^x-10^x-6}$.
   (d) $\sqrt{27^x+8}$.
   (e) $7^{\sqrt{(x+2)^3}}-1$.



a) 121) A: $|f(u) + f(v)| > |u + v|$ tal que $u, v \in [-a, a]$

B: f não é ímpar

$A \Rightarrow B$

Por demonstração ao ABSURDO

$\sim B$: f é par $\Rightarrow$ $\underbrace{A: ||f(u) + f(v)| > |u+v|}_{\text{CONTRADITÓRIO}}$

LOGO, se f é ímpar $f(-x) = -f(x)$

Se $\begin{cases} u = x \\ v = -x \end{cases}$ $|f(x) + f(-x)| > |x - x|$

$|f(x) - f(x)| > |0|$

$|0| > |0|$, Absurdo pois $|0| = |0| = 0$

b) $\underbrace{f(x).f(-x) > 0}_{A} \rightarrow \underbrace{f \text{ não é ímpar}}_{B}$

$A \Leftrightarrow B$

Por demonstração AO ABSURDO $\underbrace{\sim B \Rightarrow A}_{\text{CONTRADIÇÃO}}$

$\sim B$: $f(-x) = -f(x)$

LOGO: $f(x).f(-x) > 0$

$f(x).-f(x) > 0$

$-(f(x))^2 > 0$, ABSURDO pois:

$f(x)^2 \geq 0$ então $-(f(x))^2 \leq 0$

Figura 4.3: Proposta de resolução do **Exercício 121.** enviada por *L.B. Sanchez* (01 de agosto de 2018).

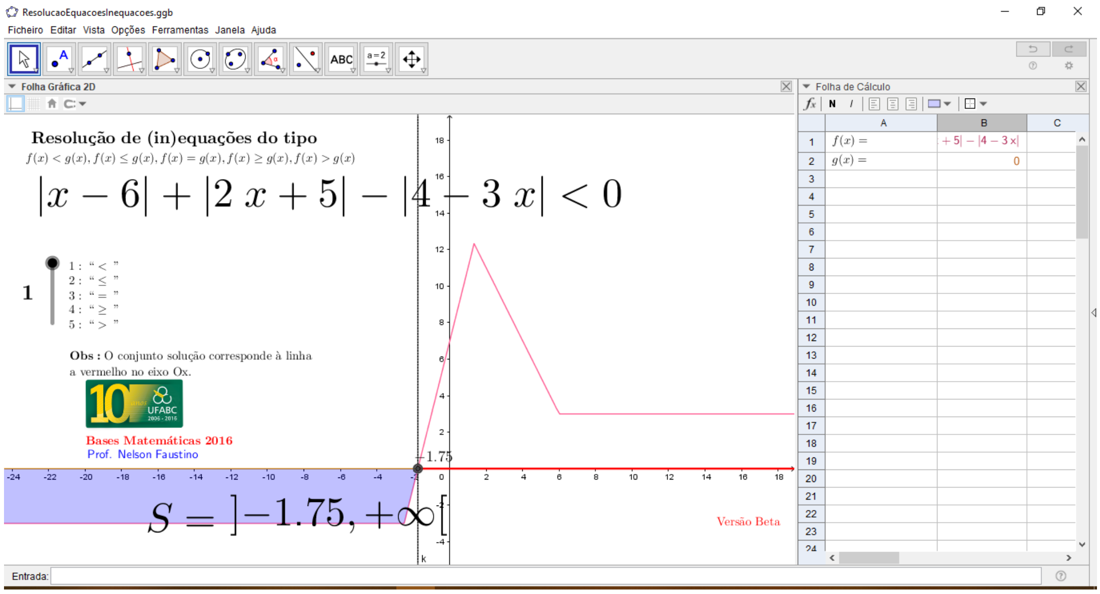


Figura 4.4: Resolução gráfica do item (d) do **Exercício 128** com recurso ao arquivo GeoGebra `ResolucaoEquacoesInequacoes.ggb`. A solução representada graficamente (a roxo) corresponde ao conjunto de todos os pontos do gráfico da função por partes do **Exercício 127** se situa abaixo do eixo Ox ($y = 0$).

127. Escreva as funções abaixo como funções por partes.
    (a) $|3x-1|+2$.
    (b) $|5-4x^2|$.
    (c) $|x|-|x-3|-|x+1|$.
    (d) $|x-6|+|2x+5|-|4-3x|$.
    (e) $\sqrt{|1-x^3|}$.
    (f) $\operatorname{sgn}(2x-3)\sqrt{1-x^3}$.
    (g) $\dfrac{|8-x^3|}{\sqrt{|x^2+2x-15|}}$.
128. Determine o conjunto de todos os números reais x que satisfazem as equações e inequações abaixo:
    (a) $|3x-1|+2 = 3-3x$.
    (b) $|5-4x^2| > 0$.
    (c) $|x-6|+|2x+5|-|4-3x| < x$.
    (d) $|x-6|+|2x+5|-|4-3x| < 0$.
    (e) $\sqrt{|1-x^3|} \leq \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}$.
    (f) $\dfrac{|8-x^3|}{\sqrt{|x^2+2x-15|}} = 2$.
129. Considere as funções f e g definidas pontualmente por

$$f(x) = \sqrt{3x^2+5x+1} \text{ resp. } g(x) = \sqrt{3x^2+5x+8}.$$

    (a) Determine o domínio de f e g.
    (b) Determine o conjunto de todos os números reais x que satisfazem a inequação funcional $f(x)-g(x) \geq -1$.

130. Considere a função f definida pontualmente por

$$f(x) = -\operatorname{sgn}(x-1)\,\frac{\sqrt{|x-3|}}{\sqrt{|x^2-x-6|}},$$

onde sgn denota a *função sinal*[1].
   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Determine o conjunto de todos os números reais x que satisfazem a inequações funcionais $-\frac{\sqrt{2}}{2} < f(x) < 0$.

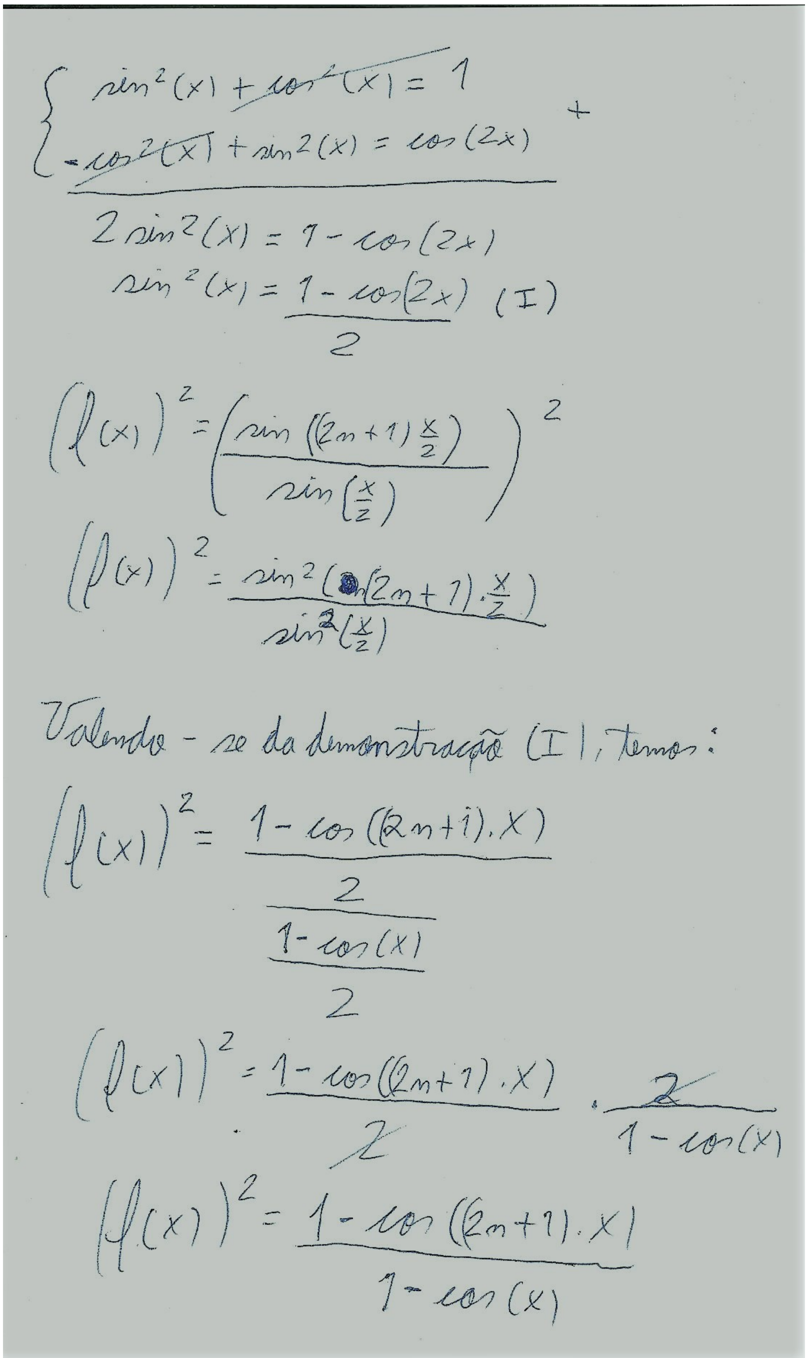
4.3 Funções Periódicas

131. Represente graficamente a função periódica em $\mathbb{R}$, supondo que intervalo $]0,2]$ esta é definida por:
   (a) $\operatorname{sgn}(1-x)$, onde sgn denota a função sinal.
   (b) $1-|x-1|$.
   (c) $\sqrt{x}$.
   (d) $\lfloor x \rfloor + 1$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função truncamento.
132. Determine o período fundamental das seguintes funções:
   (a) $\cos(2x)$
   (b) $\operatorname{cotg}(3x)$
   (c) $\sin^2(x)$
   (d) $\sec^2(\frac{5}{2}x)$.
133. Determine o domínio, o conjunto imagem (contradomínio) e os zeros das seguintes funções:
   (a) $1+2\cos(\pi x)$.
   (b) $\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)-2$.
   (c) $1+\tan(5x)$.
   (d) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
134. Diga, justificando, se as afirmações abaixo são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**). No caso de **V**, faça a respetiva demonstração. No caso de **F**, dê um contra-exemplo.
   (a) Se f e g forem funções periódicas de período T, então a função $f+g$ é periódica de período T.
   (b) Se f é uma função periódica período π, então a função g definida pontualmente por $g(x) = f(x+\pi)$ é periódica de período 2π.
   (c) Se f é uma função periódica de período 2π, então a função g definida pontuamente por $g(x) = f(\omega x)$ $(\omega > 0)$ é uma função periódica de período $\dfrac{2\pi}{\omega}$.
   (d) Se f e g são duas funções periódicas, de período T, então a função $\dfrac{f}{g}$ é uma função periódica de período T.
   (e) Se f é uma função injetiva, então f não é uma função periódica.
   (f) Se f é uma função sobrejetiva, então f não é uma função periódica.
   (g) A soma de duas funções periódicas é sempre uma função periódica.

[1]Para a resolução do **Exercício 130**: Com base no que foi obtido ao longo da resolução do **Exercício 79**, tem que $\operatorname{sgn}(x-1) = 0$ quando $x = 1$ e que $\operatorname{sgn}(x-1) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$ para valores de $x \neq 1$. Pode ainda demonstrar que $-\operatorname{sgn}(x-1) = \operatorname{sgn}(1-x)$.

135. Para a função[2] $f(x) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ (*Núcleo de Dirichlet* de ordem $n \in \mathbb{N}$):
   (a) Estude a paridade e os zeros de f.
   (b) Determine o período fundamental de f.
   (c) Determine o domínio de f.
   (d) Mostre que $f(x)^2 = \dfrac{1-\cos((2n+1)x)}{1-\cos(x)}$.
   (e) Diga, justificando, se o período fundamental de $f(x)^2$ coincide com o período fundamental de $f(x)$.
136. Mostre que é impossível determinar uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaça pelo menos duas das três condições enunciadas nos itens abaixo:
   (a) A função f satisfaz a desigualdade
   $$|f(u) - f(v)| > |u - v|, \quad \text{para todos os} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$
   (b) f é uma função injetiva.
   (c) f é uma função periódica.
   DICA: Use redução ao absurdo.

[2] Este exercício corresponde a uma extensão do exercício da **Lista 4 | Funções de Variável Real II (2016 & 2017)**. Foram adicionados a este 2 novos itens – (d) e (e), respetivamente.



$$\begin{cases} \sin^2(x) + \cancel{\cos^2(x)} = 1 \\ -\cancel{\cos^2(x)} + \sin^2(x) = \cos(2x) \end{cases} +$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad (I)$$

$$\left(f(x)\right)^2 = \left(\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

$$\left(f(x)\right)^2 = \frac{\sin^2\left((2n+1)\cdot\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Valendo-se da demonstração (I), temos:

$$\left(f(x)\right)^2 = \frac{\frac{1-\cos((2n+1).x)}{2}}{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\left(f(x)\right)^2 = \frac{1-\cos((2n+1).x)}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1-\cos(x)}$$

$$\left(f(x)\right)^2 = \frac{1-\cos((2n+1).x)}{1-\cos(x)}$$

Figura 4.5: Proposta de resolução do item (d) do **Exercício 135.** enviada por *V. Rocca* (06 de agosto de 2018).

5. Funções Circulares e suas Inversas

Este capítulo corresponde a uma reformulação da lista **Lista L4 | Funções de Variável Real II (2016 & 2017)**.

- 11 DE JULHO DE 2018
  - Foram excluídos os exercícios **18., 24., 35. & 36.** da **Lista L4 | Funções de Variável Real II**
  - Foi incluído um exercício de prova (2017). Este encontra-se devidamente assinalado no texto.
- **26 DE JULHO DE 2018**
  - Incluída figura para complementar resolução do **Exercício 145**.

5.1 Funções Trigonométricas e suas Inversas

137. Para a função $f(x) = 1 - \cos(3x)$:
    (a) Determine o domínio e o conjunto imagem (contradomínio).
    (b) Determine a expressão geral dos zeros.
    (c) Determine o conjunto de pontos para os quais f atinge o seu máximo (maximizantes) e o seu mínimo (minimizantes).
    (d) Resolva as inequações
        i. $f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq 0$
        ii. $f(x) > \frac{1}{2}$
        iii. $f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
138. Para a função $f(x) = 2 - 2\sin(5x)$:
    (a) Determine os seus zeros.
    (b) Determine o conjunto imagem (contradomínio).
    (c) Determine a parte par e a parte ímpar de f.
139. Use as igualdades $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ & $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$ para calcular:
    (a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{8}\right)\right)$
    (b) $\sin\left(\arccos(\frac{3}{5})\right)$
    (c) $\sin(\arctan(2))$
    (d) $\arccos(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right))$
140. Para as funções $f(x) = \arcsin(3x+2)$ e $g(x) = \arccos(x - 3x^2)$:
    (a) Determine o seu domínio.
    (b) Determine as respetivas inversas, explicitando o seu domínio e conjunto imagem (contradomínio).
141. Mostre que:
    (a) $\arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ é a função inversa de $\sec : [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
    (b) $\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ é a função inversa de $\operatorname{cosec} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
142. Use as igualdades $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$ & $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ para mostrar que:
    (a) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot(\theta)$.
    (b) $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, para todo o $-1 \leq x \leq 1$.
143. Com base no seu estudo de funções trigonomêtricas inversas indique:
    (a) Os zeros das funções $\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$ & $\operatorname{arcot}(x)$.
    (b) Os máximos e os mínimos das funções $\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$ & $\operatorname{arcot}(x)$, caso existam.
144. Para as constantes reais a, ω, ϕ & b tais que $a \neq 0$ & $\omega \neq 0$, considere a função f definida por
$$f(x) = a\sec(\omega x + \phi) + b.$$
    (a) Estude a paridade da função para valores $\phi = \pi$ & $\phi = \frac{3\pi}{2}$.
    (b) Determine o domínio e o conjunto imagem (contradomínio).
    (c) Determine o período fundamental de f.
    (d) Determine a função inversa de f termos da função arccos.
    DICA: Use o exercício **141**.
145. Encontre uma expressão para a inversa da função $a\cot(\omega x + \phi) + b$ em termos da função
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
(a, ω, ϕ & b são constantes reais tais que $a \neq 0$ & $\omega \neq 0$).
DICA: Use o item (b) do exercício **142**.
146. Determine a expressão analítica das inversas das funções do **Exercício 132.**, indicando o domínio e conjunto imagem (contradomínio).

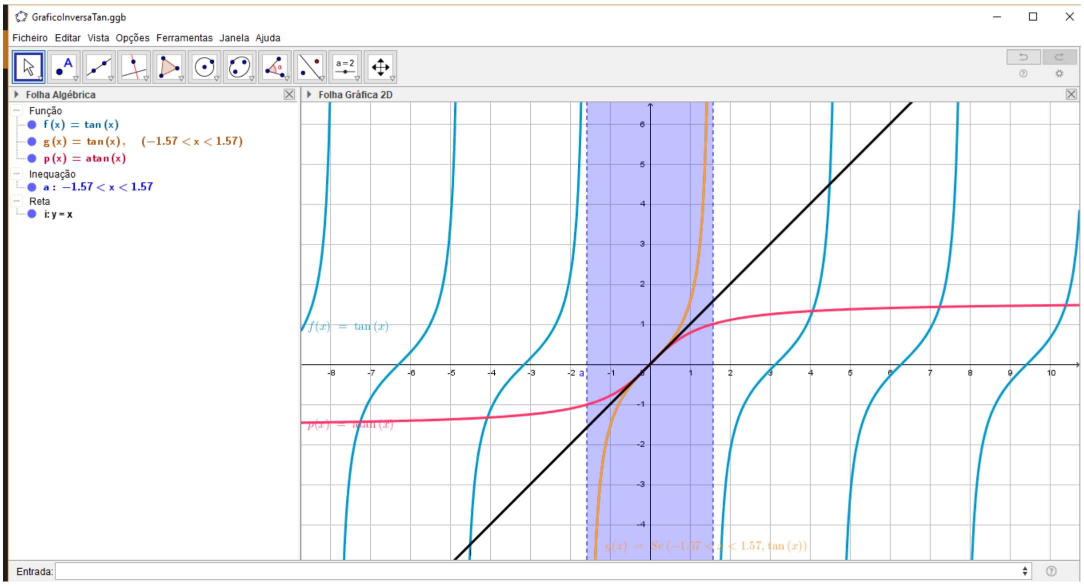


Figura 5.1: Gráfico da função tangente e sua inversa. Produzido com recurso ao arquivo GeoGebra `GraficoInversaTan.ggb`.

147. Para a função $f(x) = \arccos(1-2x^2)$:
    (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
    (b) Verifique que $f(x)$ e $2\arcsin(x)$ definem a mesma função.
    (c) Com base na identidade anterior diga, justificando, qual a inversa da função f, indicando o seu domínio e contradomínio.
148. Para a função $f(x) = \cos(n\arccos(x))$ (*polinômio de Chebyshev de primeiro tipo*, de ordem $n \in \mathbb{N}$):
    (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
    (b) Determine os zeros de f.
    (c) Determine o conjunto de pontos para os quais f atinge o seu máximo (maximizantes) e o seu mínimo (minimizantes).
    (d) Determine a função inversa de f^{-1}, indicando o seu domínio e contradomínio.
149. Resolva as seguintes inequações:
    (a) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4}$.
    (b) $\frac{\pi}{3} < \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$.
    (c) $\left|\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right| > \frac{\pi}{6}$.
150. **Questão da Prova SUB de 2017 (Turma A-Diurno)**
    Considere a função f definida pontualmente por $f(x) = 7^{\tan(\pi x)}$.
    (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
    (b) Determine o período de f.
    (c) Determine a expressão analítica, o domínio e o contradomínio da função inversa f^{-1}.

5.2 Funções Hiperbólicas e suas Inversas

151. Considere as funções $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
    (a) Estude o sinal e os zeros das funções cosh e de sinh.
    (b) Mostre que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(c) Use a igualdade anterior para mostrar que:
  i. $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ é a expressão analítica da inversa da função cosh.
  ii. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ é a expressão analítica da inversa da função sinh.

152. Considere as funções $\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ (função *tangente hiperbólica*) e $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ (função *sigmóide*).
  (a) Calcule o domínio e o conjunto imagem (contradomínio) de f.
  (b) Determine a expressão analítica das inversas das seguintes funções, indicando o domínio e conjunto imagem.
  (c) Mostre que $\tanh(x)=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=2f(2x)-1$.
  (d) Use a igualdade anterior para determinar a expressão analítica da inversa da função tanh, o domínio e o conjunto imagem (contradomínio).

153. Considere as funções $\coth(x)=\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ (função *cotangente hiperbólica*) e $c(x)=\frac{1-x}{1+x}$ (transformada hiperbólica de *Cayley*).
  (a) Mostre que a função $\coth(x)$ pode ser reescrita como a composição das funções $c(-x)$ e e^{-2x}.
  (b) Use o item anterior para determinar o domínio da função $\coth(x)$.
  (c) Calcule a função composta $coc(x)$ e a função inversa de $c(-x)$.
  (d) Use os items anteriores para determinar uma expressão analítica para a função inversa de $\coth(x)$.
  (e) Determine o contradomínio de $\coth(x)$ com base na sua função inversa.

154. Com base no **Exercício 115**, verifique as seguintes igualdades:
  (a) $\cosh(x)=\dfrac{1+\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.
  (b) $\sinh(x)=\dfrac{2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.
  (c) $e^x=\dfrac{1+\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}$.

155. Mostre que $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$. Use esta identidade hiperbólica para simplificar as seguintes expressões:
  (a) $\sinh\left(2\,\text{arcsinh}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$.
  (b) $\sinh\left(-2\,\text{arcsinh}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$.
  (c) $\sinh\left(2\,\text{arccosh}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$.
  (d) $\sinh\left(4\,\text{arccosh}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

  DICA: Use também o item (b) do exercício **151**.

156. Use as identidades hiperbólicas $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ e $\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=\cosh(2x)$:
  (a) Para encontrar uma inversa para as seguintes funções:
  (i) $\cosh^2(x)$ (ii) $\sinh^2(x)$.
  DICA: Use a inversa da função cosh determinada no item (c) i. do exercício **151**.
  (b) Para mostrar as seguintes identidades:
  (i) $\text{sech}^2(x)=1-\tanh^2(x)$ (ii) $\text{cosech}^2(x)=\coth^2(x)-1$.
  (c) Para encontrar uma inversa para as seguintes funções:
  (i) $\text{sech}^2(x)$ (ii) $\tanh^2(x)$ (iii) $\text{cotanh}^2(x)$ (iv) $\text{cosech}^2(x)$.
  DICA: Use as inversas da funções determinadas no item (a).

157. Mostre que $\text{sech}^2(x)\text{cossech}^2(x)=\dfrac{2}{\sinh(4x)}$. Use esta igualdade para:
  (a) Determinar o domínio e o contradomínio de $\text{sech}^2(x)\text{cossech}^2(x)$.
  (b) Para determinar a função inversa de $\text{sech}^2(x)\text{cossech}^2(x)$.

158. Use a inversa das funções $\tanh(x)$ e $\coth(x)$, e a propriedade $a^b = e^{b\ln(a)}$ para mostrar que:
   (a) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^t = e^{2t\operatorname{arctanh}(x)}$.
   (b) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^t = e^{2t\operatorname{arccoth}(x)}$.
   (c) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \cosh(2\operatorname{arctanh}(x))$.
   (d) $\dfrac{2x}{1-x^2} = \sinh(2\operatorname{arctanh}(x))$.

   DICA: Faça uso dos resultados obtidos nos exercícios **152, 153 & 115**.

159. Para as funções $f(x) = \operatorname{arccosh}(1-2x^2)$ e $g(x) = \operatorname{arccosh}(1+2x^2)$:
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f e g.
   (b) Use o item (c) do exercício **151** para verificar que $f(x)$ e $2\ \operatorname{arccosh}(x)$ resp. $g(x)$ e $2\ \operatorname{arcsinh}(x)$ definem a mesma função. O que pode concluir quanto à paridade das funções arccosh & arcsinh?
   (c) Com base na identidade anterior diga, justificando, qual a inversa das funções f e g, indicando o seu domínio e contradomínio.

6. Limites e Continuidade

Este capítulo corresponde a uma reformulação da lista **Lista L5 | Limites e Continuidade (2017)**.

- 11 de julho de 2018
  - Foram excluídos os exercícios **3., 5.,18. & 19.** da **Lista L5 | Limites e Continuidade**.
  - Foi adicionado 1 novo exercício: **180.**
  - Foi incluído um exercício de prova (2016 & 2017). Este encontra-se devidamente assinalado no texto.

6.1 Definição de Limite, Limites Laterais e Teorema do Confronto

160. Determine o valor $\delta > 0$ para os qual se verifica a condição

$$0 < \left| x - \frac{1}{5} \right| < \delta \implies \left| 0.66 - \frac{1-x}{1+x} \right| < 0.01$$

Uma interpretação geométrica do exercício pode ser visualizada a partir do *gif animado*[1]
`http://professor.ufabc.edu.br/_nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2017/LimiteFuncaoRaci`

161. Use a definição de limite para provar as seguintes identidades.
   (a) $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$
   (b) $\lim\limits_{x\to a} \left(x^2 - 2x\right) = a^2 - 2a$
   (c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$.

162. Diga, justificando, se as afirmações abaixo são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**). No caso de **V**, faça a respetiva demonstração. No caso de **F**, dê um contra-exemplo.
   (a) Se não existem os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, então os limites $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$ e $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x))$ também não existem.
   (b) Se existem os limites $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$, então o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ também existe.
   (c) Se os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ não existem, o limite $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$ também não existe.
   (d) Se existem os limites $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x))$, então o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ também existe.

163. Calcule os limites laterais da função $\mathrm{sgn}(x)$ (*função sinal*) em todos os pontos do seu domínio.

164. Use o *Teorema do Confronto*[2] para calcular o limite $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ para os itens abaixo:
   (a) g satisfaz a condição $|g(x)| \leq |x|^n \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (b) g satisfaz a condição $|g(x) - \tanh(x)| \leq |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
   (c) g satisfaz a condição $|xg(x) - \ln(1+x)| \leq x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Uma ilustração da aplicação do *Teorema do Confronto* para o **exercício 164.(a)** pode ser visualizado a partir do *gif animado*[3]
   `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio4a_L4.`

   DICA: Começe por reformular tudo o que aprendeu sobre limites fundamentais, envolvendo funções exponenciais e logarítmicas, em termos do *Teorema do Sanduíche/Teorema do Confronto*. Para dois dos itens do **exercício 164.** a *figura png*[4], cujo link segue abaixo, poderá vir a ser útil:
   `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2016/TeoremaConfront`

165. **QUESTÃO DA PROVA P2 DE 2016 (TURMA A2-NOTURNO)**
   Encontre o valor da constante c para a qual a função h é contínua em todo o seu domínio:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 + 8} & ,\text{se } x < -2 \\ cx + c & ,\text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

[1]**Ficheiro GeoGebra:** `http://professor.ufabc.edu.br/_nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2017/LimiteFuncaoRaciona`
[2]Em alguns livros, o *Teorema do Confronto* (en:*Squeezing Theorem*) aparece mencionado como *Teorema do Sanduiche* (en:*Sandwich Theorem*)
[3]**Ficheiro GeoGebra:** `Exercicio4a_L4.ggb`
[4]**Ficheiro GeoGebra:** `TeoremaConfrontoExpLog.ggb` (BASES MATEMÁTICAS 2016)

6.2 Continuidade Pontual e Limites Fundamentais

166. Considere a função[5] definida por $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{|x+1|}$.
    (a) Calcule o domínio de f.
    (b) Calcule, caso exista, o limite $\lim_{x \to -1} f(x)$. O que pode concluir quanto à continuidade de f nesse ponto?
167. Sejam f e g duas funções contínuas num ponto $a \in \mathbb{R}$.
    (a) Prove que as funções $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$, definidas pontualmente por $\max\{f(x), g(x)\}$ e $\min\{f(x), g(x)\}$, respetivamente são contínuas.
    (b) Diga, justificando, se a afirmação recíproca também é verdadeira:

    'Se $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são duas funções contínuas em a, então f e g também são funções contínuas em a.'

    OBSERVAÇÃO: Este exercício é muito semelhante ao **exercício 162.**
168. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos do seu domínio, mas que $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (*módulo da função f*) já seja contínua em todos os pontos do seu domínio.
169. **QUESTÃO DA PROVA P2 DE 2016 (TURMA A2-NOTURNO)**
    Considere a função f definida pontualmente por $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$.
    (a) Determine o domínio de f.
    (b) Determine a expressão analítica, o domínio e o contradomínio da função inversa f^{-1}.
    (c) Calcule o limite $\lim_{x \to 0} \frac{f^{-1}(x)}{x}$.
170. **QUESTÃO DA PROVA P2 DE 2016 (TURMA D-DIURNO)**
    Considere a função f definida pontualmente por $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x+1} + 1\right)$.
    (a) Determine o domínio de f.
    (b) Determine a expressão analítica, o domínio e o contradomínio da função inversa f^{-1}.
    (c) Calcule o limite $\lim_{x \to 0} x f^{-1}(x)$.
171. Faça a demonstração para as seguintes afirmações:
    (a) Se f é uma função que verifica $|f(x)| \leq |x|e^{-x}$, então f é contínua em $x = 0$.
    (b) Se g é uma função contínua em $x = 0$, e f uma função que satisfaz a $g(0) = 0$, e a desigualdade $|f(x)| \leq |g(x)|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, então f é contínua em $x = 0$.
    (c) Dê um exemplo[6] de duas funções f e g tais que $|f(x)| \leq |g(x)|$, para todo o x, mas f não é contínua[7] em $x = 0$, e $g(0) \neq 0$.
172. Use a substituição $x = f^{-1}(y)$ (função inversa) para calcular os seguintes limites:
    (a) $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(e^x - 1)}{x}$.
    (b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\arccos(x^2)}$.
    (c) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \arctan(x))}{x}$.

    DICA: Comece por resolver os exercícios indicados na *figura png*[8]
    `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2016/TeoremaConfrontoTrigon`

[5] Relembre o exercício **II.(b)** da Prova 1 (P1), do dia 24 de outubro de 2017.
[6] Um possível exemplo são as funções $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^x$.
[7] Outro exemplo pode ser construído, escolhendo $f(x) = e^{\frac{1}{|x|}}$. Consegue dar um exemplo de uma função g que satisfaz a condição $g(0) \neq 0$ e a desigualdade $f(x) < g(x)$?
[8] **Ficheiro GeoGebra:** `TeoremaConfrontoTrigonometricas.ggb` (BASES MATEMÁTICAS 2016)

173. **Questão da Prova SUB de 2017 (Turma A-Diurno)**
Considere as funções $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ e $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
(a) Mostre que f é a função inversa da função $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
(b) Mostre que a igualdade $g(2x^2-1) = 2f(x)$ é verdadeira, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
(c) Mostre ainda que para $x = \cosh(y)$ que a igualdade
$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{g(x)} = \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2y}$$
é verdadeira para todo o $x \in \mathbb{R}$. Use esta igualdade para calcular o limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{g(x)}$.

174. Calcule o limite[9] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

175. Mostre por indução em $n \in \mathbb{N}$ que[10] $\lim\limits_{x\to -1} \cos(n \arccos(x)) = (-1)^n$.
Dica: Veja a **Questão II** do exercício **2.** da Prova de Recuperação da Turma D-Diurno (2016).

176. **Questão da Prova SUB de 2017 (Turma A-Diurno)**
Encontre o valor das constantes a e b para as quais a função f, definida por
$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{, se } x > 0 \\ a & \text{, se } x = 0 \\ \dfrac{\tan(bx)}{\tan(ax)} & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$
é contínua em todos os pontos do seu domínio.

6.3 Limites Infinitos e no Infinito

177. Defina formalmente os seguintes conceitos de limite em termos de $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$:
(a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$
(b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$
(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$
(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$.

178. Usando os conceitos definidos no **exercício 177.**, mostre por definição as seguintes identidades:
(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$
(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{(1-x)^2} = 0$.

179. Usando os conceitos definidos no **exercício 177.**, mostre por definição as seguintes propriedades:
(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = y$ se e só se $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = y$ $(y \in \mathbb{R})$
(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = y$ se e só se $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = y$ $(y \in \mathbb{R})$
(c) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ se e só se $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

[9] Função do exercício **25.** da Lista L4.
[10] Função do exercício **34.** da Lista L4.

(d) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ se e só se $\lim_{x\to a^-} \frac{1}{f(x)} = 0$

180. Determine para que valores de a,b e c os limites abaixo dão zero (0).
   (a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+a}-bx-c\right)$.
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{ax^3-5x^2+8x}-bx-c\right)$.
181. Use o **Exercício 179.** para verificar as seguintes igualdades:
   (a) $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, onde e denota o *número de Neper*[11].
   (b) $\lim_{x\to 0^-} (-x)^{-\alpha} = +\infty$ $(0<\alpha<1)$
   (c) $\lim_{x\to -\infty} (-x)^{-\alpha} = 0$ $(0<\alpha<1)$

   DICA: Para os três itens anteriores, use a identidade $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ $(f(x)>0)$.

   (d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} +\infty & ,\text{se } m>n \\ \frac{p_m}{q_m} & ,\text{se } m=n \\ 0 & ,\text{se } m<n \end{cases}$,

   onde $p_m, q_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ denotam os coeficientes de maior grau dos polinômios $P_m(x)$ e $Q_n(x)$, respetivamente.

   (e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
182. Use o **exercício 179.** para averiguar se as seguintes funções são limitadas em $\mathbb{R}$.
   (a) $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$
   (b) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$.
183. **QUESTÃO DA PROVA REC DE 2016 (TURMA D-DIURNO)**
   Calcule os seguintes limites no infinito:
   (a) $\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x+5})$
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
   (c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.
184. **QUESTÃO DA PROVA REC DE 2017 (TURMA A-DIURNO)**
   Calcule os seguintes limites no infinito:
   (a) $\lim_{x\to+\infty} x+3-\sqrt{x^2+9}$.
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5-16x}{2x^4-x^3+x-2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

   DICA: O resultado

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

   pode vir a ser útil em algum momento.

[11] **CURIOSIDADE:** Uma interpretação deste limite fundamental pode ser visualizada a partir do *gif animado* `http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2016/JurosSimplesCompostos.gif` (BASES MATEMÁTICAS 2016).

185. Diga para que valores de a, os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ das funções abaixo dão $+\infty$ ou $-\infty$:
   (a) $f(x) = \tan(x)$
   (b) $f(x) = \cot(x)$
   (c) $f(x) = \sec(x)$
   (d) $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$
   (e) $f(x) = \coth(x)$
   (f) $f(x) = \operatorname{sech}(x)$.
186. Calcule os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ das funções abaixo[12]:
   (a) $f(x) = \arctan(x)$
   (b) $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$
   (c) $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$
   (d) $f(x) = \operatorname{arccosec}(x)$
   (e) $f(x) = \operatorname{arccoth}(x)$
   (f) $f(x) = \operatorname{arcsech}(x)$.

[12] Reveja, em particular, o exercício **27.** da Lista L4