Matemática I

Caderno Teórico-Prático

Jorge Marques

Nelson Faustino

Nuno Baeta

FACULDADE DE ECONOMIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA (FEUC)

Jorge Marques, Nelson Faustino & Nuno Baeta

Última versão, 29 de dezembro de 2020

Sumário

I Funções Reais de Uma Variável Real

Prefácio

Vivemos tempos de incerteza e de metamorfose. Tempos que nos levaram a pôr em causa todos os paradigmas pré-concebidos que tínhamos sobre ensino. E a preparar, em velocidade cruzeiro, a transição para um modelo Web 2.0 de ensino colaborativo que servisse de complemento às aulas presenciais. Este irá funcionar de forma síncrona (plataformas Zoom, UCTeacher e afins) e assíncrona (Inforestudante).

No que concerne à disciplina de Matemática I, já estamos a preparar o presente para salvaguardar o futuro. Essa preparação inclui a redação deste "Caderno Teórico-Prático" – que será actualizado semanalmente – para atender ao facto de nem todos vós poderem estar presentes em sala de aula, por conta das normas sanitárias adoptadas pela Faculdade de Economia. E para assegurar não irão perder o que foi leccionado em aula por motivos de força maior e/ou motivos técnicos (p.e. falhas no acesso à internet dentro e/ou fora da Faculdade).

Este caderno é uma continuação do trabalho que tem vindo a ser desenvolvido pelo Prof. Jorge Marques – actual coordenador da disciplina – desde a reforma curricular das disciplinas do curso de Gestão para os moldes do "Processo de Bolonha". Para além dos tradicionais Exercícios Propostos, este também inclui teoria, exemplos e desafios. Estes últimos são exercícios colocados estrategicamente ao longo do texto para testar e consolidar os vossos conhecimentos, à medida que vão avançando no vosso estudo. "Resolva você mesmo" e "Experimente você mesmo" serão duas das máximas que esperamos que venham a ser adoptadas por todos vós ao longo deste semestre.

Os professores:

Jorge Marques (TP2) – `jmarques@fe.uc.pt`

Nelson Faustino (TP3 & TP4) – `nelson@fe.uc.pt`

Nuno Baeta (TP1) – `nmsb@fe.uc.pt`

Figura 1: **Rembrandt Van Rijn - Tempestade no Mar da Galileia, 1633**. Este quadro serviu de capa ao livro *Against the Gods : The Remarkable Story of Risk*, 1998, de Peter L. Bernstein.

Funções Reais de Uma Variável Real

1. Funções Elementares e Gráficos

1.1 Revisão de Geometria Analítica

1.1.1 Referencial Cartesiano

Comecemos por fixar o referencial cartesiano no plano xOy. Este referencial é constituído por dois eixos perpendiculares, eixo horizontal Ox (ou eixo dos xx) e eixo vertical Oy (ou eixo dos yy) que se intersectam na origem O.

Em concreto, podemos representar qualquer ponto $P = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ na forma

$$(x,y) = (0,0) + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j},$$

onde $\overrightarrow{i} = (1,0)$ denota o vector director associado ao eixo Ox, e $\overrightarrow{j} = (0,1)$ o vector director associado ao eixo Oy. A origem do referencial corresponde ao ponto $O = (0,0)$.

Assim qualquer ponto P de $\mathbb{R}^2$ é representado pelas suas coordenadas $P = (x,y)$. Diz-se que x é a abcissa e y é a ordenada de P.

Note ainda que os eixos coordenados Ox e Oy dividem o plano em quatro quadrantes. São eles:

1^o **quadrante:** Definido pela conjugação de inequações $x > 0 \quad \wedge \quad y > 0$;
2^o **quadrante:** Definido pela conjugação de inequações $x < 0 \quad \wedge \quad y > 0$;
3^o **quadrante:** Definido pela conjugação de inequações $x < 0 \quad \wedge \quad y < 0$;
4^o **quadrante:** Definido pela conjugação de inequações $x > 0 \quad \wedge \quad y < 0$.

A definição abaixo permite-nos em particular estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os pontos do plano e o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

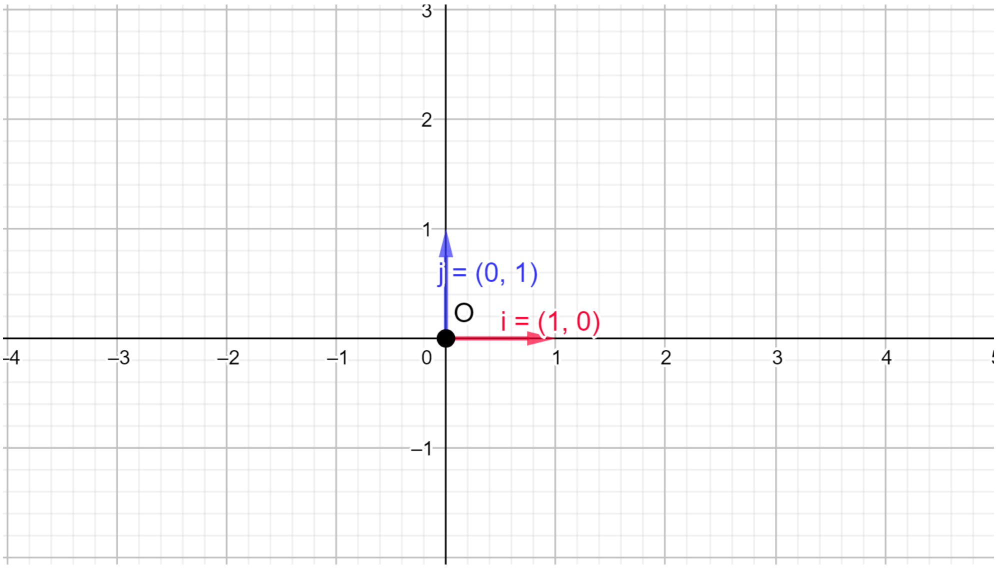


Figura 1.1: Na figura, o ponto $O = (0,0)$ representa a origem do referencial enquanto que os vetores a vermelho e azul representam os vectores directores associados aos eixos Ox e Oy, respectivamente.

Definição 1.1.1 — Produto cartesiano de conjuntos. Sejam D e Y dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.
O produto cartesiano de D por Y, o qual iremos denotar por $D \times Y$, corresponde ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$D \times Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in D \wedge y \in Y\}.$$

Desafio 1.1 — Quadrantes como Produto Cartesiano de Conjuntos. Use os intervalos da forma

$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \, : \, x > a\} \quad \& \quad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \, : \, x < b\}$$

para descrever os quatro quadrantes do plano cartesiano como **produto cartesiano de conjuntos**.

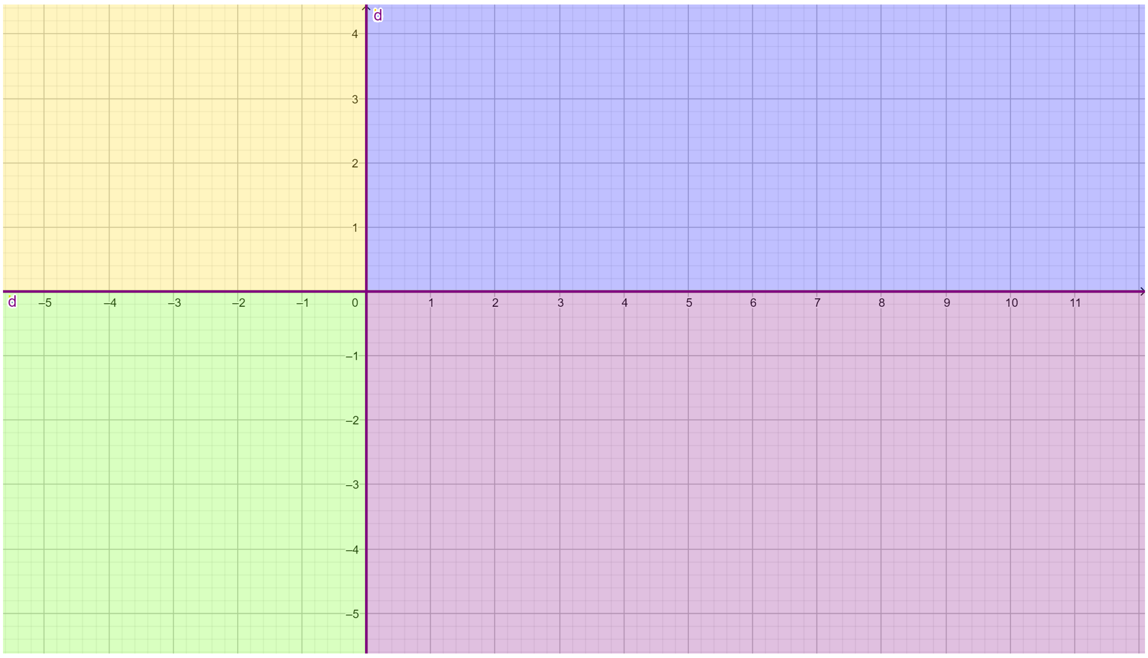


Figura 1.2: Representação dos quatro quadrantes do plano cartesiano: 1^o quadrante (a azul), 2^o quadrante (a amarelo), 3^o quadrante (a verde) e 4^o quadrante (a roxo).

1.1.2 Rectas: equações de rectas

Equações vectorial e normal da recta

Definição 1.1.2 — Equação vectorial da recta. A reta r que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem como vector director (u, v), não nulo, é dada por

$$r \ : \ (x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(u,v), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uma das coordenadas do vector $(u,v) \neq (0,0)$ que determina a direcção da recta r pode ser nula. Nomeadamente, se $v = 0$ a recta r é horizontal e se $u = 0$ trata-se duma recta vertical.

Observe que a recta r é representada pelo sistema de equações

$$r \ : \ \begin{cases} x = x_0 + \lambda u \\ y = y_0 + \lambda v \end{cases} . \tag{1.1}$$

Multiplicando a primeira equação por $v \neq 0$ e a segunda equação por $u \neq 0$, obtemos

$$\begin{cases} vx = vx_0 + \lambda uv \\ uy = uy_0 + \lambda uv \end{cases} . \tag{1.2}$$

Eliminando o parâmetro λ vem

$$v(x - x_0) - u(y - y_0) = 0.$$

Esta equação permite-nos facilmente deduzir o seguinte resultado:

Teorema 1.1.1 — Equação da recta na forma normal. Seja r uma reta que que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem (u, v), não nulo, como vector director. Então r pode ser escrita na forma normal:

$$ax + by + c = 0,$$

com

$$a = v, \quad b = -u \text{ e } \quad c = -ax_0 - by_0.$$

✓ As retas horizontal e vertical são casos particulares da equação normal

$$ax + by + c = 0.$$

Em concreto:

- Vector diretor do tipo $(u, 0)$ determina a **recta horizontal** de equação $y = \frac{c}{u}$ $(u \neq 0)$;
- Vector diretor do tipo $(0, v)$ determina a **recta vertical** de equação $x = -\frac{c}{v}$ $(v \neq 0)$.

Equação reduzida da recta

De seguida iremos focar a nossa atenção na equação reduzida da recta.

Definição 1.1.3 — Equação reduzida da reta. A recta de declive $m \in \mathbb{R}$ e ordenada na origem $b \in \mathbb{R}$ é definida pela equação

$$y = mx + b.$$

No caso de $m = 0$ dizemos que a **recta é horizontal**. No caso de $m \neq 0$ a **recta é oblíqua**.

Note que a **Definição 1.1.3** pode também ser facilmente deduzida a partir da equação vectorial da recta. Em concreto, assumindo que $u \neq 0$, com base na primeira equação obtemos

$$\lambda = \frac{x - x_0}{u}.$$

Substituindo agora o parâmetro λ na segunda equação, concluímos que

$$y = y_0 + \frac{v}{u}(x - x_0). \tag{1.3}$$

Da equação (1.3) segue que $m = \frac{v}{u}$ nos dá o **declive da equação reduzida** da recta r, enquanto $b = y_0 - \frac{v}{u}x_0$ a **ordenada na origem**.

✓ A equação (1.3) também poderia ser directamente deduzida a partir da equação normal da recta, assumindo $u \neq 0$. Com efeito, o **Teorema 1.1.1** diz-nos essencialmente que se (x, y) é um ponto da reta r, então

$$v(x - x_0) - u(y - y_0) = 0.$$

A equação (1.1.2) permite-nos ainda deduzir o seguinte resultado:

Teorema 1.1.2 — Declive. Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, tais que $x_2 \neq x_1$, dois pontos que pertencem à recta r. Então o declive da recta é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ideia da demonstração. Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos da recta r, com $x_2 \neq x_1$. Então os vectores $\overrightarrow{P_1P_2} = (y_2 - y_1, x_2 - x_1)$ e (u, v) são colineares, i.e.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda(u, v),$$

para algum $\lambda \neq 0$.

Daí obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \lambda u \\ y_2 - y_1 = \lambda v \end{cases}. \tag{1.4}$$

Como $m = \frac{v}{u}$, vem

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{1.5}$$

como pretendido.

■

Ordenada na origem: Após a obtenção do declive m, o valor de b pode ser calculado a partir de uma das equações abaixo:

- $b = y_1 - mx_1$;
- $b = y_2 - mx_2$.

O **Teorema 1.1.2** permite-nos concluir que o declive da recta e a ordenada na origem são independentes do par de pontos escolhidos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

Interpretação geométrica do declive da recta:

1. Supondo $y_2 \neq y_1$ (i.e. $m \neq 0$) construímos um triângulo rectângulo de vértices $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $Q = (x_2, y_1)$, cuja diagonal corresponde ao segmento de reta $[P_1P_2]$.
2. Seja β o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{P_1Q} = (x_2 - x_1, 0)$ e $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
3. Então
$$\tan(\beta) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Esta interpretação conduz-nos ao seguinte resultado:

Corolário 1.1.3 — Relação entre o declive e a Inclinação da recta. Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos da recta r, com $x_2 \neq x_1$ e α o ângulo formado entre a recta r e o semieixo positivo Ox, marcado no sentido anti-horário. Então o declive da recta é dado por

$$m = \tan(\alpha)$$

Diz-se que α, $0 \leq \alpha < \pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, nos dá a **inclinação da recta** .

Ideia da demonstração. Segue do facto de $(u,v) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $x_2 \neq x_1$, ser o vetor diretor da reta r e da inclinação da recta r – associada a segmentos de recta da forma $[Q_1 Q_2]$, com

$$Q_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1) \quad Q_2 = (\lambda x_2, \lambda y_2)$$

– ser independente da escolha do parâmetro $\lambda \neq 0$. Este último facto segue da igualdade

$$\frac{\lambda y_2 - \lambda y_1}{\lambda x_2 - \lambda x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$

■

✓

- Se $y_2 = y_1$ então a recta r tem declive nulo ($m = 0$) e inclinação nula ($\alpha = 0$). Neste caso estamos perante uma recta horizontal, de equação $y = y_1$.
- No caso de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rectas perpendiculares ao eixo Ox), estamos perante uma reta vertical ($x_2 = x_1$). Neste caso dizemos que o declive da recta é indefinido.

■ **Exemplo 1.1 — Revisão de Conceitos.** Na figura abaixo encontra-se representada a equação reduzida da reta, de equação

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

assim como o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ determinado a partir dos pontos P_1 e P_2 de coordenadas

$$P_1 = (1,2) \quad \text{e} \quad P_2 = (3,5).$$

Com base na construção poderá facilmente verificar os seguintes factos:

- $\overrightarrow{P_1P_2} = (2,3)$ define a hipotenusa do triângulo rectângulo de vértices P_1, P_2 e $Q = (3,2)$;
- Os vectores $\overrightarrow{P_1Q} = (2,0)$ e $\overrightarrow{QP_2} = (0,3)$ permitem-nos definir os catetos adjacente e oposto do triângulo rectângulo;
- O declive da reta é $m = \frac{3}{2}$;
- A ordenada na origem ($b = \frac{1}{2}$) pode ser calculada a partir da fórmula $b = y_1 - mx_1$, sendo $(x_1, y_1) = (1,2)$ [ponto P_1];
- A ordenada na origem ($b = \frac{1}{2}$) pode ainda ser calculada a partir da fórmula $b = y_2 - mx_2$, sendo $(x_2, y_2) = (3,5)$ [ponto P_2];
- O ângulo formado entre os vectores $\overrightarrow{P_1Q} = (2,0)$ e $\overrightarrow{P_1P_2} = (2,3)$ coincide com o ângulo formado entre a recta r e o eixo Ox.

■

Desafio 1.2 — Intersecção entre Rectas. Seja r a recta que passa pelos pontos de coordenadas $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_1 = (x_2, y_2)$, $x_2 \neq x_1$ e $y_2 \neq y_1$. Verifique que a interseção de r com as rectas da forma

$$y = y_1 \quad \& \quad x = x_2$$

define um triângulo rectângulo.

Adicionalmente, verifique que se

$$m = \tan(\alpha)$$

nos dá o declive, então a inclinação da recta, α, coincide com o ângulo formado entre a recta r com a recta de equação $y = y_2$.

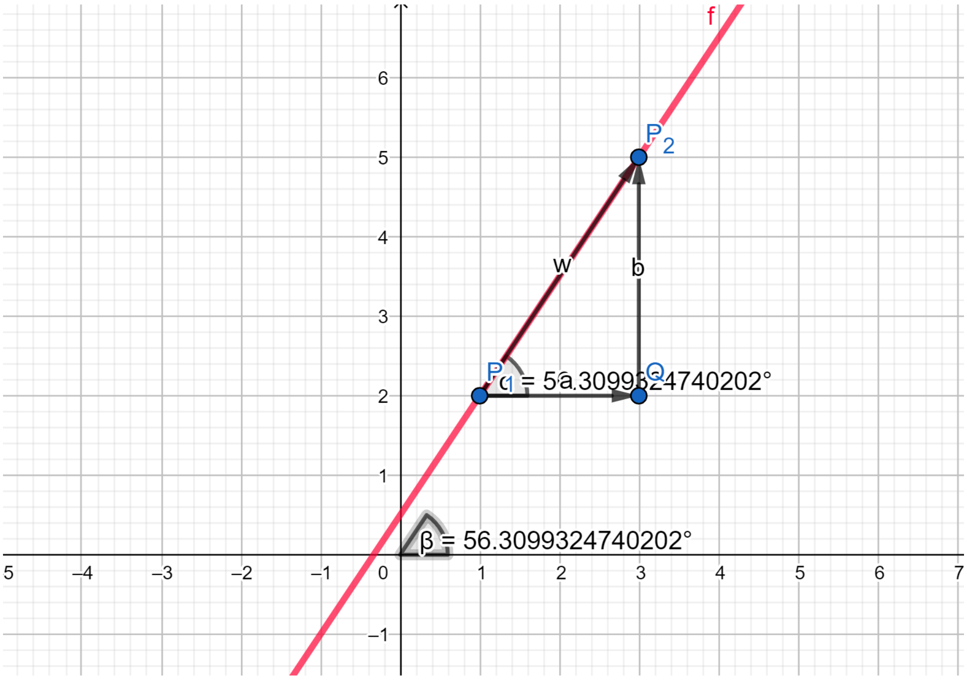


Figura 1.3: Reta de equação $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ que passa pelos pontos, de coordenadas $P_1 = (1,2)$ e $P_2 = (3,5)$.

Use como referências os pontos P_1 e P_2 do **Exemplo 1.1** para verificar as conclusões obtidas.

Posição entre duas rectas

Comecemos por observar que toda a equação da forma $ax + by + c = 0$ representa uma recta no plano xOy, sendo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ constantes tais que a e b não são simultaneamente nulas, i.e. $(a,b) \neq (0,0)$.

De facto, se $b \neq 0$ então a equação pode ser reescrita na forma reduzida com

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

mas se $b = 0$ temos uma reta vertical de equação $x = -\frac{c}{a}$, $a \neq 0$.

Adicionalmente, o **Teorema 1.1.1** permite-nos formular a noção de vector normal a uma recta usando o conceito de produto escalar entre dois vectores (u_1, v_1) e (u_2, v_2):

$$(u_1, v_1) \bullet (u_2, v_2) = u_1 u_2 + v_1 v_2. \tag{1.6}$$

Definição 1.1.4 — Vector normal à recta. Dizemos que o vector (a,b) é normal à recta

$$r\ :\ (x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(u,v),\quad \lambda \in \mathbb{R}$$

se para quaisquer pontos da $P = (x,y)$ da recta r, o vector $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ satisfaz a condição de perpendicularidade

$$(a,b) \bullet (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Segue naturalmente da definição anterior que se (a,b) é um vector normal à recta r, então $(u,v) = (b,-a)$ pode ser considerado como vector director da recta r, e vice versa.

Em particular, dados dois pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$:

- $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, ou o seu vector simétrico $\overrightarrow{P_2P_1}$, definem um vector director de r;
- $(a,b) = (y_2 - y_1, x_1 - x_2)$, ou o seu simétrico $-(a,b) = (y_1 - y_2, x_2 - x_1)$, são vectores normais a r.

Suponha agora que pretendemos determinar o ângulo formado entre duas rectas de declive $m_1 \neq 0$ e $m_2 \neq 0$, respectivamente. Para tal, observe que ambas as rectas podem ser reescritas na **forma normal**

$$m_1(x-0) + (-1)(y-b_1) = 0 \quad \& \quad m_2(x-0) + (-1)(y-b_2) = 0,$$

sendo b_1 e b_2 as respectivas ordenadas na origem.

Usando agora o facto de os declives m_1 e m_2 serem independentes dos pontos escolhidos da recta, podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$(u_1,v_1) = (1,m_1) \quad \& \quad (u_2,v_2) = (1,m_2) \tag{1.7}$$

definem vectores directores de r_1 e r_2, respectivamente.

Teorema 1.1.4 — Rectas paralelas e perpendiculares. Sejam r_1 e r_2 duas **rectas** no plano xOy de declives m_1 e m_2 respectivamente. Então:
(i) As rectas r_1 e r_2 são paralelas se, e só se, $m_1 = m_2$;
(ii) As rectas r_1 e r_2 são perpendiculares se, e só se, $m_1 m_2 = -1$.

Ideia da Prova. A prova de que a condição $m_1 = m_2$ corresponde a rectas paralelas é deveras trivial com base na equação (1.7).

Para a prova da condição de perpendicularidade entre rectas ($m_1 m_2 = -1$), comece por observar que dois vectores definidos pela equação (1.7) são perpendiculares se o produto escalar entre ambos vale zero (0), i.e.

$$(1,m_1) \bullet (1,m_2) = 0$$

Substituindo $(1,m_1)$ e $(1,m_2)$ na eq. (1.6) obtemos que m_1 e m_2 satisfazem a equação

$$1 + m_1 m_2 = 0.$$

■

O paralelismo e a perpendicularidade entre retas é independente da ordenada da origem das rectas r_1 e r_2. Adicionalmente, as equações envolvendo as **funções tangente e cotangente**:

$$m_1 = \tan(\alpha) \quad \& \quad m_2 = -\cot(\alpha)$$

permitem-nos relacionar declives e **inclinações de rectas** perpendiculares entre si.

Desafio 1.3 Determine a equação reduzida da reta s que atende às seguintes condições:

1. $P_1 = (1,2)$ é um ponto da recta s;
2. A recta s é perpendicular à recta r do **Exemplo 1.1**.

Após ter determinado a s, determine a equação reduzida da recta t paralela à recta s, e que passa pelo ponto $P_2 = (3,5)$.

1.1.3 Curvas: equações de circunferências e parábolas

Equação da circunferência

■ **Exemplo 1.2 — Equação da Circunferência.** A circunferência de centro $C = (\alpha, \beta)$ e raio $\rho > 0$ é definida pela equação

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2.$$

■

✓ Por definição, um ponto $P = (x, y)$ pertence à circunferência de centro $C = (\alpha, \beta)$ e raio $\rho > 0$ se a distância entre C e P é igual a ρ, isto é,

$$\overline{CP} = \rho \iff \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \rho \iff (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2.$$

Com base no que aprendemos na seção **1.1.2 Rectas: equações de rectas**, vamos procurar determinar a solução para o seguinte problema:

Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ da circunferência, de centro $C = (\alpha, \beta)$ e raio $\rho > 0$, como determinar a equação da recta r que é tangente à circunferência em P_0?

Resolução. Primeiramente, note que a distância entre C e P ($\overline{CP}$) pode ser determinada a partir da norma[1] do vector $\overrightarrow{CP}$, i.e.

$$\overline{CP} = \|\overrightarrow{CP}\|.$$

Em particular, se escolhermos um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ da circunferência é possível determinar uma recta r que passe por C, cujo vector director é dado por $\overrightarrow{CP_0} = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$, i.e.

$$r \ : \ (x, y) = (\alpha, \beta) + \lambda (x_0 - \alpha, y_0 - \beta), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, escolhendo p.e. $(a, b) = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$ resulta que a recta s, definida pela equação normal

$$s \ : \ a(x-\alpha) + b(y-\beta) = 0$$

é perpendicular à recta r. Em particular, a perpendicularidade entre r e s permite-nos concluir que a recta s toca a circunferência em P_0 uma, e uma só vez. ■

■ **Exemplo 1.3 — Recta Tangente à circunferência.** Para a circunferência de centro $C = (1, 0)$ e raio $\rho = 5$:

$$(x-1)^2 + y^2 = 25$$

podemos verificar que $P_0 = (-2, 4)$ é um ponto da circunferência e que o vector

$$\overrightarrow{CP_0} = (-3, 4)$$

define um vector director da recta r que passa por C.

Escolhendo agora $(a, b) = (-3, 4)$ e $(x_0, y_0) = (-2, 4)$, obtemos com base na equação

$$\underbrace{(a, b) \bullet (x - x_0, y - y_0)}_{a(x-x_0)+b(y-y_0)} = 0$$

segue que

$$-3(x+2) + 4(y-4) = 0 \iff -3x + 4y = 22$$

nos dá a equação da recta pretendida.

[1] A norma $\|(a, b)\|$ do vector $\overrightarrow{CP} = (a, b)$ pode ser calculada com base na igualdade $\|(a, b)\|^2 = (a, b) \bullet (a, b)$, onde $\bullet$ denota o produto escalar.

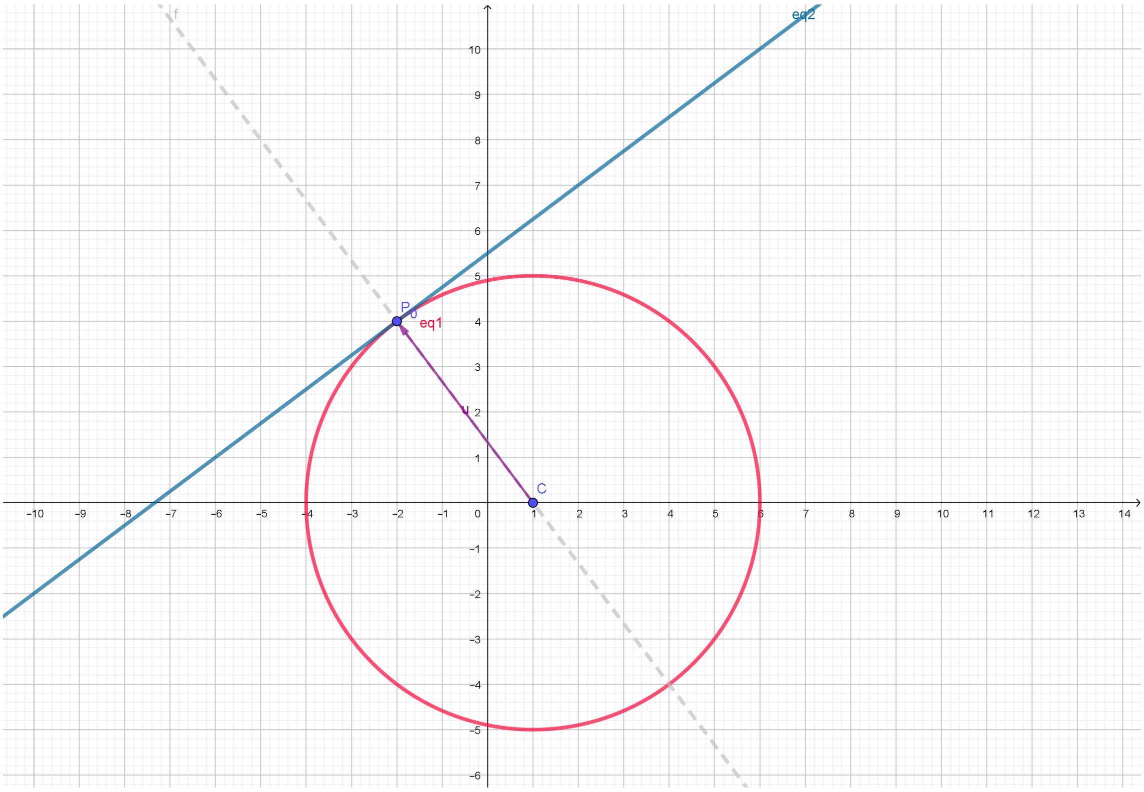


Figura 1.4: A circunferência a vermelho representa a circunferência de centro $C = (1,0)$ e raio $\rho = 5$; A recta tangente que passa no ponto $P_0 = (-2,4)$ (a azul) foi determinada com base na relação de perpendicularidade da recta a tracejado (cinza). Para tal, fixámos $(a,b) = (-3,4)$ (vector a lilás) como sendo o vector normal à recta a azul.

■

No próximo desafio pretende-se que realize o procedimento recíproco, i.e. determinar a equação da circunfência, conhecendo:

- o centro $C = (\alpha, \beta)$ da circunferência;
- a equação da recta tangente – $ax + by + c = 0$.

Desafio 1.4 Determine a equação da circunferência sabendo que:
(i) O centro é $C = (-4,-2)$ e é tangente à recta de equação $x = 1$;
(ii) O centro é $C = (3,-2)$ e é tangente à recta de equação $x + 2y = 6$.

Equação da parábola

Definição 1.1.5 Fixemos uma recta d e um ponto F. Diz-se que a parábola é o lugar geométrico do conjunto de todos os pontos do plano xOy que são equidistantes de F e d.
Chamamos a F o foco e a d a directriz.

Apresentamos algumas características:

- A parábola tem um eixo de simetria que é uma recta que passa por F.
- O eixo de simetria da parábola é perpendicular à recta d.

- O vértice é o único ponto da parábola que pertence ao eixo de simetria.

■ **Exemplo 1.4 — Equação da parábola com eixo Ox.** Consideremos que a parábola tem vértice $V = (0,0)$ e que o seu eixo de simetria é o eixo Ox.
Então $F = (0, \frac{p}{2})$ e $y = -\frac{p}{2}$ é a equação da directriz, onde p é uma constante, não-nula. Sejam $P = (x,y)$ um ponto qualquer da parábola e $Q = (x, -\frac{p}{2})$ um ponto da directriz. Por definição de parábola temos $\overline{PF} = \overline{QF}$, ou seja,

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \Longleftrightarrow x^2 - py = py \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2p}x^2$$

Fazendo $a = \frac{1}{2p}$, escrevemos $y = ax^2$, $a \neq 0$. ■

Supondo que o vértice da parábola pode ser qualquer ponto do plano apresentamos a equação geral duma parábola com eixo de simetria vertical.

■ **Exemplo 1.5 Equação da parábola com eixo de simetria vertical**

A parábola de vértice $V = (h,k)$ e eixo de simetria $x = h$ é definida pela equação

$$y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$$

.

(i) Se $a > 0$ a parábola tem a concavidade voltada para cima;
(ii) Se $a < 0$ a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

■

■ **Exemplo 1.6 Equação da parábola com eixo de simetria horizontal**

A parábola de vértice $V = (p,q)$ e eixo de simetria $y = q$ é definida pela equação

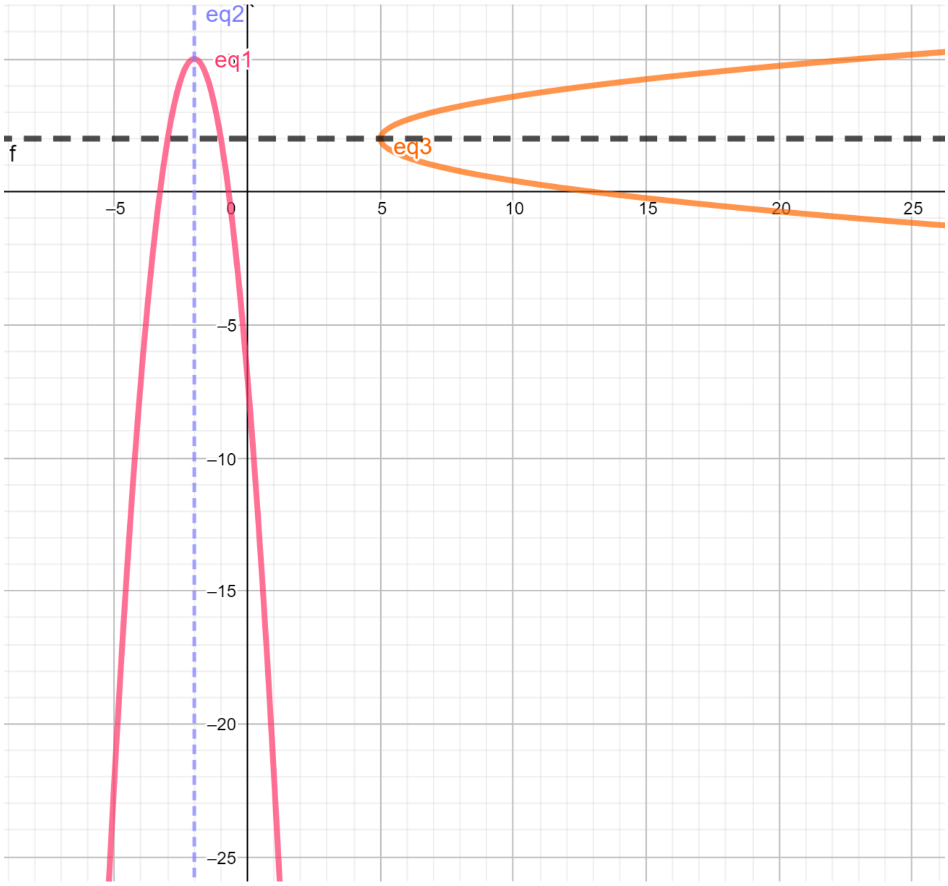
$$x = a(y-p)^2 + q,\ a \neq 0$$

.

(i) Se $a > 0$ a parábola tem a concavidade voltada para a direita;
(ii) Se $a < 0$ a parábola tem a concavidade voltada para a esquerda.

■

Na figura abaixo, a parábola de equação $y = 5 - 3(x+2)^2$ (a magenta) apresenta $x = -2$ (recta tracejada a azul) como eixo de simetria vertical e concavidade voltada para baixo, enquanto que a parábola de equação $x = 5 + 2(y-2)^2$ (a laranja) apresenta $y = 2$ (recta tracejada a preto) como eixo de simetria horizontal e concavidade voltada para a direita.



1.2 Definições, Representações e Aplicações

1.2.1 Representação Analítica: Domínio e Contradomínio

No estudo de funções reais de variável real iremos assumir que D e Y são dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios, i.e.

$$D \subseteq \mathbb{R} \quad \& \quad Y \subseteq \mathbb{R}.$$

Definição 1.2.1 — Função real de variável real. Função definida em D e com valores em Y: É uma correspondência que a cada elemento $x \in D$ associa um único elemento $y \in Y$ através de $y = f(x)$. Usualmente representa-se por

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

O conjunto D designa-se por domínio de f e o conjunto

$$D' = \{y \in Y : y = f(x), x \in D\}$$

que satisfaz $D' \subseteq Y$ representa o contradomínio de f. Ao conjunto Y chama-se conjunto de chegada.

Notação 1.1 — Domínio e contradomínio de f. É também comum usar as notações D_f e D'_f quando nos referimos ao domínio e ao contradomínio de $f: D \to Y$, respectivamente.

Sempre que se justifique usaremos estas notações para evitar possíveis ambiguidades.

Notação 1.2 — Variável dependente vs. Variável Independente. Frequentemente, vamos usar a variável x, dita variável independente, para representar os elementos do domínio de f, chamados de objectos. Por sua vez, a variável y, dita variável dependente, é usada para representar os elementos do contradomínio de f, chamados de imagens.

Podemos agora afirmar que o domínio D da função é o conjunto de todos os objectos para os quais existem imagens e o contradomínio da função é o conjunto de todas as imagens.

Não se deve confundir $f(x)$ com f visto que $f(x)$ indica o valor que a função assume no número real x enquanto f fica definida não só pela expressão $f(x)$ mas também pelo domínio e conjunto de chegada.

Notação 1.3 — Função $f : D \to D'$. Por uma questão de simplicidade, frequentemente iremos usar a notação

$$x \mapsto y = f(x)$$

sempre que pretendamos definir a função f pontualmente pela expressão $f(x)$.

Assim, sempre que recorrermos a esta notação ao longo do texto estaremos a assumir implicitamente que f é uma função de domínio D e de conjunto de chegada $Y = D'$.

1.2.2 Representação Geométrica: Gráfico

Definição 1.2.2 O gráfico da função $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pontos do plano xOy:

$$graf(f) = \{(x,y) : y = f(x), x \in D\}.$$

O gráfico de f é precisamente o produto cartesiano de D por D', escreve-se, $graf(f) = D \times D'$, logo é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Teste da recta vertical: Geometricamente, dizemos que uma curva representada por um subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ define uma função $f : D \to Y$ se, e só se, para todo o $d \in D$ a recta vertical $x = d$ intersecta uma, e uma só vez, S.

Exemplos de funções definidas a partir de curvas

■ **Exemplo 1.7 — Equação da recta.** É evidente que a uma recta não-vertical corresponde um gráfico de uma função. Assim, a equação reduzida da recta introduzida na **Definição 1.1.3** dá-nos a representação gráfica da chamada função afim: ■

Definição 1.2.3 — Função Afim - Polinómio de grau 1. A função afim f é definida pela expressão $f(x) = mx + b$, sendo $m \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ constantes. O seu domínio é $\mathbb{R}$.
Em particular, diz-se ainda que:
(i) f é função constante se $m = 0$;
(ii) f é função linear se $b = 0$ e $m \neq 0$.

■ **Exemplo 1.8 — Equação da parábola.** O conjunto de pontos

$$\{(x,x^2) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$$

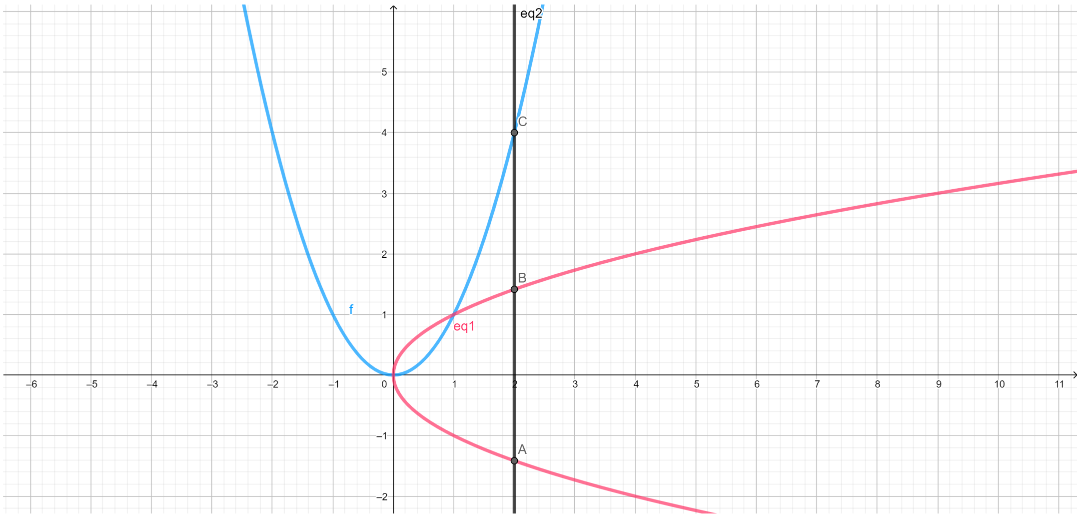
representa a parábola de equação $y = x^2$ no plano xOy. Esta curva permite-nos definir uma função (função quadrática), de domínio $\mathbb{R}$, representada na figura abaixo a azul ciano.

No entanto, o conjunto de pontos

$$\{(y^2, y) \;:\; y \in \mathbb{R}\}$$

definido no plano xOy pela parábola de equação $x = y^2$ – representado na figura abaixo a magenta – já não define uma função uma vez que a **reta vertical** $x = d$ $(d > 0)$ intersecta $x = y^2$ em dois pontos distintos, de coordenadas

$$A = (d, -\sqrt{d}) \text{ e } B = (d, \sqrt{d}).$$



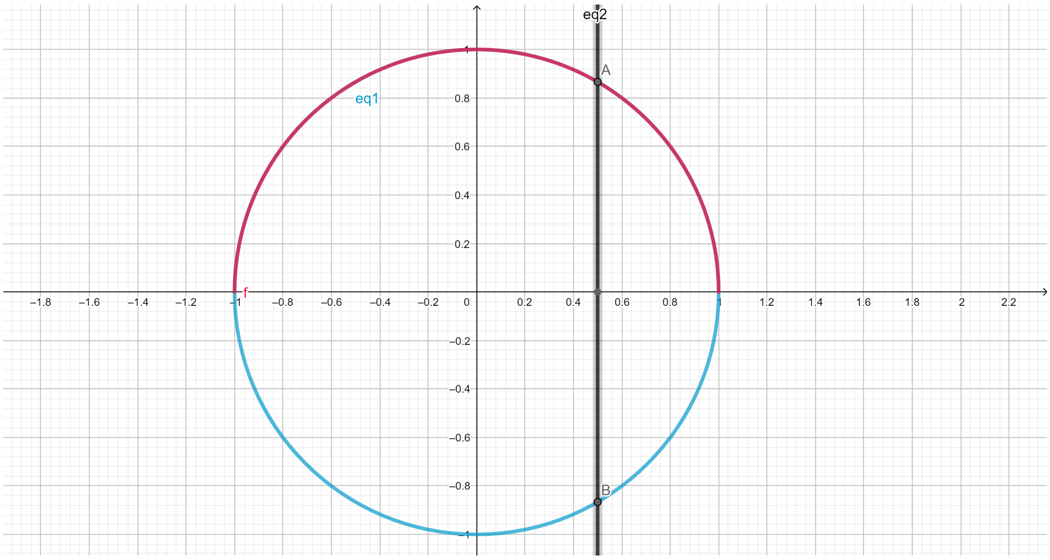
■

✓ Essencialmente, o gráfico da **função raiz quadrada** foi construído a partir da parábola de equação $x = y^2$ do **Exemplo 1.8**, excluindo todos os pontos abaixo do eixo Ox de modo a garantir que o gráfico apenas intersectasse a recta vertical $x = d$ $(d > 0)$ uma, e uma só vez.

■ **Exemplo 1.9 — Equação da circunferência.** Para que a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ defina a função, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$, teremos de considerar apenas a semicircunferência situada acima do eixo Ox $(y = 0)$, assim como os pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 0)$ obtidos pela interseção das equações

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad y = 0$$

tal qual representado na figura abaixo:



■

O gráfico da função $x \mapsto y = \sqrt{1-x^2}$ permite-nos dizer que

$$D_f = [-1,1] \quad \& \quad D'_f = [0,1],$$

onde $[a,b]$ denota o intervalo da forma

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x \leq b\}.$$

Como iremos ver mais à frente, o intervalo $[-1,1]$ é o conjunto solução da inequação quadrática

$$1 - x^2 \geq 0,$$

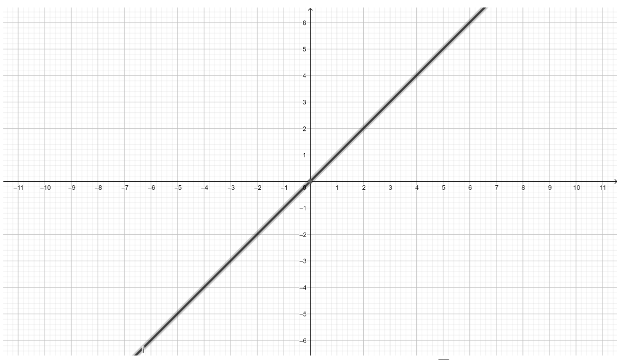
enquanto o intervalo $[0,1]$ corresponde ao conjunto solução do sistema de inequações

$$1 - y^2 \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0.$$

Exemplos de funções elementares

■ **Exemplo 1.10 — Função Identidade.** É a função que a cada número real faz corresponder o próprio número e a sua representação gráfica é a bissectriz dos quadrantes ímpares, i.e,

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = x \end{aligned}$$



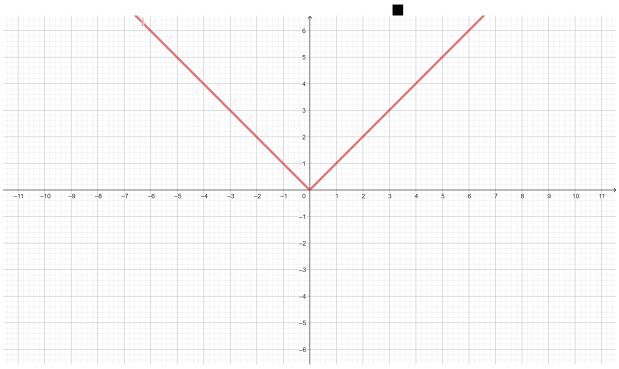
■

■ **Exemplo 1.11 — Função Módulo.** A função módulo que a cada número real faz corresponder o seu valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

i.e., $x \mapsto y = |x|$, é uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[0,+\infty[$. Trata-se de uma função definida por ramos cuja representação gráfica – **em forma de** V – é a reunião de duas semirectas de origem $O = (0,0)$ obtidas a partir da bissectriz dos quadrantes pares (para valores de $x < 0$), e da bissectriz dos quadrantes ímpares (para valores de $x \geq 0$).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & y = |x| \end{array}$$



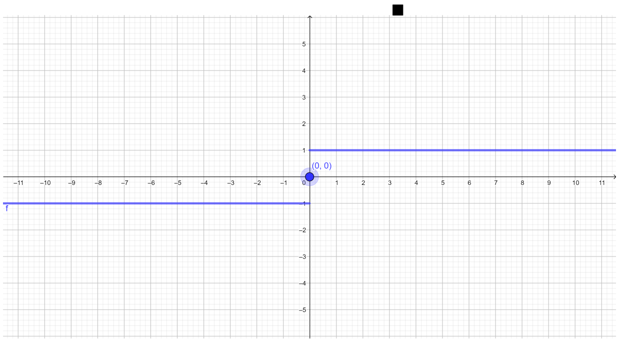
■

■ **Exemplo 1.12 — Função sinal.** A função sinal, $x \mapsto \text{sgn}(x)$:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

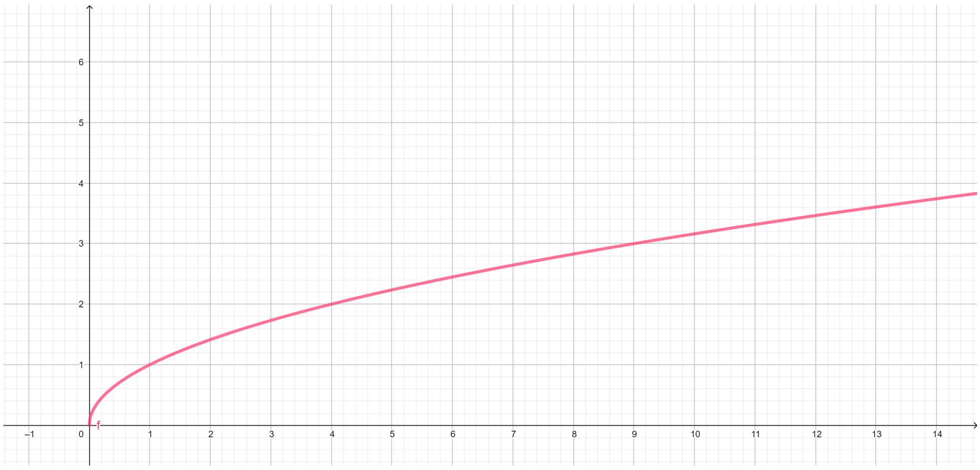
é uma função definida por ramos de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\{-1,0,1\}$, cujo gráfico é constituído por duas semirectas de equações $y = -1$ (para valores de $x < 0$), $y = 1$ (para valores de $x > 0$) e pela origem do referencial – $(0,0) = (0,\text{sgn}(0))$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{-1,0,1\} \\ x & \longmapsto & y = \text{sgn}(x) \end{array}$$



■

■ **Exemplo 1.13 — Função raiz quadrada.** A função raiz quadrada, $x \mapsto \sqrt{x}$, cujo gráfico é dado pela figura abaixo:



é definida a partir da parábola de equação $x = y^2$, para valores de $y \geq 0$, i.e.

$$\{(y^2, y) \ : y \geq 0\} = \{(x,y) \ : \ y = \sqrt{x}, \ x \geq 0\}.$$

O gráfico da raiz quadrada permite-nos indicar que

$$D_f = [0, +\infty[\quad \& \quad D'_f = [0, +\infty[,$$

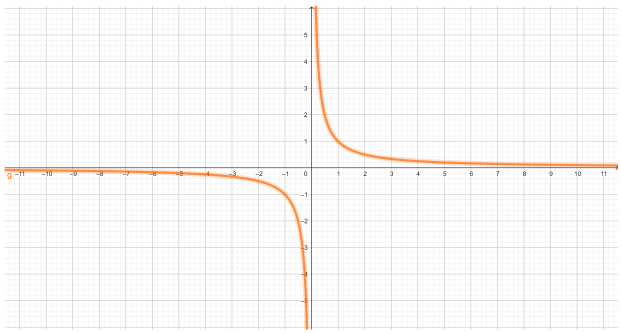
onde $[a, +\infty)$ denota o intervalo

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq a\}.$$

■

■ **Exemplo 1.14 — Função Reciproca da Identidade.** É a função que a cada número real, não nulo, faz corresponder o seu inverso e a sua representação gráfica é uma hipérbole, i.e,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ x & \longmapsto & y = \dfrac{1}{x} \end{array}$$



■

Desafio 1.5 — Equações envolvendo módulos. Esboce a curva de equação

$$x = |y|$$

no plano xOy.

Verifique que a curva acima corresponde a uma reflexão do gráfico da função módulo relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares.

De seguida aplique o **teste da recta vertical** para concluir que a curva acima não define uma função.

RECURSO À TECNOLOGIA: Insira os comandos `y=abs(x)` & `x=abs(y)` no calculadora GeoGebra, disponível a partir do link

`https://www.geogebra.org/calculator`.

Desafio 1.6 — Função raiz quadrada vs. função módulo. Mostre que a função, $x \mapsto y = \sqrt{x^2}$, coincide com a função módulo, $x \mapsto y = |x|$. Adicionalmente, verifique se as funções, $x \mapsto y = \sqrt{x^2}$ e $x \mapsto y = (\sqrt{x})^2$ são iguais.

SUGESTÃO: Comece por mostrar que $|x|^2 = x^2$. Depois faça uso da definição de raiz quadrada, abordada no **Exemplo 1.13**.

RECURSO À TECNOLOGIA: Insira os comandos $sqrt(x^2)$ & $(sqrt(x))^2$ no calculadora GeoGebra, disponível a partir do link

`https://www.geogebra.org/calculator`.

1.2.3 Aplicação em Economia - Leis da procura e da oferta

O conceito de função é um instrumento matemático utilizado para estabelecer leis ou princípios entre variáveis. Os economistas estudam a determinação de preços de um bem de consumo num mercado, onde os agentes económicos se encontram para realizarem transações. Os preços num mercado de concorrência perfeita são estabelecidos pelas leis da procura e da oferta. O economista João César das Neves dizia que: "A forma mais sugestiva de abordar um mercado é através de um gráfico que a maioria dos economistas usa intensamente. Ele é, verdadeiramente, o canivete suiço do economista. Foi popularizada por um dos maiores economistas de todos os tempos Alfred Marshall, e por isso se chama cruz marshalliana. Neste gráfico cruzam-se duas curvas: a curva da procura e a curva da oferta."

Por um lado, a curva da procura, de equação $p = D(q)$, relaciona a quantidade $q \geq 0$ procurada de um bem por parte dos consumidores ao preço unitário de $p \geq 0$ unidades monetárias (u.m.). Trata-se de uma curva decrescente uma vez que a quantidade procurada de um bem varia no sentido inverso do seu preço. De facto, à medida que o preço aumenta a quantidade procurada diminui e vice-versa.

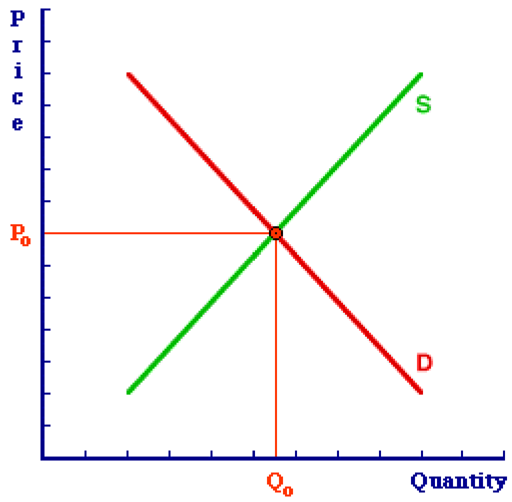
Por outro lado, a curva da oferta de equação $p = S(q)$ expressa a quantidade do mesmo bem que os produtores estão dispostos a produzir e a vender varia no mesmo sentido do seu preço. De facto, à medida que o preço aumenta a quantidade oferecida aumenta e vice-versa.

Os interesses antagónicos dos consumidores e dos produtores vão determinar o equilíbrio no mercado, que ocorre quando a quantidade procurada do bem coincide com a quantidade oferecida, isto é,

$$D(q_0) = S(q_0).$$

Assim sendo ao correspondente preço, p_0, chama-se preço de equilíbrio.

Assinale-se que para representar geometricamente as curvas da procura e da oferta, os economistas usam o referencial $Q \circ P$ por razões históricas, colocando os valores de q (variável dependente) sobre o eixo horizontal e os valores de p (variável independente) sobre o eixo vertical.



Desafio 1.7 — Funções de procura e oferta. Considere um mercado caracterizado pelas funções procura e oferta, definidas respectivamente por:

$$D(q) = 20 - q^2 \quad ; \quad S(q) = 3q + 2\,.$$

(a) Determine os domínios de D e S.
(b) Determine os contradomínios de D e S.
(b) Calcule o preço p_0 e a quantidade q_0 de equilíbrio do bem. Qual é o significado geométrico do ponto $E = (q_0, p_0)$?
(c) Trace as curvas da procura e da oferta no referencial qOp.

1.3 Propriedades de Funções: Abordagens Analítica e Gráfica

1.3.1 Injectividade e Sobrejectividade

Definição 1.3.1 — Função Injectiva, Sobrejectiva e Bijectiva. Diz-se que a função $f: D \to Y$:
(i) é injectiva se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{para} \quad x_1, x_2 \in D.$$

(ii) é sobrejectiva se se $D' = Y$.

(iii) é bijectiva se é simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Na definição de injectividade, a implicação

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

garante-nos que para cada $y \in D'$ a equação $y = f(x)$ admite solução única.

Em vários livros de texto, esta implicação é-nos apresentada na sua forma equivalente

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

✓ Se determinarmos dois pontos $x_1, x_2 \in D$ para os quais

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{e} \quad x_1 \neq x_2$$

então provamos que f **não é injectiva**.

Podemos então definir um critério, do ponto de vista geométrico, para estudar a injectividade de funções.

✓ **Teste da recta horizontal:** Observemos que a recta horizontal de equação $y = b$ não intersecta o gráfico de uma função injectiva em mais do que um ponto. Assim, se $b \in D'$ essa recta intersecta o gráfico num único ponto, mas se $b \notin D'$ essa recta não intersecta-o.

Por outro lado, para demonstrarmos que uma função $f : D \to Y$ **é sobrejectiva**, é suficiente mostrar a inclusão

$$Y \subseteq D',$$

já que a inclusão

$$D' \subseteq Y$$

é sempre verdadeira, por definição de contradomínio.

✓ Por outras palavras, mostrar que uma função é sobrejetiva é equivalente a mostrar que para todos os elementos de $y \in Y$ (conjunto de chegada) a equação $y = f(x)$ admite pelo menos uma solução.

Ora, caso pretendamos demonstrar que uma função **não é sobrejetiva**, basta determinarmos/encontrarmos pelo menos um elemento y do conjunto de chegada para o qual a equação $y = f(x)$ não admite solução.

■ **Exemplo 1.15 — Função bijectiva.** Ao contrário da função $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$, definida por $f(x) = x^2$, a **função raiz quadrada** $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ $(x \mapsto y = \sqrt{x})$ abordada no **Exemplo 1.13** é injectiva e sobrejectiva, logo bijectiva. ■

■ **Exemplo 1.16 — Função injectiva mas não sobrejectiva.** $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2-x}$$

é injectiva mas não é sobrejectiva.

Prova da injectividade:
Com efeito, suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{2\}$ arbitrários, ou seja

$$\frac{x_1}{2-x_1} = \frac{x_2}{2-x_2}$$

Note que a igualdade anterior é equivalente a termos

$$x_1(2-x_2) = x_2(2-x_1) \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 - x_1x_2 = 2x_2 - x_1x_2.$$

Simplificando a igualdade acima concluímos que $x_1 = x_2$, como pretendido.

Prova da não sobrejectividade:
Consideremos a equação $y = f(x)$, sendo $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Se escolhermos $y = -1$, obtemos

$$\frac{x}{2-x} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x - 2.$$

Note que a equação acima não admite solução. Logo provámos a existência de um $y \in \mathbb{R}$ para o qual a equação $y = f(x)$ não admite solução.

Portanto, f não é sobrejectiva.

■

■ **Exemplo 1.17 — Função não injectiva mas sobrejectiva.** Consideremos a função $f:[-1,1]\to[0,1]$ definida por $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, cujo gráfico foi obtido no **Exemplo 1.9**. Esta função não é injectiva uma vez que para $x_1=-1$ e $x_2=1$ temos $f(-1)=f(1)=0$.

No entanto f é sobrejectiva uma vez que $D'=[0,1]$. ■

✓ Se tivéssemos escolhido $Y=[-1,1]$ como conjunto de chegada da função $f:[-1,1]\to Y$ do exemplo anterior, esta já não seria sobrejectiva uma vez que a equação

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

não admite solução para valores de $-1\leq y<0$.

Graficamente, este facto poderia ser verificado mostrando por exemplo que a recta horizontal $y=-1$ não intersecta o gráfico de f.

Desafio 1.8 Determine os conjuntos D e Y para os quais a função $f:D\to Y$ definida por

$$f(x)=\frac{x}{3-5x}$$

é bijectiva.

Desafio 1.9 Esboce o gráfico da função $f:[-1,1]\to[0,1]$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{se } 0\leq x\leq 1\\ -\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1\leq x<0\end{cases}$$

De seguida, verifique graficamente se esta função é bijectiva.

1.3.2 Zeros e Sinal

Definição 1.3.2 — Zeros da função. Seja $f:D\to Y$. Diz-se que o real a é um zero de f se $a\in D$ e $f(a)=0$.

O conjunto de todos os zeros de f é representado por

$$Z(f)=\{x\in D: f(x)=0\}.$$

✓ Decorre da definição acima que se a equação $f(x)=0$ é impossível em $\mathbb{R}$, então o conjunto dos zeros de f é vazio, i.e. $Z(f)=\emptyset$.

✓ Da definição de gráfico de uma função tem-se que (a,b) é um **ponto de** $graf(f)$ se, e só se $a\in D$ é um **zero da função**

$$x\mapsto y=f(x)-b.$$

Os pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados obtém-se da seguinte forma:

- Se $0\in D$ então $P=(0,f(0))$ é o único ponto do gráfico de f que toca o eixo Oy;
- Se a é um zero de f então $Q=(a,0)$ é um ponto do gráfico de f que intersecta o eixo Ox.

✓ As funções identidade ($x\mapsto y=x$), módulo ($x\mapsto y=|x|$) e sinal ($x\mapsto y=\mathrm{sgn}(x)$) tratadas no **Exemplo 1.10**, **Exemplo 1.11** e **Exemplo 1.12**, respectivamente, são exemplos em que a origem $O=(0,0)$ do referencial xOy é o único ponto pertencente ao eixo Oy comum a todos os gráficos.

Corolário 1.3.1 — Zeros vs. Injectividade. Se $f : D \to Y$ tem, pelo menos dois zeros, então f **não é injectiva**.

Ideia da Demonstração. Segue automaticamente da definição de injectividade de uma função $f : D \to Y$. ■

Com base na caracterização descrita na Seção 1.3.1, podemos facilmente concluir que toda a função injectiva $f : D \to Y$ tem **no máximo um único zero** (i.e. a equação $f(x) = 0$ admite uma única solução ou é impossível). Esta caracterização é equivalente ao **Corolário 1.3.1**.

■ **Exemplo 1.18 — Zeros da função afim.** Consideremos a função afim f de domínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = mx + b$ com $m \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. O seu gráfico (é uma recta) intersecta o eixo Ox num único ponto pois a função tem apenas um zero de valor $x = -\frac{b}{m}$.
Porém, a função constante definida por $f(x) = b$ com $b \neq 0$ não tem zeros pois $f(x) = 0$ é uma equação impossível em $\mathbb{R}$, ou seja, $Z(f) = \emptyset$.

Já a função nula, $x \mapsto y = 0$, para todo o real x tem uma infinidade de zeros uma vez que $Z(g) = \mathbb{R}$. ■

■ **Exemplo 1.19 — Nem toda a função com um único zero é injectiva.** A função modular, $x \mapsto y = |2x + 3|$, tem apenas um único zero de valor $x = -\frac{3}{2}$.

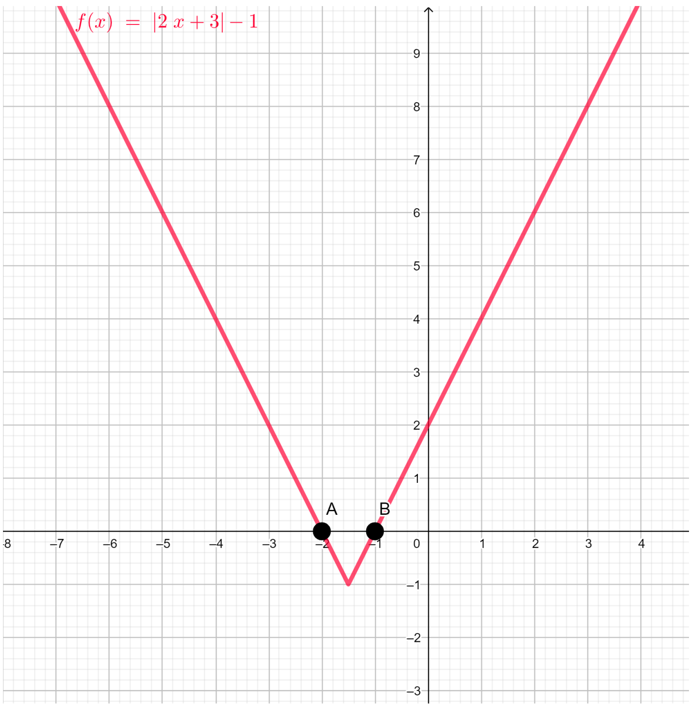
No entanto, a equação

$$|2x + 3| = 1$$

admite duas soluções:

1. $x = -1$ satisfaz $|2(-1) + 3| = |1| = 1$;
2. $x = -2$ verifica $|2(-2) + 3| = |-1| = 1$.

Contudo, sabendo que a recta de equação $y = 1$ intersecta o gráfico de $x \mapsto y = |2x + 3|$ pelo menos uma vez, poderíamos reformular a **prova de não injectividade**, verificando que $x = -1$ e $x = -2$ são dois zeros de $x \mapsto y = |2x + 3| - 1$, tal como representado na figura pelos pontos $A = (-2, 0)$ e $B = (-1, 0)$.



■

✓ Foi verificado com o **Exemplo 1.19** que existem funções com um único zero mas que não são injectivas.

Desafio 1.10 Estude a **função recíproca da identidade** definida no **Exemplo 1.14** quanto à injectividade e à existência de zeros. O que pode concluir?

Uma forma de contornar a limitação ilustrada no **Exemplo 1.19** e no **Desafio 1.10** passa pela reformulação do conceito de injectividade em termos do estudo dos zeros do gráfico de uma função, dado pelo próximo teorema:

Teorema 1.3.2 — Funções Injectivas vs Zeros. $f : D \to Y$ é uma **função injectiva** se, e só se, para cada ponto (a,b) do gráfico de f, $x = a$ é o **único zero** da função

$$x \mapsto y = f(x) - b.$$

Ideia da demonstração. Supondo que $f : D \to Y$ é injectiva é equivalente a dizer que, para cada $y \in D'$, a equação

$$y = f(x)$$

tem sempre solução única. Caso $x = a$ seja um zero da função auxiliar

$$x \mapsto f(x) - b,$$

este **terá de ser o único zero** para provarmos a injectividade de $f : D \to Y$, e vice versa. ■

A fórmula resolvente, a ser deduzida mais adiante no **Exemplo 1.41** permite-nos facilmente formular o seguinte resultado:

Teorema 1.3.3 — Zeros de funções quadráticas. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4ac$. Então, a função f:

(i) Não admite zeros se $\Delta < 0$;
(ii) Admite um único zero se $\Delta = 0$;
(iii) Admite dois zeros se $\Delta > 0$.
Adicionalmente, para o caso $\Delta \geq 0$, tem-se que

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

são os zeros da função f.

Iremos voltar na subseção **1.5.1 Funções Polinomiais** ao estudo de zeros de funções polinomiais. Como preparação para esta seção, sugerimos ao leitor que resolva os seguintes desafios com recurso ao **Teorema 1.3.3**.

Desafio 1.11 — Existência de raízes para um polinómio de grau 2. Determine para que valores de $c \in \mathbb{R}$, o polinómio $p_2(x) = -2x^2 + 8x + c$:

(a) Não admite zeros;
(b) Admite um único zero;
(c) Admite dois zeros.

Desafio 1.12 — Raízes de polinómios de grau 3. Consideremos expressões do tipo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a \neq 0$. Fixando $a = 1$ e $d = 0$ escolha os parâmetros reais $b \neq 0$ e $c \neq 0$ de modo que a função cúbica admita:

(i) Um único zero;

(ii) dois zeros;

(iii) três zeros.

RECURSO À TECNOLOGIA: Utilizando o GeoGebra, visualize o gráfico em cada caso, assinalando os respetivos zeros e justifique, usando a lei do anulamento do produto.

Definição 1.3.3 — Sinal da função. Diz-se que a função f:

- É positiva se $f(x) > 0$ para todo $x \in D_f$;
- É não-negativa se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in D_f$;
- É negativa se $f(x) < 0$ para todo $x \in D_f$;
- É não-positiva se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in D_f$.

✓

- O gráfico de uma função positiva (resp. negativa) está acima (resp. abaixo) do eixo Ox;
- O gráfico de uma função não-negativa (resp. não-positiva) está acima (resp. abaixo) do eixo Ox e intersecta-o pelo menos num ponto.

A maior parte das funções não têm sinal constante em todo o seu domínio. Por isso é necessário resolver equações e inequações para construir um quadro de sinais da função.

Sinal da função afim

Já vimos que a função afim f de domínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = mx + b$ com $m \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tem apenas um zero de valor $x_0 = -\frac{b}{m}$. Então:

(i) Se $m > 0$ então f é negativa em $]-\infty, x_0[$ e positiva em $]x_0, +\infty[$. Eis o quadro de sinais:

x		x_0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

(ii) Se $m < 0$ então f é negativa em $]x_0, +\infty[$ e positiva em $]-\infty, x_0[$. Eis o quadro de sinais:

x		x_0	
$f(x)$	$+$	0	$-$

Desafio 1.13 Esboce o gráfico da função, $x \mapsto \operatorname{sgn}(f(x))$, onde:

(i) $x \mapsto f(x)$ é a função representada pela recta do **Exemplo 1.1**;

(ii) $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ é a função sinal do **Exemplo 1.12**.

De seguida, use o gráfico da função $x \mapsto \operatorname{sgn}(f(x))$ para estudar o sinal da função $x \mapsto f(x)$.

Desafio 1.14 Estude o sinal das funções afins associadas às rectas s e t do **Desafio 1.3**.

Sinal da função quadrática

Existem pelo menos duas estratégias imediatas de determinar o sinal da função quadrática:

(i) A primeira passa por transformar uma função quadrática como produto de funções afins, com recurso ao **Teorema 1.5.1** que aparece na **Subseção 1.5.1 Funções Polinomiais**.

(ii) A segunda estratégia passa pelo estudo do sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e das concavidades (que iremos abordar mais à frente no **Teorema 1.4.2**).

■ **Exemplo 1.20 — Sinal da função quadrática no caso de existirem raízes.** Suponha que: $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem pelo menos um zero ($\Delta \geq 0$)) e λ_1 e λ_2, tais que $\lambda_1 \leq \lambda_2$, são os zeros de $f(x)$ determinados pelo **Teorema 1.3.3**.

No caso de termos raízes iguais ($\lambda_1 = \lambda_2$), o **Teorema 1.5.1** permite-nos reescrever $f(x)$ na forma

$$f(x) = a(x - \lambda_1)^2.$$

Assim sendo, o sinal de f coincide com sinal da constante a, i.e.
- $f(x) \geq 0$ se $a > 0$;
- $f(x) \leq 0$ se $a < 0$;

Caso contrário, temos de construir o quadro de sinais de $f(x) = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$. **Para valores de** $a > 0$, temos

x		λ_1		λ_2	
$x - \lambda_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - \lambda_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Então f:
- É negativa em $]\lambda_1, \lambda_2[$;
- É não-negativa no intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$;
- É positiva em $]-\infty, \lambda_1[\cup]\lambda_2, +\infty[$;
- É não-positiva em $]-\infty, \lambda_1] \cup [\lambda_2, +\infty[$.

O estudo do sinal para valores de $a < 0$ **deixamos ao cargo do leitor.** ■

Desafio 1.15 — Vide Desafio 1.11. Determine para que valores de $c \in \mathbb{R}$ a igualdade

$$|-2x^2 + 8x + c| - 2c = -2x^2 + 8x + c$$

é sempre satisfeita.

Sinal da função raiz quadrada

Recorrendo ao gráfico da função g, $x \mapsto \sqrt{x}$, dado no **Exemplo 1.13**, é facil de concluir que a função h,

$$x \mapsto \sqrt{f(x)},$$

apenas está definido para o caso de $x \mapsto f(x)$ ser uma função não-negativa em todos os pontos do seu domínio. Adicionalmente $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ é positiva se f também é uma função positiva (i.e. não admite zeros).

1.3.3 Paridade e Simetria

Definição 1.3.4 — Paridade e Simetria. Considere-se que o domínio D_f da função f é simétrico em relação à origem, i.e.,

$$x \in D_f \iff -x \in D_f$$

para todo x. Diz-se que a função f:

(i) É par se $f(-x) = f(x)$ para todo o $x \in D_f$.
O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy, isto é,

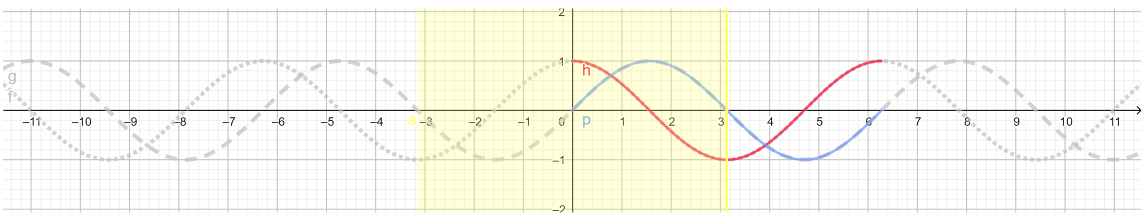
$$(x,y) \in graf(f) \Longleftrightarrow (-x,y) \in graf(f)$$

(ii) É ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo o $x \in D$.
O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem, isto é,

$$(x,y) \in graf(f) \Longleftrightarrow (-x,-y) \in graf(f)$$

Com base na definição acima, podemos facilmente verificar que as funções identidade ($x \mapsto x$) e sinal do **Exemplo 1.10** e **Exemplo 1.12**, respectivamente, são exemplos de funções ímpares. Por outro lado, função módulo ($x \mapsto |x|$) tratada no **Exemplo 1.11** é par.

Exemplo 1.21 — Importância do domínio ser simétrico. Os gráficos das funções cosseno (a pontilhado) e seno (a tracejado) correspondem a dois exemplos de funções pares e ímpares, respectivamente.



Se considerássemos a restrição de ambos os gráficos ao intervalo $[0,2\pi]$, observaríamos que o gráfico das funções $\cos : [0,2\pi] \to [-1,1]$ (a magenta) e $\sin : [0,2\pi] \to [-1,1]$ (a azul) não nos permitia definir funções pares e ímpares, pois falha a condição de simetria em relação ao eixo Oy – para termos uma função par – e à origem $O = (0,0)$ – para termos uma função ímpar.

No entanto, caso restringíssemos o traçado de ambos os gráficos ao intervalo $[-\pi,\pi]$ (região delimitada a amarelo no gráfico), já poderíamos afirmar que:

- $\cos : [-\pi,\pi] \to [-1,1]$ é uma função par;
- $\sin : [-\pi,\pi] \to [-1,1]$ é uma função ímpar.

■

Corolário 1.3.4 — Zero de função ímpar. Se $f : D \to Y$ é uma função ímpar e $x = 0 \in D$ então $f(0) = 0$.

Ideia da demonstração. É automática com base na igualdade $0 = -0$ e na equação $f(0) = -f(-0)$. ■

No **Exemplo 1.21** considerámos o caso das funções trigonométricas seno e cosseno.
A igualdade $\sin(0) = 0$ permite-nos verificar que a função seno verifica o resultado obtido no **Corolário 1.3.4**. Por outro lado, a igualdade $\cos(0) = 1$ corresponde a um exemplo particular de uma função nas seguintes condições:

(i) $f : D \to Y$ é par;
(ii) $0 \in D$;
(iii) $f(0) \neq 0$.

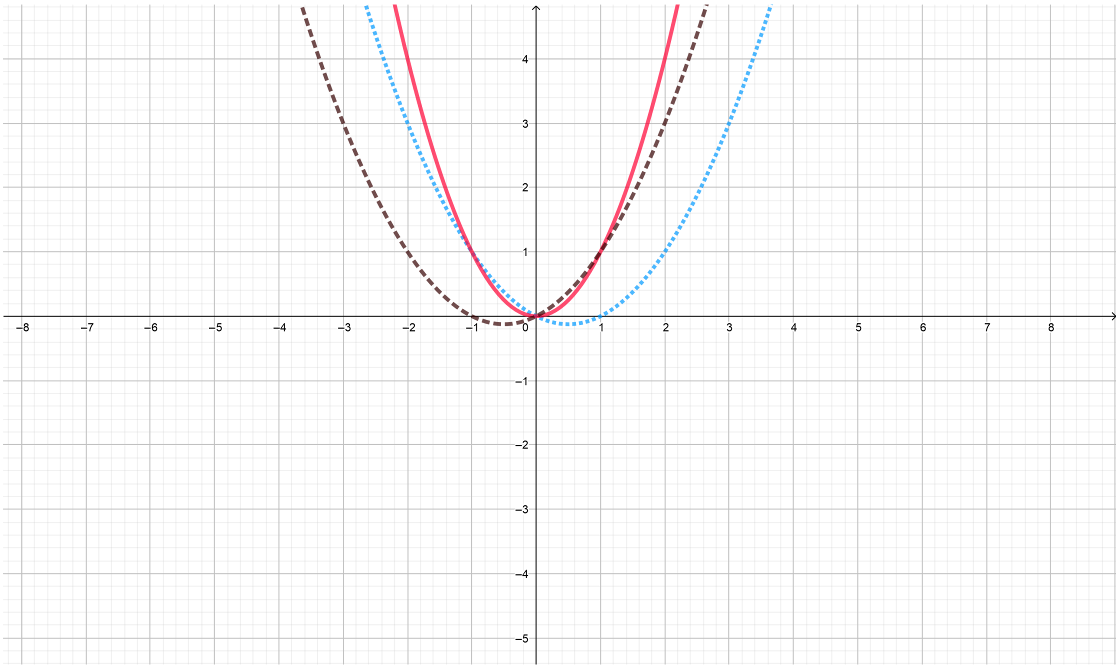


Figura 1.5: Ilustração gráfica da determinação da parte par da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x$ (a magenta) como o gráfico resultante da sobreposição dos gráficos das funções $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$ (pontilhado a azul ciano) e $x \mapsto \frac{1}{2}f(-x)$ (tracejado a castanho).

Desafio 1.16 Dê um exemplo de uma **função ímpar** f em que $x = 0 \notin D_f$.

■ **Exemplo 1.22 — Paridade da função potência.** Sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 1$, definimos a função potência de expoente n, $x \mapsto g_n(x) = x^n$.
(i) Se n é par então g_n é uma função par;
(ii) Se n é ímpar então g_n é uma função ímpar.
Se n é par então $n = 2k$ com $k \in \mathbb{N}$. Para todo o real x temos

$$g_n(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k} = x^{2k} = x^n = g_n(x).$$

Por outro lado, se n é ímpar então $n = 2k+1$ com $k \in \mathbb{N}$. Para todo o real x temos

$$g_n(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -x^n = -g_n(x).$$

■

■ **Exemplo 1.23 — Nem par nem ímpar.** A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x$ não é par nem ímpar. Por exemplo, vejamos que $f(-1) = 2$ e $f(1) = 0$, logo

$$f(-1) \neq f(1) \quad \wedge \quad f(-1) \neq -f(1).$$

■

Desafio 1.17 — Função Par. Sendo $f : D \to D'$ uma função par, diga justificando, qual das seguintes funções abaixo **não é par**.

(a) $x \mapsto xf(x)$;
(b) $x \mapsto |x|f(x)$;

(c) $x \mapsto f(|x|)$;
(d) $x \mapsto |f(x)|$.

Desafio 1.18 — Função Ímpar. Sendo $f : D \to D'$ uma função impar, diga justificando, qual das seguintes funções abaixo **não é ímpar**.
(a) $x \mapsto x^2 f(x)$;
(b) $x \mapsto x f(x^2)$;
(c) $x \mapsto x^2 f(x) + x$;
(d) $x \mapsto x^2 f(x) + |x|$.

O **Teorema 1.3.5** assim como o **Corolário 1.3.6** que enunciaremos a seguir poderão vir a ser úteis para resolver o **Desafio 1.17** & o **Desafio 1.18**.

Teorema 1.3.5 — Parte par e parte ímpar de uma função. Suponha que o domínio D de f é simétrico em relação à origem.
Então a função $f : D \to Y$ pode ser reescrita na forma $f(x) = g(x) + h(x)$, onde

- $g : D \to Y$ definida por
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
é uma **função par**;
- $g : D \to Y$ definida por
$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
é uma **função ímpar**.

Ideia da Demonstração. Observe que as funções g e h podem ser determinadas a partir da identidade
$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{=g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{=h(x)}.$$

A prova de que g **é par** e h **é impar** é uma consequência directa da **Definição 1.3.4**. ■

✓ O **Teorema 1.3.5** permite-nos determinar sempre uma função par e uma função ímpar, independentemente da paridade de f.
No caso particular do **Exemplo 1.23**, tem-se que f pode ser escrita como a soma de $x \mapsto x^2$ (que é par) e da função $x \mapsto -x$ (que é ímpar).

Corolário 1.3.6 — Reformulação de paridade. Suponha que o domínio D de f é simétrico em relação à origem. Então a função $f : D \to Y$:

- É **par** se, e só se $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$;
- É **ímpar** se, e só se $f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Duas entre as várias aplicações directas do **Corolário 1.3.6** é o próximo desafio, e as funções hiperbólicas que estudaremos na subseção **1.5.5 Funções Hiperbólicas**.

Desafio 1.19 Para a função definida por $x \mapsto f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, mostre que:

1. $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ é a parte par de f.
2. $\dfrac{2x}{1-x^2}$ é a ímpar de f.

3. A parte par e ímpar de f satisfazem a igualdade

$$\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2 - \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2 = 1.$$

O seguinte corolário também poderá vir a ser útil no estudo de funções.

Corolário 1.3.7 — Paridade vs. Injectividade. Suponha que o domínio D de f é simétrico em relação à origem. Se $f : D \to Y$ é uma função par, então f **não é injectiva**.

Ideia da demonstração. A demonstração decorre da definição de injectividade. De facto, para pontos da forma

$$x_1 = x \quad \text{e} \quad x_2 = -x$$

verifica-se sempre $f(x_1) = f(x_2)$ e $x_1 \neq x_2$, desde que $x \neq 0$. ■

1.3.4 Periodicidade e Limitação

Definição 1.3.5 — Função Periódica. Diz-se que a função f é **periódica de período T**, se $T > 0$ é o menor número real positivo para o qual se tem

$$f(x+T) = f(x), \text{ para todo o } x \in D_f.$$

■ **Exemplo 1.24 — Período de funções trigonométricas.** As funções trigonométricas seno, $x \mapsto \sin(x)$, e cosseno, $x \mapsto \cos(x)$, são periódicas de período 2π, ao par que as funções trigonométricas[2] tangente e cotangente

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

são periódicas de período π. ■

■ **Exemplo 1.25 — Relações Trigonométricas.** Segue das identidades trigonométricas

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \& \quad \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

que $\sin^2(x)$ e $\cos^2(x)$ são funções periódicas de período π.

De facto, decorre da resolução das equações acima em ordem a $\sin^2(x)$ e $\cos^2(x)$:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \& \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Logo o período de ambas coincide com o período da função $x \mapsto \cos(2x)$.

Finalmente, usando o facto da função cosseno ser uma função periódica, de período 2π, a sequência de igualdades:

$$f(x) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2(x+\pi)) = f(x+\pi)$$

permite-nos concluir que $T = \pi$.

■

Desafio 1.20 — Funções Periódicas. Verifique que as funções $x \mapsto \tan^2(x)$ e $x \mapsto \cot^2(x)$ são também funções periódicas de período π.

[2] Ambas as expressões $\tan(x)$ ou $\operatorname{tg} x$ representam a tangente de x. De modo análogo, cotangente de x é representada por $\cot(x)$ ou $\operatorname{cotg} x$

Corolário 1.3.8 — Funções Periódicas vs Injectividade. Se $f : D \to Y$ é uma função periódica, então f **não é injectiva**.

Ideia da demonstração. À semelhança da demonstração do **Corolário 1.3.7**, a demonstração segue automaticamente da escolha de pontos x_1 e x_2 da forma.

$$x_1 = x \quad \text{e} \quad x_2 = x + T.$$

■

Definição 1.3.6 — Função Limitada. Diz-se que a função f é limitada se existirem dois números reais m e M tais que

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in D_f.$$

Adicionalmente, se $m = -M$ a condição anterior é equivalente a

$$| f(x) | \leq M, \text{ para todo } x \in D_f.$$

A definição acima diz-nos essencialmente que para $f : D \to \mathbb{R}$ ser limitada o seu contradomínio D' terá que ser um conjunto limitado, i.e.

$$y \in D' \Rightarrow m \leq y \leq M.$$

✓ Das funções tratadas no **Exemplo 1.10**, **Exemplo 1.11** & **Exemplo 1.12** apenas a função sinal, $x \mapsto \text{sgn}(x)$, é limitada.

■ **Exemplo 1.26 — Funções limitadas envolvendo relações trigonométricas.** Voltemos novamente às funções periódicas $x \to \sin^2(x)$ e $x \mapsto \cos^2(x)$ do **Exemplo 1.25**. Do facto de

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1,$$

segue que a sequência de (des)igualdades abaixo:

$$0 = \frac{1}{2}(1-1) \leq \underbrace{\frac{1+\cos(2x)}{2}}_{=\cos^2(x)} \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$0 = \frac{1}{2}(1-1) \leq \underbrace{\frac{1-\cos(2x)}{2}}_{=\sin^2(x)} \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

é satisfeita para todo o $x \in \mathbb{R}$.

EM SUMA: Verificámos que $x \to \sin^2(x)$ e $x \mapsto \cos^2(x)$ estão nas condições da **Definição 1.3.6**. Em ambos os casos, obtivémos as constantes $m = 0$ e $M = 1$. ■

✓ Das funções periódicas a tratar mais à frente na subseção **1.5.8 Funções Trigonométricas**, apenas as funções $x \mapsto \sin(x)$ e $x \mapsto \cos(x)$ são funções limitadas, uma vez que o contradomínio de ambas é dado pelo conjunto

$$[-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} \ : \ |y| \leq 1\}.$$

■ **Exemplo 1.27 — Função Limitada.** A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

é limitada.

De facto, da propriedade de módulos

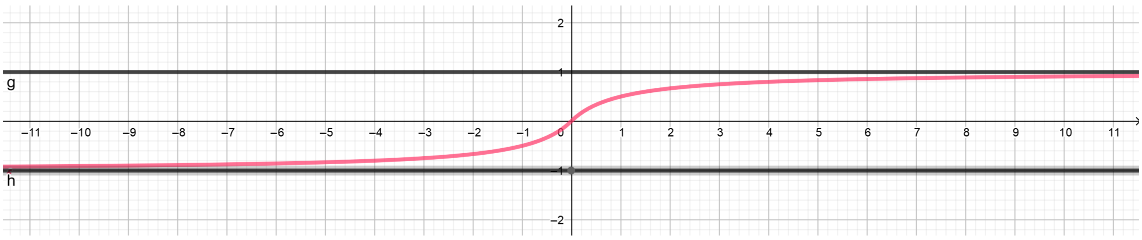
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

decorre que

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
Geometricamente, a condição acima corresponde a dizer que o gráfico da função f – representado na figura abaixo **a mangenta** – está compreendido entre as retas horizontais, de equações

$$y = -1 \quad \text{e} \quad y = 1.$$



Note-se ainda que f nunca intersecta as rectas de equações $y = \pm 1$. Este facto permite-nos concluir, em particular, que as equações

$$f(x) = -1 \quad \text{e} \quad f(x) = 1$$

não admitem soluções.

Esta última observação permite-nos mostrar que f **não é sobrejectiva**. ■

■ **Exemplo 1.28 — Função Ilimitada.** O resultado obtido no **Corolário 1.1.3** permite-nos a partir da equação

$$m = \tan(\alpha)$$

obter a representação do gráfico da função $d :\ ]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $d(\alpha) = \tan(\alpha)$ no plano $\alpha O m$.

Esta função permite-nos construir uma família de rectas que passam pela origem do referencial xOy:

$$y = \tan(\alpha)x, \ \ 0 < \alpha < \pi, \ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}.$$

Para este caso é fácil de verificar intuitivamente que d não é uma função limitada, uma vez que para cada $M > 0$ é possível construir uma recta de inclinação α, que passa pelos quadrantes ímpares, com declive superior ao declive da reta de equação

$$y = Mx$$

i.e. que satisfaça a inequação $\tan(\alpha) > M$. ■

Em geral, sempre que estamos perante uma função limitada podemos inferir o seguinte resultado:

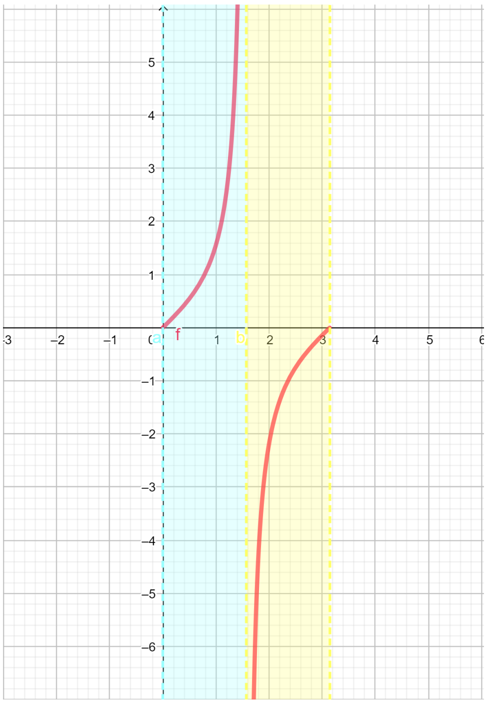


Figura 1.6: Na figura encontra-se representada a função declive d. A região delimitada pelas rectas de equação $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (a azul) corresponde a funções de declive positivo $(d(\alpha) > 0)$, enquanto que a região delimitada pelas retas de equação $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \pi$ (a amarelo) corresponde a funções de declive negativo $(d(\alpha) < 0)$.

Corolário 1.3.9 — Função limitada vs sobrejectividade. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, então f **não é sobrejectiva**.

Ideia da demonstração. Com efeito, se $f : D \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição $m \leq f(x) \leq M$, então a equação

$$y = f(x)$$

não admite solução para valores de

$$y > M \quad \vee \quad y < m.$$

■

A função do **Exemplo 1.27** é injectiva mas não é sobrejectiva. No entanto, a prova da injectividade não é trivial, ao contrário da prova realizada no **Exemplo 1.16**.
Com efeito, a igualdade

$$\frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|}$$

é equivalente a termos

$$x_1 + x_1|x_2| = x_2 + x_2|x_1|.$$

Esta última igualdade apenas nos permite concluir que $x_1 = x_2$ no caso de $x_1x_2 \geq 0$ (i.e. apenas quando x_1 e x_2 têm o mesmo sinal).
Uma possibilidade para contornarmos esta limitação algébrica passa pelo estudo da monotonia do gráfico, como iremos detalhar mais à frente na subseção **1.3.5 Monotonia e Concavidades.**

1.3.5 Monotonia e Concavidades

Definição 1.3.7 — Monotonia da função. Diz-se que a função $f : D \to \mathbb{R}$:

(i) É estritamente crescente se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$.
(ii) É crescente se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ para $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$.
(iii) É estritamente decrescente se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$.
(iv) É decrescente se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ para $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$.
Diz-se ainda que a função f é (estritamente) monótona em D se é (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente.

Decorre da definição de monotonia o seguinte resultado:

Corolário 1.3.10 — Monotonia vs Injectividade. Toda a função estritamente monótona é injectiva.

Demonstração. Decorre da definição de monotonia que **toda a função** $f : D \to \mathbb{R}$ **estritamente monótona** satistaz a implicação

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

para $x_1, x_2 \in D$, arbitrários. Logo f é injectiva. ■

✓ As funções do **Exemplo 1.14** e do **Exemplo 1.16** são **exemplos de funções injectivas que não são monótonas**. Isto permite-nos concluir que **nem toda a função injectiva é monótona.**

Desafio 1.21 Dê um exemplo de uma função injectiva que não seja estritamente monótona.

✓ Das funções tratadas nos **Exemplo 1.11** e **Exemplo 1.12**, apenas a função sinal é crescente. No entanto não é estritamente crescente. No caso do **Exemplo 1.11** o facto de esta não ser injectiva é suficiente para provar que esta não é estritamente monótona.

✓ Os gráficos das restrições das funções cosseno e seno ao intervalo $[0, 2\pi]$ – vide **Exemplo 1.21** – permite-nos concluir que em nenhum dos casos estamos perante funções monótonas.

Uma forma de reformular geometricamente o conceito de monotonia de uma função passa pelo estudo do declive de rectas secantes ao gráfico de f em dois pontos do domínio distintos.

Definição 1.3.8 — Recta secante ao gráfico. Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos distintos pertencentes ao gráfico de $f : D \to Y$.
Dizemos que a recta r que passa por P_1 e P_2 é secante ao gráfico de f.

Nas condições do **Teorema 1.1.2**, o declive dessa recta secante é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Teorema 1.3.11 — Teste das rectas secantes. Sejam $x, x+h \in D$, com $h > 0$, e

$$m(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

[a] o **declive da recta secante** ao gráfico de f nos pontos $P_1 = (x, f(x))$ e $P_2 = (x+h, f(x+h))$.

Diz-se que a função $f : D \to Y$:

(i) É estritamente crescente se $m(x,h) > 0$ (declive positivo).
(ii) É crescente se $m(x,h) \geq 0$ (declive não negativo).
(iii) É estritamente decrescente se se $m(x,h) < 0$ (declive negativo).
(iv) É decrescente se $m(x,h) \leq 0$ (declive não positivo).

[a] Note-se que m depende tanto de x como de h.

Caso particular do **Teorema 1.3.11**: Consideremos a função afim $x \mapsto y = mx + b$. Toda a recta secante ao seu gráfico em dois pontos distintos coincide com o próprio gráfico. Assim, facilmente se verifica que a constante m coincide com o declive da recta secante nos pontos

$$P_1 = (x, mx+b) \quad \& \quad P_2 = (x+h, m(x+h)+b)$$

i.e, $m(x,h) = m$.
Contudo, **a função constante não é uma função estritamente monótona** uma vez que esta define sempre uma recta secante de declive zero (i.e. uma recta horizontal da forma $y = b$).

Exemplo 1.29 — Função quadrática. Para a função quadrática $x \mapsto f(x) = -2x^2 + 8x + c$ ($c \in \mathbb{R}$) abordada no **Desafio 1.15**, obtemos para valores de $x \in \mathbb{R}$ e $h > 0$ que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= -2\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + 8\frac{(x+h)-x}{h} \\ &= -2\frac{2xh+h^2}{h} + 8\frac{h}{h} \\ &= -4x - 2h + 8 \end{aligned}$$

Portanto, $m(x,h) = -4x - 2h + 8$ dá-nos o **declive da recta secante**. A expressão acima permite-nos concluir que se trata de uma função que não é monótona em todos os pontos do seu domínio, uma vez que a função (na variável x)

$$x \mapsto -4x - 2h + 8$$

toma simultaneamente valores positivos e negativos em todos os pontos do seu domínio.

Em concreto:

- é estritamente crescente (resp. crescente) para $x < \frac{h}{2} - 2$ (resp. $x \leq \frac{h}{2} - 2$);
- é estritamente decrescente (resp. crescente) para $x > \frac{h}{2} - 2$ (resp. $x \geq \frac{h}{2} - 2$).

■

Desafio 1.22 — Declive recta secante para a função módulo. Mostre que o declive da recta secante da função módulo nos pontos $(x, |x|)$ e $(x+h, |x+h|)$ – vide **Exemplo 1.11** – satisfaz a igualdade

$$\frac{|x+h| - |x|}{h} = \frac{2x+h}{|x+h| + |x|}.$$

SUGESTÃO: Vide **Desafio 1.6**.

Desafio 1.23 Considere a função do **Exemplo 1.14**.

(i) Verifique que o domínio D se pode escrever na forma duma reunião de intervalos $D = D_1 \cup D_2$.
(ii) Estude a monotonia das funções $g_i : D_i \to D_i$, definidas por $g_i(x) = \frac{1}{x}$, $i = 1, 2$.
(iii) Estude a monotonia da função do **Exemplo 1.14**, $x \mapsto y = \frac{1}{x}$ em D.

Desafio 1.24 — Monotonia duma função envolvendo módulo. Esboce o gráfico da função $x \mapsto x + |x-1|$ e verifique que é crescente mas não é estritamente crescente.

Concavidades de gráficos

Definição 1.3.9 — Funções côncavas e convexas. Dizemos que uma função $f : D \to Y$:

1. É **côncava** se, e só se, a desigualdade
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$
é sempre satisfeita para $x_1, x_2 \in D$, arbitrários, e para todo $t \in [0,1]$.
2. É **convexa** se, e só se, a desigualdade
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$
é sempre satisfeita para $x_1, x_2 \in D$, arbitrários, e para todo $t \in [0,1]$.

A **Definição 1.3.9** permite-nos afirmar que:
1. A função $x \mapsto f(x)$ é côncava se, e só se, $x \mapsto -f(x)$ é convexa.
2. A função $x \mapsto f(x)$ é convexa se, e só se, $x \mapsto -f(x)$ é côncava.

Com base na definição acima, é fácil de verificar que as funções afins, $x \mapsto mx + b$, são funções **simultaneamente côncavas e convexas**.

■ **Exemplo 1.30 — Função módulo é convexa.** Decorre da desigualdade triangular[3]
$$|a+b| \leq |a| + |b|$$
que a função módulo, $x \mapsto |x|$, (vide **Exemplo 1.11**) é convexa.

De facto, para pontos arbitrários $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $0 \leq t \leq 1$, os pontos $a = (1-t)x_1$, e $b = tx_2$ satisfazem
$$|(1-t)x_1| = (1-t)|x_1| \quad \& \quad |tx_2| = t|x_2|.$$

Portanto,
$$|(1-t)x_1 + tx_2| \leq (1-t)|x_1| + t|x_2|.$$

■

A desigualdade triangular também pode ser utilizada para demonstrar que $x \mapsto -|x|$ é uma função côncava.

Para interpretarmos geometricamente as noções de funções côncavas e convexas, comecemos por observar que o segmento de recta $[P_1P_2]$ que une os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pode ser definido em termos do conjunto
$$[P_1P_2] = \{((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \ : \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

[3] Para obter a desigualdade triangular, note que as desigualdades $-|a| \leq a \leq |a|$ & $-|b| \leq b \leq |b|$ são sempre satisfeitas, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

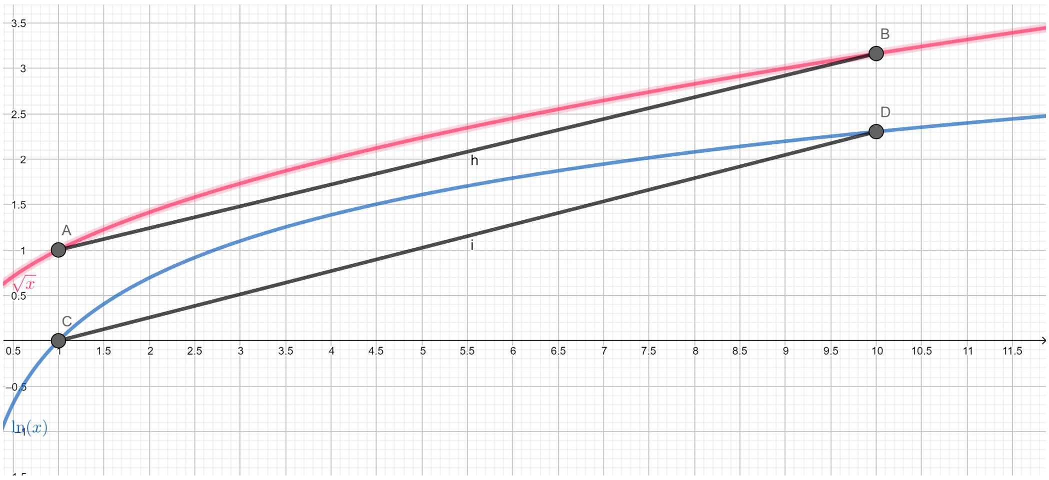


Figura 1.7: Na figura encontram-se representadas as rectas secantes aos gráficos de $x \mapsto \sqrt{x}$ (a magenta) & $x \mapsto \ln(x)$ (a azul) nos pontos $x_1 = 1$ e $x_2 = 10$. Em ambos os casos, temos que o gráfico de ambas restrito ao intervalo $I = [1, 10]$ situa-se sempre acima da respectiva recta secante.

Assim, dizemos que $f : D \to Y$ **côncava** (resp. **convexa**) se, e só se, para $x_1, x_2 \in D$, arbitrários, a reta secante ao gráfico de $f$em $P_1 = (x_1.f(x_1))$ e $P_2 = (x_2.f(x_2))$ situa-se **abaixo** (resp. **acima**) do gráfico de f no intervalo

$$I = \{(1-t)x_1 + tx_2 \ : \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Note que se assumirmos $x_1 < x_2$ vem $I = [x_1, x_2]$.

■ **Exemplo 1.31 — Funções côncavas.** Os gráficos das funções raiz quadrada $x \mapsto \sqrt{x}$ e logaritmo $x \mapsto \ln(x)$ correspondem a dois exemplos de funções côncavas. Na verdade, podemos verificar geometricamente que é possível traçar sempre rectas secantes que se situam sempre abaixo do gráfico de f restrito a intervalos da forma

$$I = \{(1-t)x_1 + tx_2 \ : \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

■

Os conceitos de funções côncava e convexa são difíceis de tratar na prática. Sendo assim, usaremos esses termos para uma função tendo por base a forma do respectivo gráfico, nomeadamente relacionamos com concavidades do gráfico (tal como para as parábolas).

Definição 1.3.10 — Concavidades do gráfico (definição informal). Diz-se que $f : D \to Y$:
(i) É côncava quando o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.
(ii) É convexa quando o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

■ **Exemplo 1.32 — Função quadrática.** Para o caso particular da função quadrática $x \mapsto x^2$ tratada no **Exemplo 1.8** a demonstração de que é convexa, por definição, é deveras não trivial pois teríamos de provar que a desigualdade da forma

$$((1-t)x_1 + tx_2)^2 \leq (1-t)(x_1)^2 + t(x_2)^2,$$

é sempre satisfeita para $x_1, x_2 \in D$, arbitrários, e para todo $0 \leq t \leq 1$.

Graficamente, a constatação de que se trata de uma função convexa é imediata. ■

1.4 Operações e Transformações

1.4.1 Igualdade e Restrição

Definição 1.4.1 — Igualdade entre funções. As funções f e g dizem-se que são iguais, escrevemos $f = g$, se
(i) $D_f = D_g$ (O mesmo domínio)
(ii) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f$ (expressões de f e g coincidentes).

■ **Exemplo 1.33 — Domínios diferentes.** As funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x+1 \quad \& \quad g(x) = x+1$$

não coincidem uma vez que os domínios são diferentes. ■

■ **Exemplo 1.34 — Conjuntos de chegada diferentes.** A identidade binomial

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

permite-nos afirmar que as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ definidas por

$$f(x) = (x+1)^2 \quad \& \quad g(x) = x^2 + 2x + 1$$

são iguais. ■

Notação 1.4 — Números reais não negativos. No exemplo acima foi utilizada a notação $\mathbb{R}_0^+$ para denotar o conjunto de todos os **números reais não negativos**, i.e.

$$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \geq 0\}.$$

Em vários livros de texto este conjunto é também representado pelo intervalo $[0, +\infty[$, i.e.

$$\mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty[.$$

✓ No **Exemplo 1.34** verificámos, com base na **Definição 1.4.1**, que as funções f e g coincidem, mesmo estando definidas para conjuntos de chegada diferentes. No entanto, o contradomínio de ambas é igual a $\mathbb{R}_0^+$, uma vez que[4]

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0, \quad \text{para todo o} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.4.2 — Restrição da função. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$. Diz-se que f é uma **restrição de** g **a** I se
(i) $I \subseteq D_g$
(ii) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.

✓ O **Exemplo 1.33** permite-nos concluir que f é a restrição de g ao conjunto $I = \mathbb{Z}$.

1.4.2 Soma, Produto e Quociente

Teorema 1.4.1 — Operações com domínios de funções. Sejam f e g duas funções de domínio D_f e D_g, respectivamente.
Então as seguintes propriedades são verdadeiras:
(i) O domínio da **função Soma**, $x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$, é dado pela interseção de conjuntos $D_f \cap D_g$, i.e.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

[4] Note que o quadrado r^2 de qualquer número real é sempre um número não negativo, i.e. $r^2 \geq 0$, para todo o $r \in \mathbb{R}$.

.

(ii) O domínio da **função Produto**, $x \mapsto (f \times g)(x) = f(x)g(x)$, é dado pela interseção de conjuntos $D_f \cap D_g$, i.e.

$$D_{f\times g} = D_f \cap D_g$$

. Em particular, se f é uma função constante, $x \mapsto k$, $k \neq 0$, temos $(k \times g)(x) = kg(x)$.

(iii) O domínio da **função Quociente**, $x \mapsto (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, é dado pela interseção de conjuntos $D_f \cap D_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$, i.e.

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$$

. Em particular, a **função Reciproca** de g, definida por $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$, tem domínio

$$D_{1/g} = D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

.

A função diferença satisfaz $(f-g)(x) = (f+(-g))(x) = f(x) - g(x)$.

■ **Exemplo 1.35 — Funções Soma e Produto.** Com base no estudo do gráfico das funções, $x \mapsto \sqrt{x}$ e $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, no **Exemplo 1.13** e no **Exemplo 1.9**, respectivamente, podemos facilmente verificar que

$$[0,1] = [0,+\infty[\cap [-1,1]$$

é o domínio da funções $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{1-x^2}$ & $x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}$, sendo:

- $[0,+\infty[$ o domínio de $\sqrt{x}$;
- $[-1,1]$ o domínio de $\sqrt{1-x^2}$.

■

No exemplo referido acima somos tentados a afirmar, com base nas propriedades envolvendo radicais[5], que o domínio da função, $x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}$, coincide com o domínio da função, $x \mapsto \sqrt{x-x^3}$, **o que não é verdade**.

Caso tenha dúvidas, procure representar simultaneamente no GeoGebra o gráfico de ambas as funções. Com o gráfico poderá ainda concluir, à semelhança do **Exemplo 1.36**, que estas apenas coincidem se restringirmos o domínio de $x \mapsto \sqrt{x-x^3}$ – dado pelo conjunto solução da inequação $x - x^3 \geq 0$ – ao conjunto $[0,1]$.

■ **Exemplo 1.36 — Função Quociente.** Pese embora o facto de $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ corresponder a uma versão simplificada de

$$g(x) = \frac{x^2+2x+1}{1-x^2}$$

permite-nos mostrar que estas não coincidem (vide **Definição 1.4.1**) uma vez que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ – i.e $1-x^2 \neq 0$ quando $x \neq \pm 1$ – ao par que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ – i.e. $1-x \neq 0$ quando $x \neq 1$.

Para que ambas as funções coincidam, teremos de restringir o domínio de f ao conjunto $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ (vide **Definição 1.4.2**). ■

[5] $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, sempre que $a \geq 0$ e $b \geq 0$. No entanto $\sqrt{ab}$ pode ser sempre calculado, desde que $ab \geq 0$.

As funções tratadas no **Exemplo 1.34** são exemplos de funções polinomiais ao par que as funções tratadas no **Exemplo 1.36** são exemplos de *funções racionais impróprias*. Iremos voltar a abordá-las mais à frente nas subseções **1.5.1 Funções Polinomiais** & **1.5.2 Funções Racionais**, respectivamente.

Desafio 1.25 Para as funções do **Exemplo 1.10**, **Exemplo 1.11** e **Exemplo 1.12**, verifique que:

(a) As funções $x \mapsto x$ e $x \mapsto |x|\mathrm{sgn}(x)$ coincidem.

(b) A funções $x \mapsto \mathrm{sgn}(x)$ e $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ **não coincidem**. No entanto elas coincidem se restringirmos o domínio de $x \mapsto \mathrm{sgn}(x)$.

Desafio 1.26 Diga, justificando, qual o domínio das seguintes funções definidas por:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$;

(c) $\dfrac{1+x}{1-x}+\sqrt{1-x^2}$.

1.4.3 Função Composta

Definição 1.4.3 — Função Composta. Sejam f e g duas funções tais que

$$D'_g \cap D_f \neq \emptyset.$$

.

A função composta de g por f (lê-se f após g), é uma função de domínio

$$D_{f\circ g} = D_g \cap \{x : g(x) \in D_f\}$$

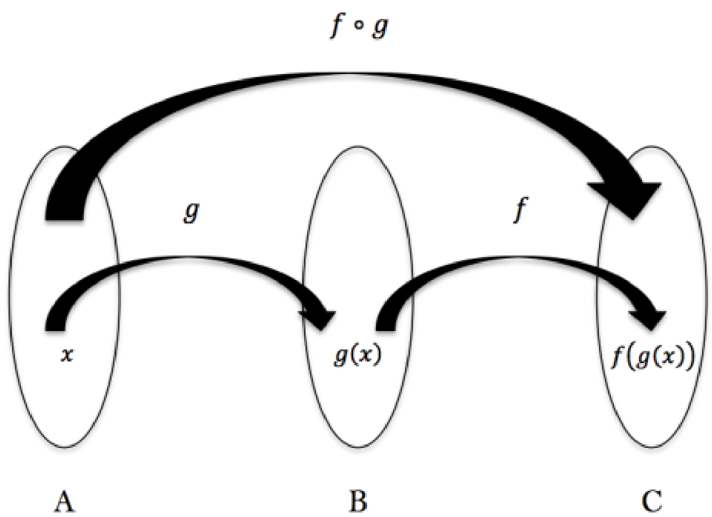
definida pela regra $(f\circ g)(x) = f\,(g(x))$.

Caso o contradomínio de g (D'_g) seja um subconjunto do domínio de f, i.e., $D'_g \subseteq D_f$, temos $D'_g \cap D_f = D'_g$, por isso

$$D_{f\circ g} = D_g$$

.

Pictoricamente, a operação de composição das função $f : B \to C$ e $g : A \to B$ de domínios $D_f = B$ e $D_g = A$, respectivamente, pode ser representada pelo seguinte diagrama:



No caso de $D'_g \not\subseteq D_f$, existem valores de $y = g(x)$ que não podem ser transformados por f, ou seja, não é possível definir a composição $f \circ g$ para tais valores de x. Assim sendo, temos

$$D_{f\circ g} \subset D_g$$

A composição de funções não exclui a possibilidade de se efectuar a composição repetindo a mesma função.

■ **Exemplo 1.37 — vide Exemplo 1.9.** Para a função $f : D_f \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ vem

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |\,x\,|$$

para todo o $x \in [-1,1]$. ■

Em geral, a composição de funções não é comutativa, isto é, $g \circ f \neq f \circ g$.

■ **Exemplo 1.38 — Vide Desafio 1.6.** Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |\,x\,|$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Apesar de $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ para $x \geq 0$, as funções $g \circ f$ e $f \circ g$ não são iguais pois têm domínios diferentes, $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = [0,+\infty[$. ■

■ **Exemplo 1.39 — Determinação do domínio de funções compostas.** Para as funções $f : \mathbb{R} - \{-3,3\} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas pontualmente por

$$f(x) = \frac{1}{x^2-9} \quad \text{e} \quad g(x) = x-3$$

podemos verificar, após algumas simplificações, as seguintes igualdades:

- $(f \circ g)(x) = f(x-3) = \dfrac{1}{x^2-6x}$
- $(g \circ f)(x) = g\left(\dfrac{1}{x^2-9}\right) = \dfrac{28-3x^2}{x^2-9}$.
- O domínio de $f \circ g$ é $\mathbb{R} - \{0,6\}$;
- O domínio de $g \circ f$ é $\mathbb{R} - \{-3,3\}$.

■

É possível determinar o domínio da função composta sem calcular a sua expressão analítica. No caso particular da função $f \circ g$ do **Exemplo 1.39**, o seu domínio é dado pela seguinte interseção de conjuntos

$$\mathbb{R} \cap \{x \,:\, x-3 \neq -3 \,\wedge\, x-3 \neq 3\},$$

sendo:

- $\mathbb{R}$ o domínio de g;
- $\mathbb{R} - \{-3,3\}$ o domínio de f;
- as condições $x-3 \neq -3$ e $x-3 \neq 3$ são equivalentes à condição $x \in \mathbb{R} - \{-3,3\}$.

Em geral, a determinação do domínio associado à composição das funções f e g envolve a resolução de equações e inequações. Na tabela seguinte, vamos exemplificar como proceder ao cálculo do domínio de $g \circ f$ para os casos em que g é uma função conhecida. Algumas das funções g listadas na tabela abaixo serão estudadas em detalhe mais adiante na Seção **1.5 Funções Transcendentes**.

$g(x)$	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$	EQUAÇÃO/INEQUAÇÃO A RESOLVER
$\sqrt{x}$	$\sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0 \ \wedge \ x \in D_f$
$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{f(x)}$	$x \in D_f$
$\lvert x \rvert$	$\lvert f(x) \rvert$	$x \in D_f$
$\sqrt[2k]{x}$ $(k \in \mathbb{N})$	$\sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x) \geq 0 \ \wedge \ x \in D_f$
$\sqrt[2k+1]{x}$ $(k \in \mathbb{N})$	$\sqrt[2k+1]{f(x)}$	$x \in D_f$
a^x $(a > 0 \wedge a \neq 1)$	$a^{f(x)}$	$x \in D_f$
$\log_a(x)$ $(a > 0 \wedge a \neq 1)$	$\log_a(f(x))$	$f(x) > 0 \ \wedge \ x \in D_f$
$\sin(x)$	$\sin(f(x))$	$x \in D_f$
$\cos(x)$	$\cos(f(x))$	$x \in D_f$
$\tan(x)$	$\tan(f(x))$	$\cos(f(x)) \neq 0 \ \wedge \ x \in D_f$
$\cot(x)$	$\cot(f(x))$	$\sin(f(x)) \neq 0 \ \wedge \ x \in D_f$
$\sec(x)$	$\sec(f(x))$	$\cos(f(x)) \neq 0 \ \wedge \ x \in D_f$
$\operatorname{cosec}(x)$	$\operatorname{cosec}(f(x))$	$\sin(f(x)) \neq 0 \ \wedge \ x \in D_f$

Desafio 1.27 — Domínio de $f\circ g$. Repita agora o processo análogo ao que realizámos anteriormente para o caso de pretendermos determinar o domínio de $f\circ g$, sendo g uma função conhecida. Pretende-se apenas que complete os espaços deixados em branco na tabela.

$g(x)$	$(f\circ g)(x) = f(g(x))$	EQUAÇÃO/INEQUAÇÃO A RESOLVER
$\sqrt{x}$	$f(\sqrt{x})$	$x \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x} \in D_f$
$\sqrt[3]{x}$		$\sqrt[3]{x} \in D_f$
$\lvert x\rvert$		
	$f(\sqrt[2k]{x})$	
$\sqrt[2k+1]{x}$ $(k\in\mathbb{N})$		
		$a^x \in D_f$
$\log_a(x)$ $(a>0\wedge a\neq 1)$		
	$f(\sin(x))$	
		$\cos(x)\in D_f \quad \wedge \quad \cos(x)\in[-1,1]$
$\tan(x)$		

1.4.4 Transformações de Gráficos

Definição 1.4.4 — Transformações de Gráficos. As seguintes transformações do gráfico de uma função $f : D \to Y$ poderão ser consideradas:

(i) Translações do gráfico de f: O gráfico da função g definida por $x \mapsto g(x) = k + f(x-h)$ obtém-se a partir do gráfico de f, por translação. Assim o deslocamento efectua-se para
  (a) a direita se $h>0$ e $k=0$
  (b) a esquerda se $h<0$ e $k=0$
  (c) cima se $k>0$ e $h=0$
  (d) baixo se $k<0$ e $h=0$

(ii) Homotetias do gráfico de f: Dado $c\in(]0,1[\cup]1,+\infty[)$, as mudanças de escala (i.e.

homotetias) no gráfico de f podem ser obtidas através das seguintes funções

$$x \mapsto g(x) = cf(x)$$
$$x \mapsto h(x) = f(cx)$$

(iii) Reflexões do gráfico de f: As funções

$$x \mapsto g(x) = -f(x)$$
$$x \mapsto h(x) = f(-x)$$

produzem reflexões no gráfico de f.
Os gráficos de g e de f são simétricos em relação ao eixo Ox, isto é,

$$(x,y) \in graf(f) \Longleftrightarrow (x,-y) \in graf(g).$$

Por outro lado, os gráficos de h e de f são simétricos em relação ao eixo Oy, isto é,

$$(x,y) \in graf(f) \Longleftrightarrow (-x,y) \in graf(h)$$

(iv) Homotetias e Reflexões do Gráfico de f– Podem ser obtidas por combinação das transformações obtidas em **(ii)** e **(iii)**. Em concreto, se $c \in (]0,1[\cup]1,+\infty[)$, então as funções

$$x \mapsto g(x) = -cf(x)$$
$$x \mapsto h(x) = f(-cx)$$

produzem simultaneamente reflexões e mudanças de escala (i.e. homotetias) no gráfico de f.

(v) Transformações modulares do gráfico de f– As funções

$$x \mapsto | f(x) | = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$x \mapsto f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

produzem transformações modulares no gráfico de f.

Em termos da composição de funções estudada na subseção **1.4.3 Função Composta**, as transformações de gráficos introduzidas ao longo da **Definição 1.4.4** podem ser classificadas de:

(a) Transformações horizontais se a função g – função conhecida *a priori* – transforma o gráfico de f através da composição $x \mapsto (f \circ g)(x)$.

(a) Transformações verticais se a função g – função conhecida *a priori* – transforma o gráfico de f através da composição $x \mapsto (g \circ f)(x)$.

Na tabela abaixo segue um resumo das transformações gráficas introduzidas acima:

	Na horizontal [$(f \circ g)(x) = f(g(x))$]	Na vertical [$(g \circ f)(x) = g(f(x))$]
Translação $g(x) = x + c$	$f(g(x)) = f(x+c)$ $c > 0$– Translação à esquerda do eixo Oy. $c < 0$– Translação à direita do eixo Oy.	$g(f(x)) = f(x) + c$ $c > 0$– Translação acima do eixo Ox. $c < 0$– Translação abaixo do eixo Ox
Homotetia $g(x) = cx$ $(c > 0)$	$f(g(x)) = f(cx)$ $c > 1$– Contração do gráfico na horizontal $0 < c < 1$– Dilatação do gráfico na horizontal.	$g(f(x)) = cf(x)$ $c > 1$– Dilatação do gráfico na vertical. $0 < c < 1$– Contração do gráfico na vertical.
Reflexão $g(x) = -x$	$f(g(x)) = f(-x)$, Reflexão do gráfico relativamente ao eixo Oy.	$g(f(x)) = -f(x)$ Reflexão do gráfico relativamente ao eixo Ox.
Reflexão $+$ **Homotetia** $g(x) = -cx$ $(c > 0)$	$f(g(x)) = f(-cx)$ Reflexão do gráfico relativamente ao eixo Oy seguida de **(i)** contração na horizontal (se $c > 1$); **(ii)** de dilatação na horizontal (se $0 < c < 1$).	$g(f(x)) = -cf(x)$ Reflexão do gráfico relativamente ao eixo Ox seguida de **(i)** dilação na vertical (se $c > 1$); **(ii)** de contração na vertical (se $0 < c < 1$).
Transfor– **–mação** **Modular** $g(x) = \|x\|$	$f(g(x)) = f(\|x\|)$ Gráfico permanece inalterado à direita do eixo Oy $(x \geq 0)$. À esquerda do eixo Oy $(x < 0)$ o gráfico é reflectido relativamente ao eixo Oy.	$g(f(x)) = \|f(x)\|$ Gráfico permanece inalterado acima do eixo Ox $(f(x) \geq 0)$ Abaixo do eixo Ox $(f(x) < 0)$ é reflectido relativamente ao eixo Ox.

Graficamente, dizemos que uma função f **é par** quando reflexões ao gráfico de f na horizontal não produzem alterações no gráfico de f $(f(-x) = -f(x))$.

No caso de f **ser ímpar**, pode-se facilmente concluir que reflexões na horizontal e na vertical do gráfico de f coincidem $(f(-x) = -f(x))$.

Pode-se ainda verificar que a transformação modular $x \mapsto f(|x|)$ produz sempre uma função par, independentemente da paridade de f.

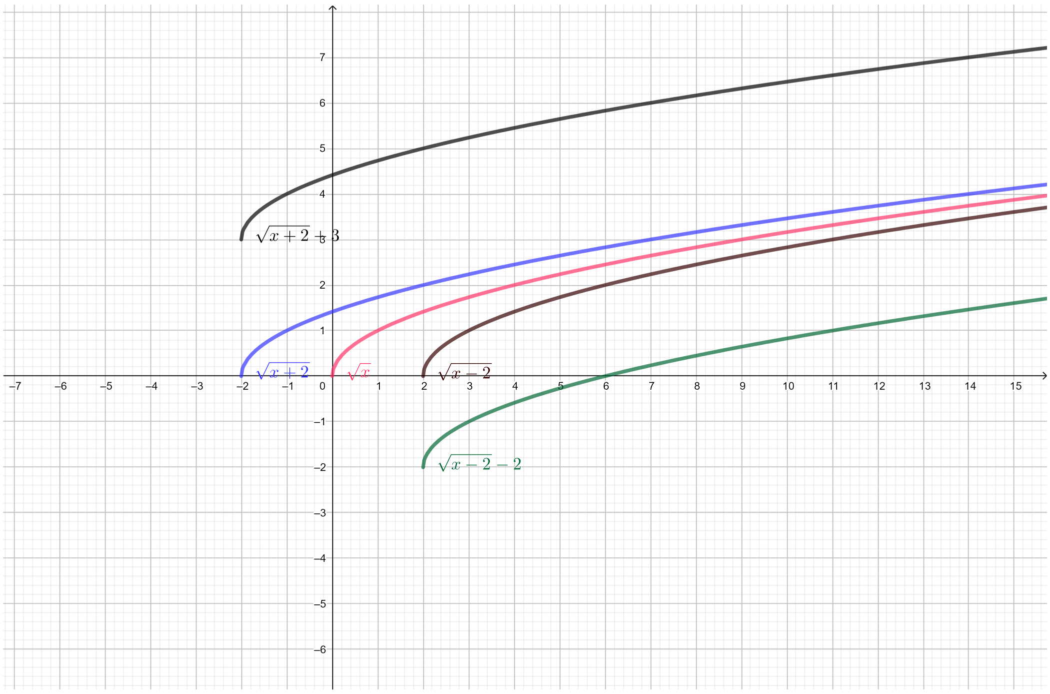


Figura 1.8: Na figura encontram-se representadas translações horizontais e verticais do gráfico da função $x \mapsto \sqrt{x}$ do **Exemplo 1.13**

Transformações gráficas envolvendo funções quadráticas

Como teve oportunidade de verificar no **Exemplo 1.8**, a parábola de equação $y = x^2$ define uma função. O que iremos fazer de seguida permite-nos relacionar o vértice e a concavidade de parábolas com eixo de simetria vertical – vide **Exemplo 1.5** com o estudo dos zeros e sinal das funções quadráticas da forma

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

■ **Exemplo 1.40 — Equação Geral da Parábola.** Considerando a função f, $x \mapsto f(x) = ax^2$, $(a \neq 0)$ – vide **Exemplo 1.4** – podemos concluir que o gráfico da função quadrática,

$$x \mapsto g(x) = ax^2 + bx + c$$

pode ser obtido a partir de translações na horizontal e na vertical do gráfico de f.

Em particular, $g(x) = a(x-h)^2 + k$ se, e só se,

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = c - \frac{b^2}{4a}.$$

■

✓ O **Exemplo 1.40** diz-nos essencialmente que toda a função quadrática pode ser associada à equação de uma parábola com eixo de simetria vertical – vide **Exemplo 1.5**.

O gráfico desta função pode ser obtido através do gráfico da função do **Exemplo 1.8** por translações, homotetias [e eventualmente reflexões, para o caso de termos $a < 0$].

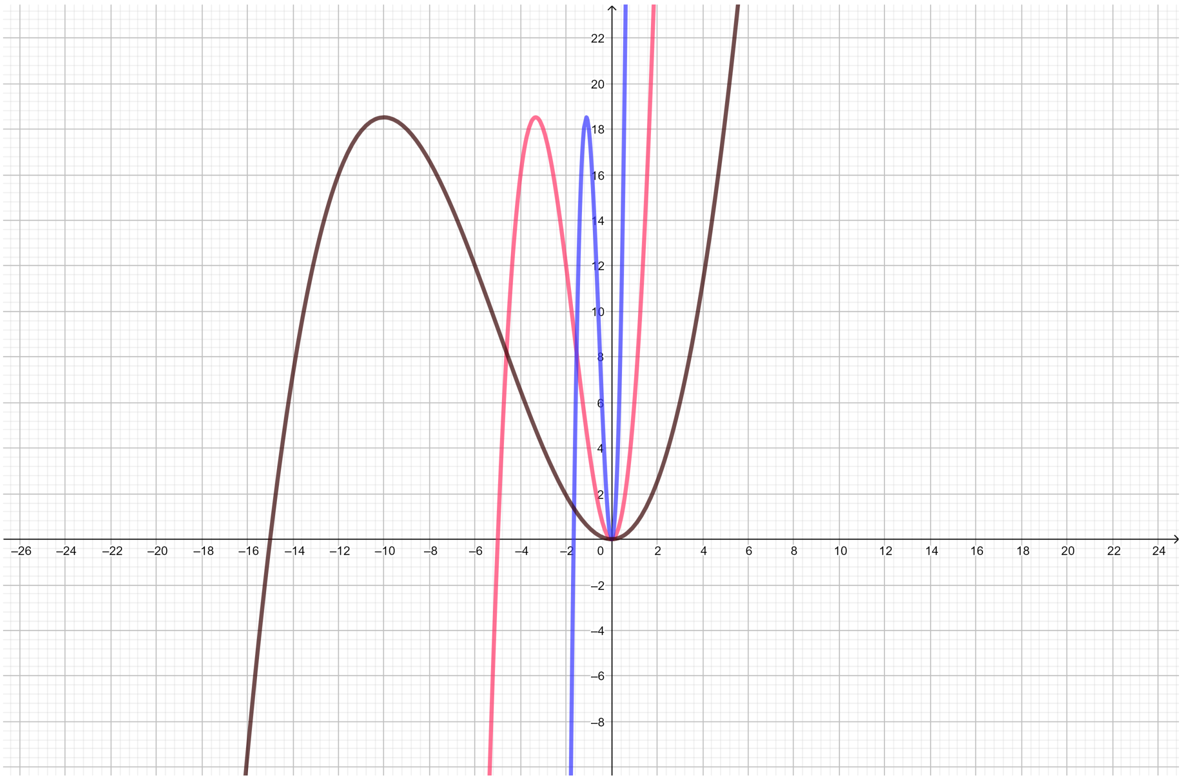


Figura 1.9: Na figura encontram-se representadas **homotetias na horizontal** da função $x \mapsto x^3 + 5x^2$ (a magenta) para valores de $c = 3$ (a azul) e $c = \frac{1}{3}$ (a castanho).

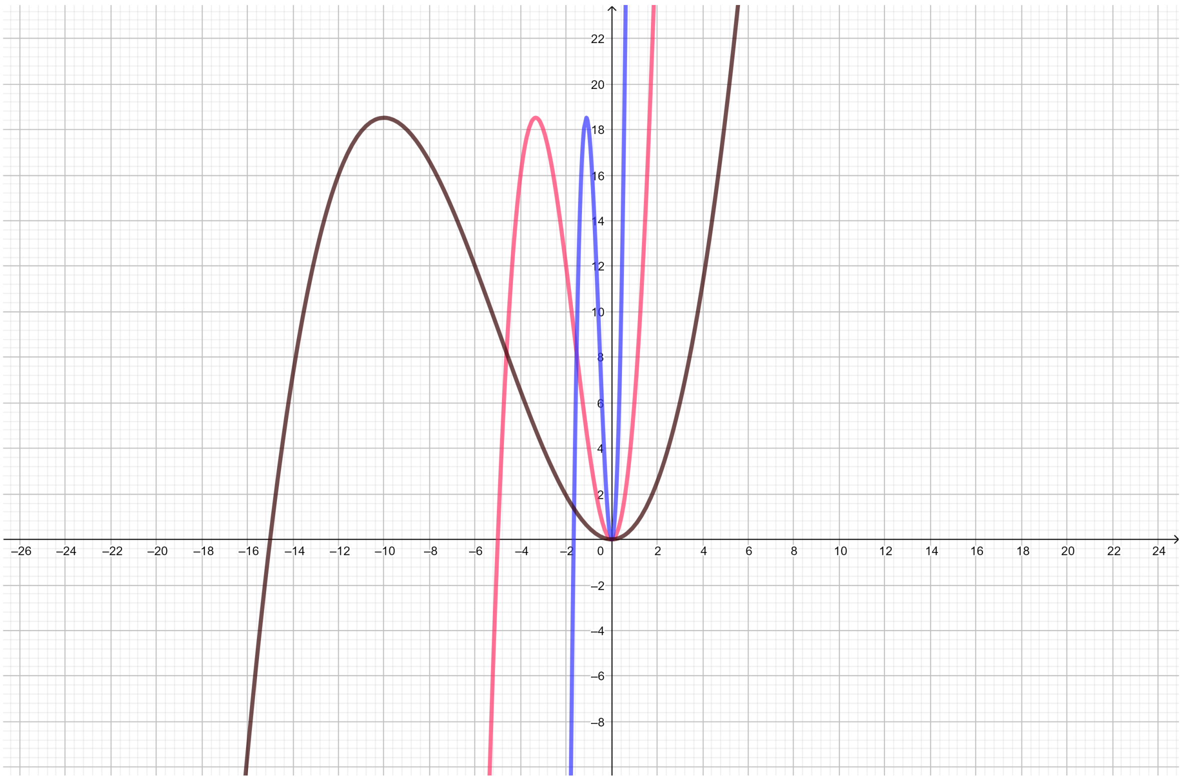


Figura 1.10: Na figura encontram-se representadas **homotetias na vertical** da função $x \mapsto x^3 + 5x^2$ (a magenta) para valores de $c = 3$ (a azul) e $c = \frac{1}{3}$ (a verde).

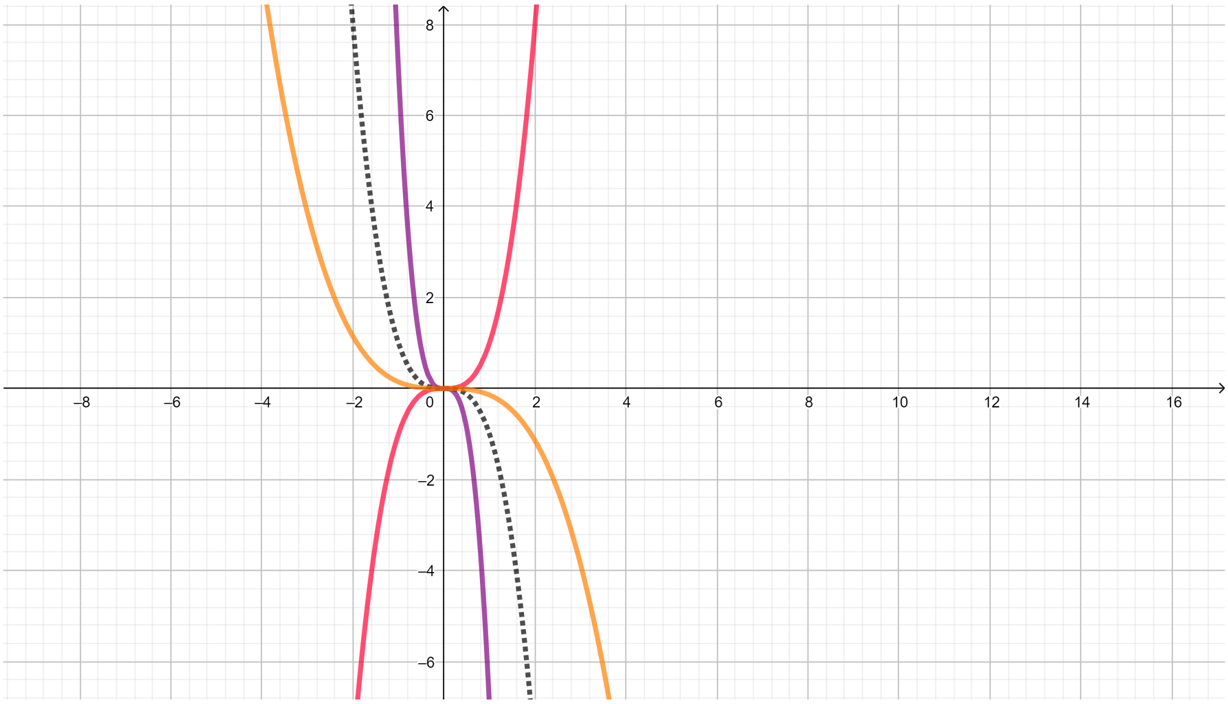


Figura 1.11: Na figura encontram-se representadas **reflexões e homotetias** do gráfico da função $x \mapsto x^3$ (a magenta) para valores de $-c = -7$ (a lilás) e $-c = -\frac{1}{7}$ (a laranja). O gráfico pontilhado (a preto) corresponde à reflexão de $x \mapsto x^3$ na horizontal e na vertical (que coincidem neste caso por estarmos perante uma função ímpar).

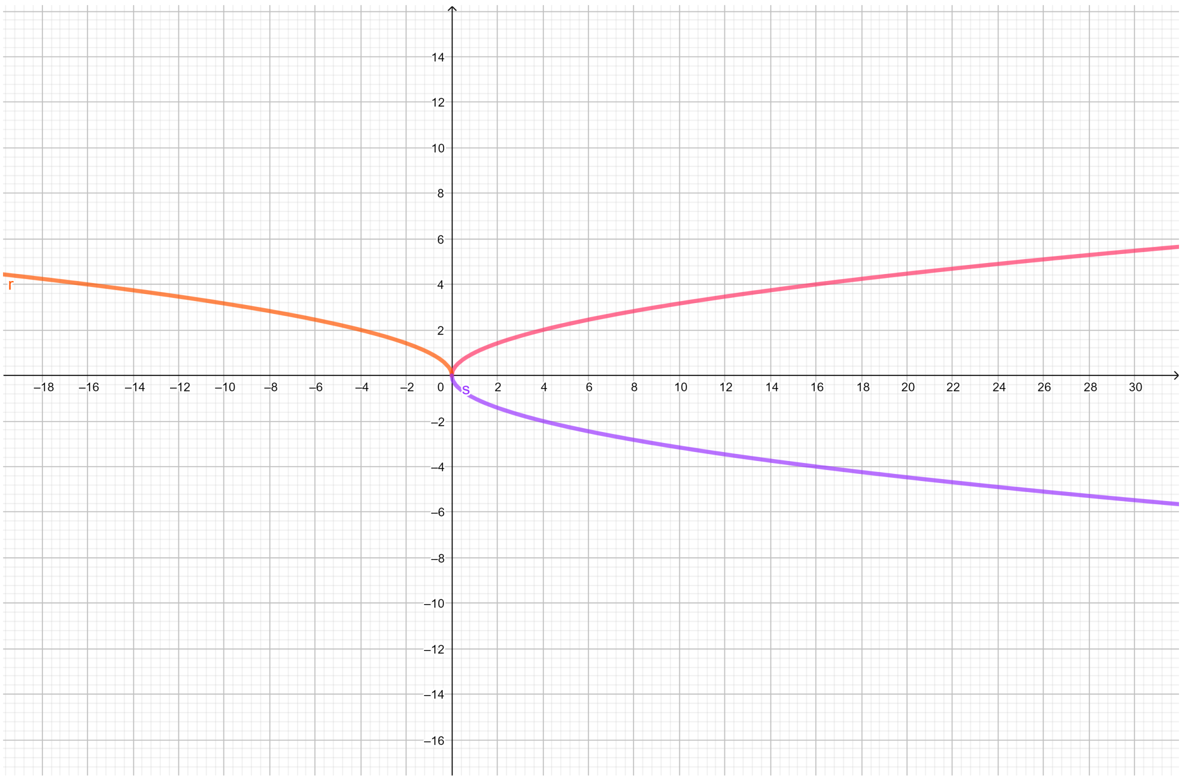


Figura 1.12: Na figura encontram-se representadas reflexões do gráfico função $x \mapsto \sqrt{x}$ do **Exemplo 1.13** na horizontal (a laranja) e na vertical (a lilás).

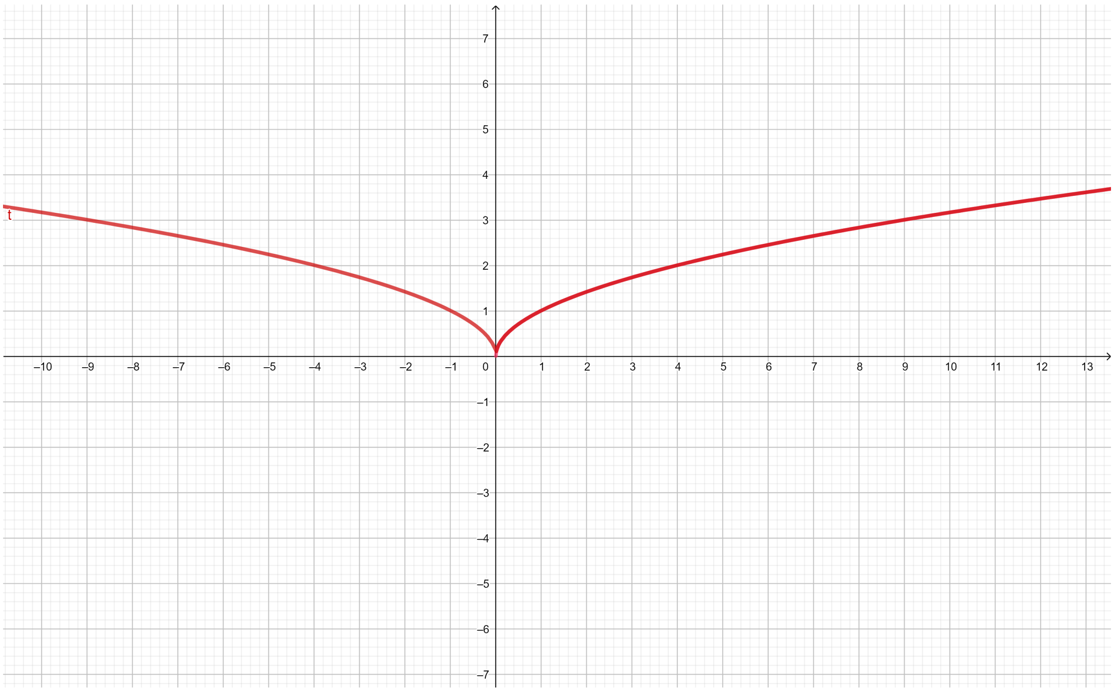


Figura 1.13: Na figura encontram-se representadas reflexões modulares na horizontal do gráfico função $x \mapsto \sqrt{x}$ do **Exemplo 1.13**. Note que à direita do eixo Oy corresponde ao gráfico da função enquanto que à esquerda de Oy uma versão reflectida deste.

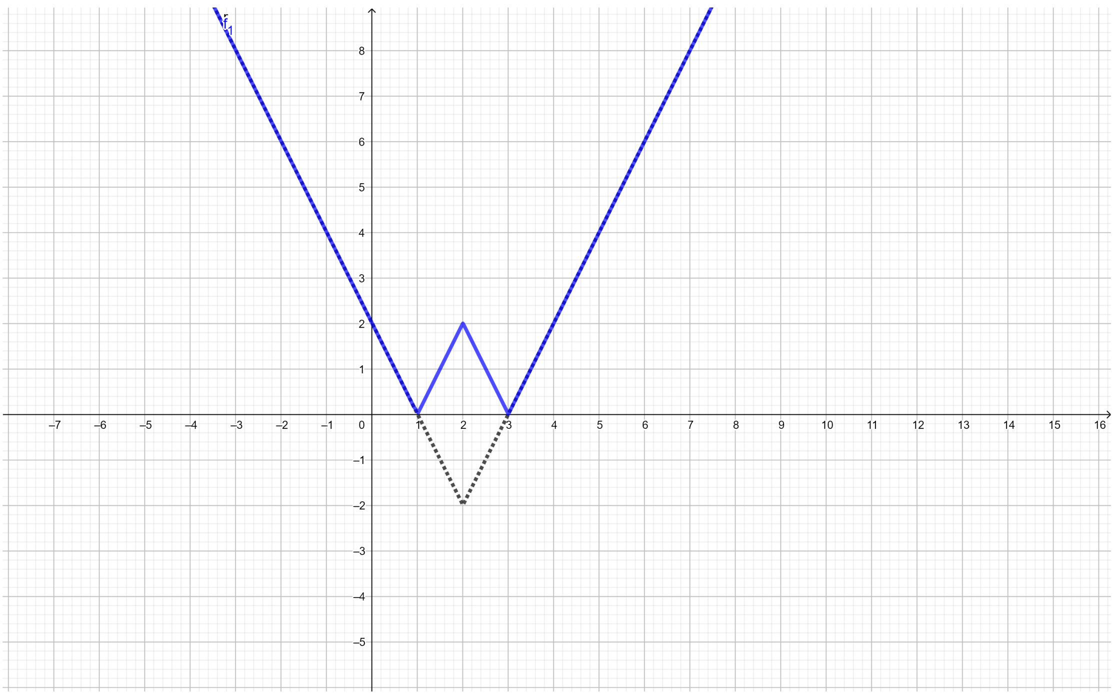


Figura 1.14: Na figura encontram-se representadas reflexões modulares na vertical do gráfico função $x \mapsto 2|x-2|-2$. Note o gráfico permanece igual para todos os pontos acima do eixo Ox. A parte do gráfico que se encontra abaixo do eixo Ox (a preto tracejado) aparece acima reflectida (gráfico em forma de **W**).

Pela mesma ordem de ideias do já que foi descrito anteriormente no **Exemplo 1.40**, podemos concluir que a equação da parábola com eixo de simetria horizontal – vide **Exemplo 1.6** – não define uma função, uma vez que:

1. Esta pode ser obtida a partir da curva $x = y^2$ por transformações gráficas;
2. A curva $x = y^2$ não define uma função – vide **Exemplo 1.40**.

Recorrendo a argumentos geométricos, podemos determinar o vértice da parábola $V = (h,k)$, ou seja as suas coordenadas

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = c - \frac{b^2}{4a}$$

do **Exemplo 1.40** do seguinte modo:

Passo 1. Observemos que a recta horizontal de equação $y = c$ intersecta sempre a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$. Assim,

$$ax^2 + bx + c = c \Longleftrightarrow ax^2 + bx = 0$$

Passo 2. Se $b = 0$ então o ponto $(0,c)$ é o vértice da parábola. Neste caso, temos $h = 0$ e $k = g(0) = c$.

Passo 3. Caso contrário ($b \neq 0$) obtemos dois pontos de interseção A e B, de abcissas $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$. Considerando o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, a sua abcissa vale $h = -\frac{b}{2a}$. Neste caso $\left(-\frac{b}{2a}, k\right)$ é o vértice da parábola, onde k é uma constante a calcular.

Passo 4. Assumindo que a igualdade

$$\underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k}_{=g(x)} = ax^2 + bx + c$$

é satisfeita, determininamos a constante k com base na condição $g(-\frac{b}{2a}) = k$.

O tipo de raciocínio ilustrado acima poderá vir a ser útil na resolução do próximo desafio.

Desafio 1.28 — Revisão da equação da circunferência. Verifique que a função dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{-3x - x^2}$$

define uma semi-circunferência.

Indique o centro $C = (\alpha, \beta)$ e o raio ρ da circunferência. De seguida:

1. Determine o domínio e o contradomínio de f com base no esboço do gráfico.
2. Mostre que o gráfico de f pode ser obtido a partir de $g(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ por via de translações na horizontal e na vertical.

É claro que a uma circunferência não corresponde o gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$. Basta aplicar, à semelhança do **Exemplo 1.9**, o **teste da recta vertical** para constatar que existem retas verticais que intersectam a circunferência em dois pontos.
Contudo, atendendo a que o eixo de simetria horizontal da circunferência divide-a em duas partes iguais, cada semi-circunferência passa a representar o gráfico de uma função.

Este é essencialmente o raciocínio a ser adoptado ao longo da Resolução do **Desafio 1.28**.

■ **Exemplo 1.41 — Equação da Parábola vs Fórmula Resolvente.** A representação de $y = ax^2 + bx + c$ por translações na horizontal e na vertical obtidas no **Exemplo 1.40** permite-nos deduzir a fórmula resolvente enunciada no **Teorema 1.3.3**.

Com efeito, x é um zero de g se, e só se

$$(x-h)^2 + \frac{k}{a} = 0.$$

Adicionalmente, usando o quadrado perfeito

$$z^2 - w^2 = (z-w)(z+w)$$

obtemos que a equação anterior é equivalente a

$$\left(x - h - \sqrt{-\frac{k}{a}}\right)\left(x - h + \sqrt{-\frac{k}{a}}\right) = 0,$$

desde que $\frac{k}{a} \leq 0$.

A verificação das identidades abaixo ficam ao cargo do leitor:

- $-\dfrac{k}{a} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
- x é um zero de $ax^2 + bx + c$ se, e só se,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

■

No caso da função quadrática, podemos ainda obter o seguinte resultado que relaciona o parâmetro de concavidade a com os zeros e o sinal da função quadrática. O teorema abaixo complementa assim a análise já realizada no decurso do **Exemplo 1.20**.

Teorema 1.4.2 — Concavidade vs Sinal da função quadrática. Para a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

podemos concluir o seguinte com base no estudo do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e do parâmetro de concavidade a:

- Se $\Delta < 0$ então ela é **positiva** resp. **negativa** se $a > 0$ resp. $a < 0$;
- Se $\Delta = 0$ então ela é **não negativa ou não positiva**. O sinal de f depende do sinal de a;
- Se $\Delta > 0$, então o sinal de f vai depender:
  - do sinal de a;
  - dos zeros $\lambda_1 < \lambda_2$ – vide **Exemplo 1.20**.

Ideia da demonstração. Primeiramente, observe que

$$ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k,$$

onde $h = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Caso $\Delta < 0$**:**
Note que

$$a(x-h)^2 \geq 0 \text{ se } a > 0 \;\&\; a(x-h)^2 \leq 0 \text{ se } a < 0.$$

Por outro lado, assumindo que $\Delta < 0$ obtemos:

$$k > 0 \text{ se } a > 0 \;\&\; k < 0 \text{ se } a < 0.$$

Combinando as desigualdades acima, segue que
- $ax^2 + bx + c \geq k > 0$, no caso de $a > 0$ (**função positiva**);
- $ax^2 + bx + c \leq k < 0$, no caso de $a > 0$ (**função negativa**).

Caso $\Delta = 0$**:**
Assumindo que $\Delta = 0$, temos que $ax^2 + bx + c$ é, na verdade, um quadrado perfeito, i.e.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Desta última igualdade podemos facilmente concluir que:
- $ax^2 + bx + c \geq 0$, no caso de $a > 0$ (**função não negativa**);
- $ax^2 + bx + c \leq 0$, no caso de $a < 0$ (**função não positiva**).

Caso $\Delta > 0$**:**
Note que a condição $\Delta > 0$ diz-nos que $k < 0$. Logo, seguindo a mesma ordem de ideias do **Exemplo 1.41**, resulta que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Finalmente, se escolhermos λ_1 como sendo o 'menor zero' de f e λ_2 como sendo 'maior zero' de f, i.e.

$$\lambda_2 = \min\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\},$$

$$\lambda_2 = \max\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\},$$

podemos recorrer aos quadros de sinal ilustrados no **Exemplo 1.20** para concluir a demonstração.
■

Com base na construção obtida ao longo do **Teorema 1.4.2**, o seguinte resultado é imediato:

Corolário 1.4.3 Para a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

podemos concluir o seguinte com base no estudo do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e do parâmetro de concavidade a:
- Se $a > 0$ (**gráfico é convexo**), então

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

corresponde ao valor mínimo de f;

- Se $a < 0$ (**gráfico é côncavo**), então

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

corresponde ao valor máximo de f.

Para terminar esta seção, pretende-se que faça uso do **Teorema 1.4.2** para consolidar o que aprendeu na subseção **1.3.5 Monotonia e Concavidades**.

Desafio 1.29 — Funções negativas. Determine o valor da constante a de modo a que a função

$$x \mapsto a\sqrt{ax^2 + 3x + 2a + 3}$$

seja **negativa em todos os pontos do seu domínio**.

Transformações gráficas em funções periódicas

O próximo resultado vai ao encontro do raciocínio já adoptado no **Exemplo 1.25** e **Desafio 1.20**. Este permite-nos calcular o período de funções que resultam de translações e homotetias no gráfico de uma função periódica – vide **Definição 1.4.4**.

Teorema 1.4.4 Seja f uma função periódica de período T. Então, para $\omega > 0$ e $\phi \in \mathbb{R}$ a função g definida por

$$g(x) = f(\omega x + \phi)$$

é uma função periódica de período igual a $\dfrac{T}{\omega}$.

Ideia da prova. Usando o facto de f ser uma função periódica, de período T, tem-se que

$$f(\omega x + \phi) = f(\omega x + \phi + T) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right) + \phi\right)$$

A sequência de igualdades acima permite-nos demonstrar que a função $g(x) = f(\omega x + \phi)$ satisfaz a igualdade

$$g(x) = g\left(x + \frac{T}{\omega}\right),$$

para todo o x, como pretendido. ■

O **Teorema 1.4.4** tem a seguinte interpretação física:

(a) O período de uma função periódica é independente do fator de fase (i.e. das **translações horizontais** ao gráfico de f) – que iremos interpretar como a constante $\phi \in \mathbb{R}$;

(b) A frequência de $x \mapsto f(\omega x + \phi)$ está directamente correlacionada com o período T e com as **mudanças de escalas** (i.e **homotetias**) no gráfico de f.

Em concreto, se

$$\lambda = \frac{\omega}{T}$$

denota o comprimento de onda induzido pela constante $\omega > 0$ (i.e. a velocidade de fase), então **a constante** $\dfrac{1}{\lambda}$ **dá-nos o período da função** $x \mapsto f(\omega x + \phi)$.

Desafio 1.30 Aplique o **Teorema 1.4.4** para verificar as conclusões obtidas no **Exemplo 1.25** e **Desafio 1.20**. De seguida, aplique o **Teorema 1.4.4** para calcular o período das seguintes funções:

1. $\cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$;
2. $\cot(3x - 7)$;

3. $\sec^2\left(\frac{5}{2}x\right)$;
4. $\sin^4\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

O **Desafio 1.58** que se encontra mais à frente na subseção **1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas** é um excelente exercício para aplicar o **Teorema 1.4.4**, assim como o conceito de inversa de uma função, que iremos abordar de seguida na subseção **1.4.5 Função Inversa e Gráfico**. Acresce que este lhe permitirá rever o conceito de paridade abordado na subseção **1.3.3 Paridade e Simetria**.

1.4.5 Função Inversa e Gráfico

A expressão analítica $x = f(y)$ transforma y em x por intermédio da função f. Suponha que quer e pode inverter esta correspondência, trocando o papel das variáveis. Para esse efeito deve então procurar a função g que permita recuperar o valor de $y = g(x)$ por alteração de x. Se existir g designa-se por f^{-1}.

Definição 1.4.5 — Função Inversa. Sejam $f : D \to Y$ e $g : Y \to D$ duas funções. Dizemos que g é a inversa de f, escrevemos $g = f^{-1}$ se, e só se
(i) $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in D$
(ii) $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in Y$.

No **Exemplo 1.37** temos que $f^{-1} = f$ se restringirmos o domínio de f ao conjunto $[0,1]$.

Com base no **Exemplo 1.38** tem-se que $g(x) = \sqrt{x}$ é a inversa de $f(x) = x^2$ se restringirmos o domínio de f ao intervalo $[0,+\infty[$.

Note que a condição (i) é equivalente a demonstrarmos que f é uma função injectiva:

(i) $\Rightarrow$ f é injectiva

Ideia da Demonstração. Com efeito, assumindo que a equação $(g \circ f)(x) = x$ é satisfeita, para todo o $x \in D$, é possível obter, para $x_1, x_2 \in D$, arbitrários, a sequência de implicações

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

■

(i) $\Leftarrow$ f é injectiva

Ideia da Demonstração. Assumindo agora que $f : D \to Y$ é injectiva tem-se que, para cada $y \in Y$, a equação $y = f(x)$ tem uma, e uma só solução. Esta condição permite-nos definir unicamente a função $g : Y \to D$ como sendo $x = g(y)$.

Tomando $y = f(x)$ obtemos que a sequência de igualdades

$$x = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

é verdadeira para todo o $x \in D$, como pretendido.

■

Por sua vez, a condição (ii) é equivalente a demonstrarmos que f é uma função sobrejectiva:

(ii) $\Rightarrow$ f é sobrejectiva

Ideia da Demonstração. Se $f : D \to Y$ podemos concluir com base na equação

$$(f \circ g)(y) = y$$

que $x = g(y)$ é solução da equação $y = f(x)$, logo sobrejectiva. ■

(ii) $\Leftarrow$ f é sobrejectiva

[Fica como exercício.]

Voltando ao **Exemplo 1.38**, as regras de composição

$$(g \circ f)(x) = |x| \quad \& \quad (f \circ g)(x) = x$$

permitem-nos concluir que a função f não é injectiva mas é sobrejectiva.

Teorema 1.4.5 — Função Inversa vs Função Bijectiva. Seja $f : D \to D'$ uma **função sobrejectiva**. Diz-se que f é invertível se f é injectiva.
A função inversa de f, $f^{-1} : D' \to D$ satisfaz

$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)$$

para todo o $x \in D'$ e para todo o $y \in D$.

O teorema anterior diz-nos essencialmente que, caso f^{-1} exista, o domínio de f^{-1} é igual ao contradomínio de f e o contradomínio de f^{-1} é igual ao domínio de f.

O teorema acima permite-nos formular o seguinte procedimento algébrico para determinar f^{-1}:
Passo 1. Determinar o contradomínio de f;
Passo 2. Trocar de variáveis em $y = f(x)$;
Passo 3. Resolver em ordem a y a igualdade $x = f(y)$ resultante do ítem anterior;
Passo 4. Definir a inversa de f, $f^{-1} : D' \to D$, indicando o domínio e a expressão analítica.

O tipo de procedimento descrito anteriormente foi essencialmente o procedimento realizado no **Exemplo 1.13** para determinar a função raiz quadrada como inversa da função quadrática $f(x) = x^2$ (vide **Exemplo 1.8**).

No próximo exemplo iremos fazer uso do facto de $y \mapsto x = \sqrt[3]{y}$ corresponder à inversa da função $x \mapsto y = x^3$.

■ **Exemplo 1.42** Seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{-3}$. O domínio de f coincide com o contradomínio, sendo precisamente igual a $\mathbb{R} - \{0\}$. A função f é injectiva pois, para quaisquer x_1 e x_2, pertencentes ao domínio de f, tem-se

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^{-3} = x_2^{-3} \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3$$

donde

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Tendo f inversa, determine-se a expressão analítica através de

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^3} \Leftrightarrow y^3 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Então

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{0\} \\ & x & \longmapsto & y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-1/3} \end{array}$$

■

■ **Exemplo 1.43** A função irracional dada por $f(x)=\sqrt{x+2}$ tem como inversa a restrição da função quadrática g ao intervalo $[0,+\infty[$ que verifica

$$g(x)=x^2-2$$

De facto

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+2})=(\sqrt{x+2})^2-2=x$$

para todo $x\geq -2$ e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=\sqrt{x^2}=|\,x\,|=x$$

para todo $x\geq 0$. ■

Corolário 1.4.6 — Gráfico da função inversa. Se $f^{-1}:D'\to D$ é a inversa de $f:D\to D'$, então os gráficos de f^{-1} e de f são simétricos em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares, isto é:

$$(x,y)\in graf(f)\iff (y,x)\in graf(f^{-1}).$$

Em particular,
$$graf(f^{-1})=\{(f(x),x)\ :\ x\in D\}.$$

■ **Exemplo 1.44** Voltemos ao exemplo da função limitada ilustrada no **Exemplo 1.27**.

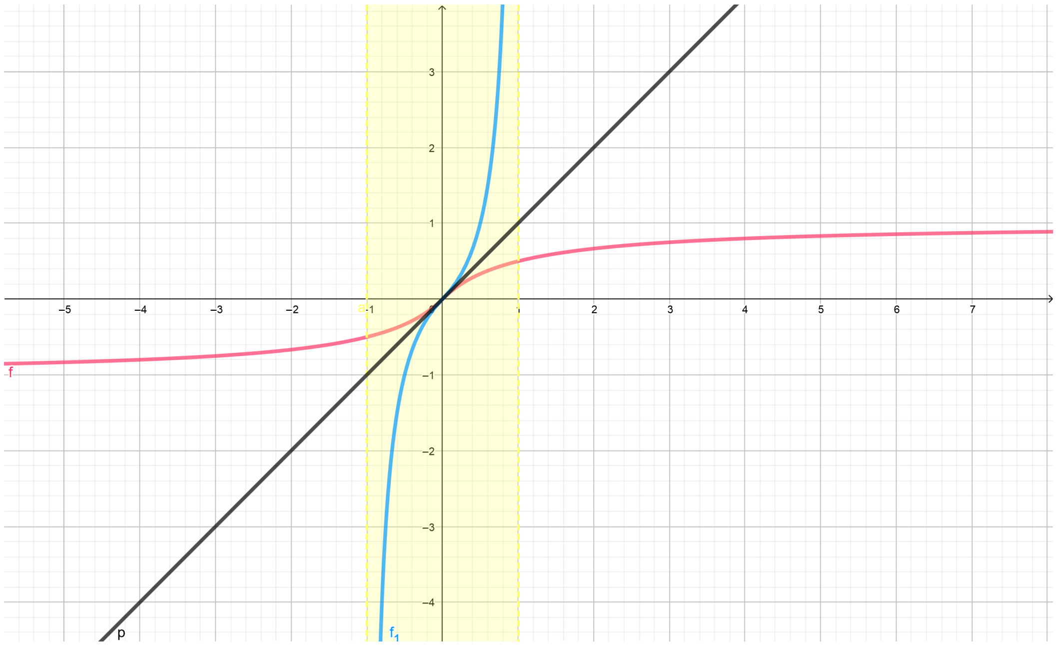
Em primeiro lugar, note-se que a análise do gráfico da função, $x\mapsto f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, nos permite facilmente concluir que esta é sobrejectiva se restringirmos o conjunto de chegada ao contradomínio

$$D'_f=]-1,1[.$$

Isto permite-nos desde já determinar o domínio da função inversa f^{-1}, $D_{f^{-1}}=]-1,1[$. Geometricamente, isto equivale a dizer que o domínio de f^{-1} está compreendido entre as retas verticais, de equação

$$x=-1 \quad \text{e} \quad x=1$$

tal qual ilustrado na figura abaixo (região a amarelo).



Note ainda que na figura abaixo, o gráfico de f aparece representado a magenta, ao par que o gráfico de $f^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ aparece representado a azul ciano. Este último gráfico, correspondente ao conjunto

$$graf(f^{-1}) = \left\{ \left(\frac{x}{1+|x|}, x \right) \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Este último foi obtido com recurso ao GeoGebra fazendo a reflexão do gráfico de f relativamente à recta de equação $y = x$.

Para mais detalhes, consulte o link:

`https://www.geogebra.org/m/h4qnbabg`.

■

O **Corolário 1.4.6** fornece-nos uma construção geométrica para determinar o gráfico de uma função inversa mesmo sem conhecer a expressão analítica de f^{-1}.
Este tipo de construção foi-nos particularmente útil no **Exemplo 1.44**, dado que a equação

$$x = \frac{y}{1+|y|}$$

que teríamos de resolver em ordem a y (**Passo 3.**) é não linear.

Desafio 1.31 — Revisão do estudo de domínios de funções gráficas. Sem calcular a regra de composição $(f^{-1} \circ g)(x)$, Determine o domínio da função $f^{-1} \circ g$, sendo:

1. f a função do **Exemplo 1.44**;
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = -2x+3$.

Desafio 1.32 — Revisão da Equação da Circunferência. Após ter verificado no **Desafio 1.28** que a função dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{-3x - x^2}$$

define uma semi-circunferência de centro $C = (\alpha, \beta)$ e raio ρ, verifique que a função da forma

$$g(y) = a - \sqrt{\rho^2 - (y-\beta)^2}$$

satisfaz as seguintes condições:

(i) $(f \circ g)(y) = y$;
(ii) $(g \circ f)(x) = \alpha - |x - \alpha|$.

De seguida, justifique com base no esboço de ambos os gráficos que para valores de x no intervalo $[\alpha - \rho, \alpha]$:

(iii) f é injectiva;
(iv) o gráfico de g pode ser obtido como reflexão do gráfico de f em relação á reta $y = x$ (bissectriz dos quadrantes ímpares).

Desafio 1.33 — Revisão da Definição 1.4.5. Use a função, $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, considerada no **Exemplo 1.27** para mostrar que a função definida por

$$g(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

de domínio $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ não é injectiva[6] mas é sobrejectiva.

De seguida, verifique com recurso ao GeoGebra que o gráfico obtido a partir da reflexão de g em relação à recta $y = x$ apenas coincide com o gráfico de f se restringirmos o domínio de g ao intervalo $]-1, 1[$.

1.5 Directório: Funções Algébricas e Funções Transcendentes

Definição 1.5.1 — Funções Elementares. Diz-se que a função $f : D \to Y$:

- É Algébrica se pode ser expressa em termos de um número finito de operações, tais como adição, multiplicação, divisão ou radiciação de funções polinomiais. Exemplos: Funções Polinomiais, Racionais e Irracionais.
- É Transcendente se f não é algébrica. Exemplos: Funções Exponencial, Logarítmica, Hiperbólicas, Trigonométricas directas e Trigonométricas Inversas.

1.5.1 Funções Polinomiais

Definição 1.5.2 — Funções Polinomiais. A função polinomial é definida pela expressão

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

sendo $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$ e $n \in \mathbf{N_0}$ constantes, tais que $a_n \neq 0$. Os números reais a_j são os coeficientes do polinómio e n é o seu grau. Odomínio de p_n é $\mathbb{R}$.

Notação 1.5 — Raízes de um polinómio. Os zeros de funções polinomiais da forma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

são conhecidos na literatura por **raízes** de p_n.

Teorema 1.5.1 — Factorização de polinómios. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ uma raiz do polinómio p_n de grau n. Então existe um polinómio q_{n-1} de grau igual a $n-1$ tal que

$$p_n(x) = (x - \lambda) q_{n-1}(x).$$

Em geral, se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ $(1 \leq k \leq n)$ são k raízes de p_n, então existe um polinómio de grau igual a $n-k$ tal que

$$p_n(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_k) q_{n-k}(x).$$

[6] Note que $|g(x)| = \frac{|x|}{1-|x|}$ se, e só se, $|x| < 1$.

No caso de conhecermos as n raízes [reais] $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ do polinómio p_n (vide **Notação 1.5**), tem-se que

$$p_n(x) = a_n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n),$$

onde a_n é o coeficiente associado ao termo de maior grau do polinómio $p_n(x)$.

Desafio 1.34 — Relação entre as raízes da função quadrática. Verifique que no caso de $\Delta \geq 0$ o polinómio $p_2(x) = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ $(a \neq 0)$ coincide com a função quadrática ax^2+bx+c se, e só se, as equações abaixo são satisfeitas

$$\lambda_1+\lambda_2 = -\frac{b}{a} \quad \& \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}.$$

Mostre ainda que $\Delta = a^2(\lambda_1-\lambda_2)^2$.

■ **Exemplo 1.45 — Função Cúbica.** O número $x=-3$ é uma raíz do polinómio $p_3(x) = x^3+27$ uma vez que

$$(-3)^3+27=0.$$

Podemos ainda verificar com recurso ao **Teorema 1.5.1** que $x=-3$ é a única raíz de p_3. Com efeito, sabendo que $x=-3$ o algoritmo da divisão assegura-nos a existência de um polinómio $q_2(x)$ de grau 2 tal que

$$p_3(x) = (x+3)q_2(x).$$

Com base em cálculos auxiliares podemos concluir que $q_2(x) = x^2-3x+9$. Finalmente, com base no critério mencionado no **Exemplo 1.3.3** não admite raízes reais, uma vez que $\Delta = -27 < 0$.

■

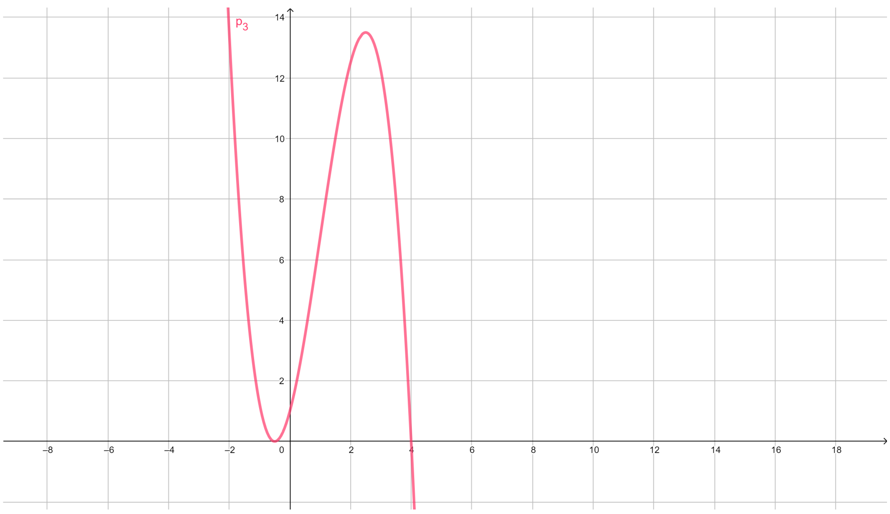
Desafio 1.35 Determine para que valores de b o polinómio

$$p_3(x) = (x+3)(x^2+bx+9)$$

admite pelo menos duas raízes (i.e. pelo menos mais uma raiz para além de $x=-3$).

■ **Exemplo 1.46** O gráfico da função representado abaixo corresponde ao gráfico do polinómio

$$p_3(x) = -x^3+3x^2+\frac{15}{4}x+1.$$



Facilmente podemos concluir com base na figura que este polinómio apresenta duas raízes reais, sendo que $x=4$ é uma das raízes de $p_3(x)$.

Aplicando o **Teorema 1.5.1** podemos deduzir que $p_3(x) = (x-4)q_2(x)$, sendo

$$q_2(x) = -x^2 - x - \frac{1}{4}.$$

Adicionalmente, aplicando a fórmula resolvente verificamos que $x = -\frac{1}{2}$ é a única raiz de $q_2(x)$ uma vez que $\Delta = 0$ (vide **Teorema 1.3.3**).

De facto, $q_2(x)$ é um quadrado perfeito que pode ser representado na forma

$$q_2(x) = (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Portanto, p_3 pode ser escrito na forma

$$p_3(x) = -(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

■

O **Exemplo 1.46** mostra-nos que na factorização

$$p_n(x) = a_n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$$

podem aparecer raízes iguais (i.e. $\lambda_i = \lambda_j$ para $i \neq j$).

No **Exemplo 1.45** & **Exemplo 1.46** verificámos que, conhecendo pelo menos uma raiz de um polinómio p_n, é possível determinar as restantes raízes.
Em geral, para polinómios de grau $n > 2$ a determinação de raízes de p_n nem sempre é uma tarefa trivial, como iremos ver de seguida no **Exemplo 1.47**.

■ **Exemplo 1.47** Podemos facilmente verificar que $x = -1$ e $x = 1$ são duas raízes do polinómio $p_8(x) = x^8 - 4x^4 + 3$. Logo, a observação que sucede o **Teorema 1.5.1** assegura-nos a existência de $q_6(x)$ tal que

$$p_8(x) = \underbrace{(x-1)(x+1)}_{=x^2-1} q_6(x).$$

Mais uma vez, cálculos auxiliares baseados no algoritmo da divisão permitem-nos concluir que $q_6(x) = x^6 + x^4 - 3x^2 - 3$. No entanto, a inexistência de uma fórmula geral para determinarmos as raízes de q_6 não nos permite concluir se o polinómio p_8 possui raízes adicionais para além de $x = \pm 1$. ■

Desafio 1.36 Com base na mudança de variável $y = x^4$ verifique que $x = -1$ e $x = 1$ são, de facto, as únicas raízes de $x^8 - 4x^4 + 3$.

Desafio 1.37 Use a mudança de variável $y = (x-1)^2$ para determinar todas as soluções da equação

$$(x^2 - 2x)^2 - (x-1)^2 + 1 = 0.$$

1.5.2 Funções Racionais

Definição 1.5.3 — Função Racional. Diz-se que f é uma função racional se é definida por

$$x \longmapsto f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

para todo $x \in D = \{x \in \mathbb{R} : q_m(x) \neq 0\}$, onde $n \in \mathbb{N}_{\not{0}}$, $m \in \mathbb{N}$ e $a_i\ (i = 0, \dots, n)$, $b_j\ (j = 0, \dots, m)$ são constantes reais tais que $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.

A função racional diz-se ainda que:
- É própria se $n < m$
- É imprópria se $n \geq m$

Exemplo 1.48 — Funções Racionais Próprias. São exemplo de funções racionais próprias as funções:

(i) $\dfrac{1}{x}$;

(ii) $\dfrac{4}{3x+8}$;

(iii) $\dfrac{x^2-1}{x^3+4x}$.

■

Exemplo 1.49 — Funções Racionais Impróprias. São exemplo de funções racionais próprias as funções:

(i) $\dfrac{2x-1}{x+3}$;

(ii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+4}$;

(iii) $\dfrac{x^4+3x^2+3x+1}{x^4+2x^2}$.

■

Com base na **Definição 1.5.3** e no **Teorema 1.4.1** tem-se que os **zeros de** $\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ são essencialmente as **raízes de** $p_n(x)$. Por seu turno, o domínio de $\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ é constituído por todos os números reais **com excepção das raízes de** $q_m(x)$**.**

Desafio 1.38 Determine o domínio e os zeros das funções racionais impróprias do **Exemplo 1.49**.

Exemplo 1.50 Sendo $m \in \mathbf{N}$, definimos a função potência de expoente inteiro negativo, $x \mapsto f_m(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, para todo $x \in D$. ■

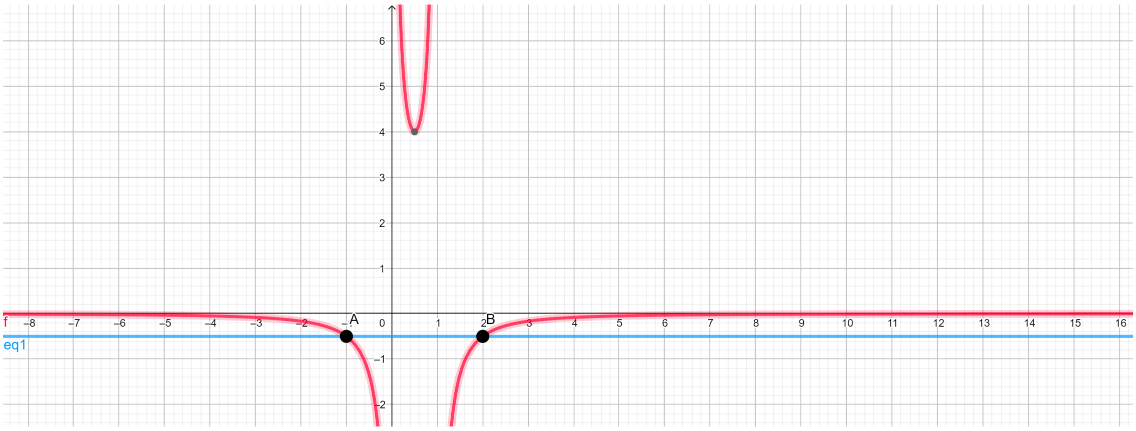
Desafio 1.39 Determine o domínio e enuncie as propriedades da função potência de expoente inteiro negativo.

Resolução de equações e inequações

Exemplo 1.51 Graficamente, a resolução da equação

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

pode ser determinada como a interseção do gráfico da função racional imprópria, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$, (a magenta) com a reta horizontal de equação $y = -\frac{1}{2}$ (a azul ciano) tal como ilustrado na figura abaixo, onde as abcissas dos pontos A e B representam as duas soluções da equação.



Analiticamente, para determinar as soluções da equação acima precisamos de utilizar um argumento análogo ao utilizado para a determinação do mínimo múltiplo comum (m.m.c), para podermos simplificar f na forma $\frac{p}{q}$.

Em concreto, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} &= \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} \\ &= -\frac{1}{x^2 - x}. \end{aligned}$$

Logo $f(x) = -\frac{1}{2}$ se, e só se $x^2 - x = 2$, $x \neq 0$ e $x \neq 1$, ou equivalentemente

$$x^2 - x - 2 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1.$$

A tarefa de determinar as raízes do polinómio acima de modo a confirmar a resolução gráfica fica a cargo do leitor. ■

1.5.3 Funções Irracionais

■ **Exemplo 1.52** Sendo $n \in \mathbf{N}$ e $n \neq 1$, definimos a função raiz de índice n, $x \mapsto f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, para todo $x \in D$.

Propriedades:

(i) Se n é par então:

1. $D = [0, +\infty[$
2. É positiva
3. É estritamente crescente
4. É convexa

(ii) Se n é ímpar então

1. $D = \mathbb{R}$
2. É negativa em $]-\infty, 0[$ e positiva em $]0, +\infty[$
3. É estritamente crescente
4. É convexa em $]-\infty, 0[$ e côncava em $]0, +\infty[$

■

■ **Exemplo 1.53** (Funções raiz raiz cúbica e raiz indice 4)

■

Desafio 1.40 Consideremos $x \mapsto f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$ e $n \neq 1$.

(i) Defina a função inversa de f_n;

(ii) Defina a função reciproca de f_n;

(iii) Para $n = 3$, faça os gráficos das funções inversa e reciproca que obteve e assinale as diferenças/semelhanças entre essas funções.

1.5.4 Funções Exponenciais

Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial de base a é definida por $f(x) = a^x$, para todo $x \in D$.
Propriedades:

1. $D = \mathbb{R}$ e $D' =]0, +\infty[$;
2. É positiva, isto é, $a^x > 0$ para todo o real x;
3. Não é ímpar nem par;
4. Não é limitada nem periódica;
5. É estritamente crescente se $a > 1$ mas é estritamente decrescente se $a < 1$;
6. É convexa.

Eis as regras operatórias das exponenciais:

- $a^0 = 1$; $a^1 = a$;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$;
- $a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$;
- $a^{x_1x_2} = (a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1}$;

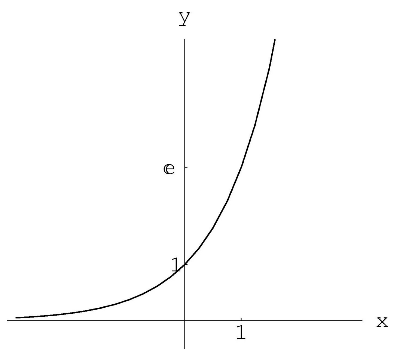
para x, x_1, x_2.
De entre as funções exponenciais, as exponenciais de base e têm mais relevância, sendo

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828\ldots$$

o número de Neper.

■ **Exemplo 1.54** Gráfico da função exponencial de base e:

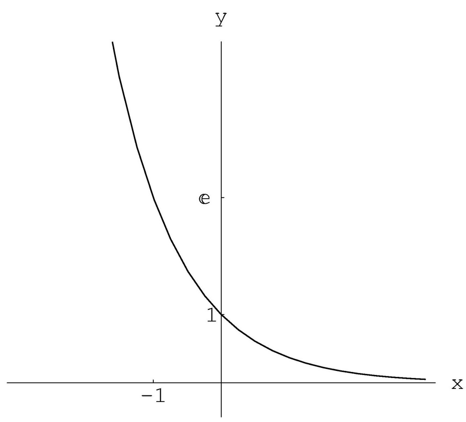
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & y = f(x) = e^x \end{array}$$



■

■ **Exemplo 1.55** Gráfico da função exponencial de base e^{-1}:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & y = g(x) = e^{-x} \end{array}$$



■

Desafio 1.41 Identifique, justificando, a simetria entre os gráficos de f e g no **Exemplo 1.54** e **Exemplo 1.55**.

Desafio 1.42 Considere as funções f e j definidas por

$$f(x) = e^{-x} - 2\ ,\ j(x) = e^{x}\ .$$

(a) Trace o gráfico de f tendo por base o gráfico de j.
(b) Determine a ordenada do ponto que pertence ao gráfico de f cuja abcissa é $\ln(0,5)$.
(c) Determine o conjunto-solução de

$$\{x \in \mathbb{R} : -1 < f(x) \leq 0\}\ .$$

Recorrendo a argumentos geométricos, verifique se o conjunto de pontos que obteve está correcto.
(d) Resolva a equação $f(x) = j(x)$.

■ **Exemplo 1.56 — Modelos Populacionais.** A evolução do número de indivíduos de uma população ao longo do tempo t, $t \geq 0$ é representada por uma função $t \mapsto y = f(t)$. No período de tempo $I = [t, t+1]$, o acréscimo do tamanho da população é dado por

$$\Delta y = f(t+1) - f(t).$$

Assim, a população cresce em I se $\Delta y > 0$ mas decresce em I se $\Delta y < 0$.
Além disso, a taxa de variação relativa (i.e, por indivíduo) em I é definida por

$$r(t) = \frac{\Delta y}{y}.$$

■

Desafio 1.43 Determine a taxa de de variação relativa em $[t, t+1]$, $r(t)$, para os modelos populacionais representados por
(i) $f(t) = at + b$, onde a e $b > 0$ são constantes;
(ii) $f(t) = ba^t$, onde $a > 0$, $a \neq 1$, e $b > 0$ são constantes;
(iii) Explique as diferenças entre os dois modelos.
Desafio 1.44 **Aplicação - R_0 o número básico de reprodução usado em Epidemeologia** - Link: `https://www.youtube.com/watch?v=S6IyIsbaG2k`
Considere $y = f(t)$ o número de indivíduos infectados por um vírus no instante t. Recorrendo ao modelo exponencial, representado por $f(t) = ba^t$, justifique que R_0 é obtido através de uma razão (ou rácio).
Verifique que R_0 está relacionado com a taxa de variação relativa em $[t, t+1]$. Assim sendo, podemos concluir que:

- Se $R_0 > 1$ então cada indivíduo infecta, em média, mais do que um indivíduo e a doença se propaga;
- Se $R_0 < 1$ então cada indivíduo infecta, em média, menos do que um indivíduo e a doença se erradica.

Consulte ainda - Link: `https://plus.maths.org/content/maths-minute-r0-and-herd-immunity`

■ **Exemplo 1.57 — Modelo de Juros Compostos com Capitalização Contínua.** Quando um cliente de uma instituição bancária pede dinheiro emprestado paga um juro sobre o montante devido e quando deposita dinheiro, por exemplo, numa conta poupança, recebe um juro sobre o montante do depósito. O juro é determinado como o produto do capital por uma taxa, durante um período acordado entre as partes. Assim, o juro é uma variável, referida ao período de capitalização, mas só disponível no vencimento que, geralmente coincide com o fim do período. Mas, o capital é uma variável, referida a um momento (início ou fim do período de capitalização). A capitalização é a transformação ao longo do tempo do capital em capital e juro de acordo com uma dada taxa de juro.

No regime de juros compostos, o stock de capital cresce de vencimento para vencimento; há juros de juros no interior do próprio processo de capitalização; os juros, mal se vencem, passam a ser capital para contagem do juro do período seguinte.
Suponhamos que um dado capital inicial, C_0 euros, é aplicado durante um ano a uma taxa de juro anual fixa de r por cento. Admitamos ainda que a capitalização desse capital se efectua em n períodos iguais durante o ano. Então o capital acumulado no final do ano é dado por

$$C = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

Generalizando, isto é, supondo agora que um dado capital inicial, C_0 euros, é aplicado à taxa anual fixa de r por cento, capitalizável n vezes ao ano, então a expressão geral do capital acumulado no regime de juros compostos ao fim de t anos é

$$C = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Matematicamente, suponhamos agora que $n \to +\infty$.
Atendendo a que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

vem

$$C = \lim_{n\to+\infty} C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = C_0 \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = C_0e^r$$

Esta fórmula representa então o capital acumulado no final do ano em função do capital inicial C_0 aplicado a uma taxa de juro fixa anual de r por cento. Generalizando, a expressão geral do capital acumulado ao fim de t anos é

$$C = C_0e^{rt}$$

Diz-se que é a fórmula do juro composto com capitalização contínua. ■

✓ Se o seu banco lhe oferece uma taxa de juro anual de $100r$ %, e se este juro é composto n vezes por ano (p.e. mensal, trimestral, semestral) então a taxa de juros mensal que é aplicado ao seu depósito a prazo é igual a $k = \frac{100r}{n}$ %.

Desafio 1.45 Suponha que um capital de 2000 euros é colocado a render numa conta poupança, em regime de juros compostos, à taxa fixa anual de 4%. Quanto tempo é necessário para duplicar o capital inicial?

(a) Resolva o problema, aplicando o regime de juros compostos com capitalização trimestral, semestral e anual.
(b) Resolva o problema, aplicando o regime de juros compostos com capitalização contínua.
(e) Compare os resultados obtidos nas alíneas (a) e (b) e explique-os.

1.5.5 Funções Hiperbólicas

As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são definidas, respectivamente, por

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \& \quad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

✓ Com base no **Teorema1.3.5**, as funções $x \mapsto \cosh(x)$ e $x \mapsto \sinh(x)$ correspondem à parte par e à parte ímpar, respectivamente, da função exponencial $x \mapsto e^x$.

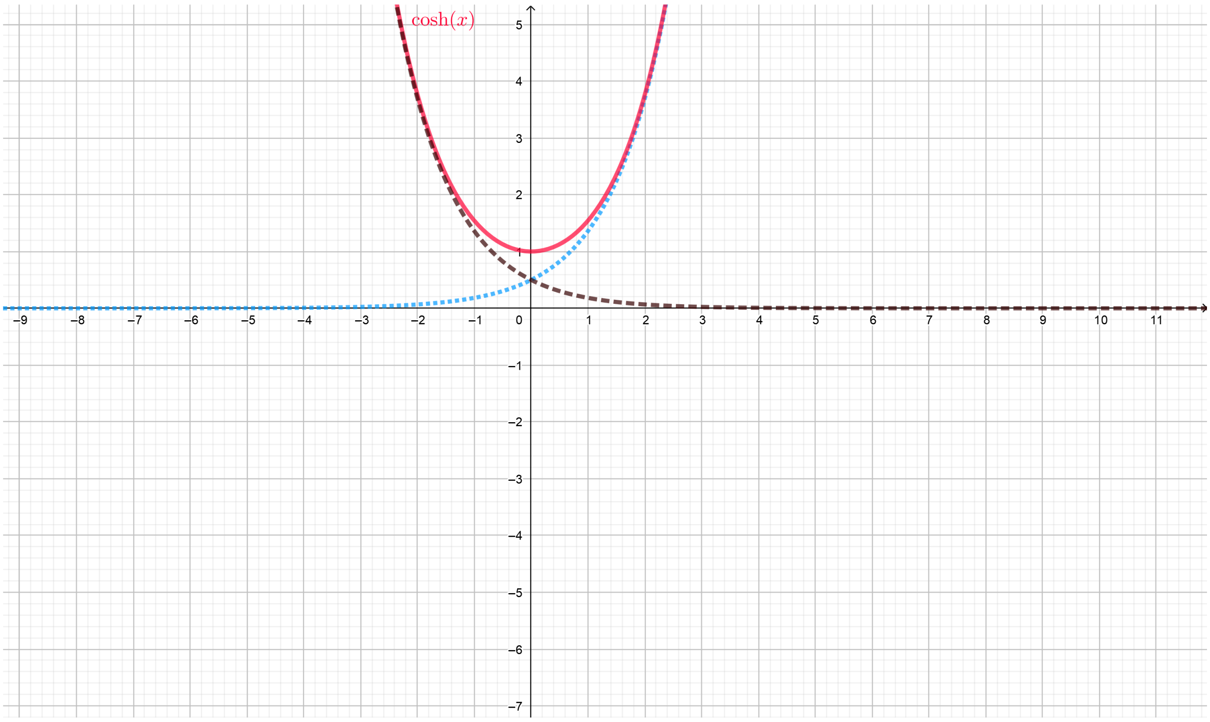


Figura 1.15: Ilustração gráfica do **Teorema 1.3.5**. O gráfico da função cosseno hiperbólico como sobreposição dos gráficos das funções $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x}$ (pontilhado a azul ciano) e $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ (tracejado a castanho).

Figura 1.16: Ilustração gráfica do **Teorema 1.3.5**. O gráfico da função seno hiperbólico como sobreposição dos gráficos das funções $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x}$ (pontilhado a azul ciano) e $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x}$ (tracejado a laranja).

Desafio 1.46 Determine o domínio e o contradomínio das funções hiperbólicas (cosseno e seno) e estude as suas propriedades quanto ao sinal e paridade. Recorrendo aos gráfico, estude a monotonia e as concavidades.

Desafio 1.47 **Aplicação - Catenária** - Link: `https://youtu.be/yBH5ezzY_-0`

Um cabo flexível e não-elástico suspenso em dois extremos com a mesma altura sob a ação da gravidade descreve uma curva, conhecida por catenária. Essa curva representa o gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{e^{mx+b} + e^{-mx-b}}{2m}$$

onde $m > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Admita que para valores de $m = 0,15$ e $b = -0,90$ a função acima corresponde a uma catenária formada por um fio suspenso de dois postes, P_1 e P_2, distanciados 15 metros entre si, em que $f(x)$ dá-nos a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado à direita do poste P_1, com $x \in [0,15]$.

1. Verifique se os postes P_1 e P_2 têm a mesma altura.
2. Suponha que um pássaro pousa num ponto do fio, situado mais perto do poste P_1 do que do poste P_2, a uma distância [aproximada] de $12,5$ metros do solo. Determine a distância desse ponto do fio ao poste P_2.

Desafio 1.48 — Identidades envolvendo funções hiperbólicas.

Mostre que:

(**i**) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$ (**ii**) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(**iii**) $\cosh x > \sinh x$ (**iv**) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x)$

Tal como para as funções circulares podemos definir as seguintes funções:

1. Tangente hiperbólica $x \mapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$;
2. Cotangente hiperbólica $x \mapsto \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$;
3. Secante hiperbólica $x \mapsto \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$;
4. Cossecante hiperbólica $x \mapsto \coth x = \frac{1}{\sinh x}$.

1.5.6 Funções Logarítmicas

Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, a função logarítmica de base a é definida por $f(x) = \log_a x$, para todo $x \in D$.

Propriedades:

1. $D =]0,+\infty[$ e $D' = \mathbb{R}$;
2. É negativa em $]0,1[$, mas positiva em $]1,+\infty[$ se $a > 1$. Caso contrário, é positiva em $]0,1[$, mas negativa em $]1,+\infty[$;
3. Não é ímpar nem par;

4. Não é limitada nem periódica;
5. É estritamente crescente se $a > 1$ mas é estritamente decrescente se $a < 1$;
6. É côncava se $a > 1$ mas é convexa se $a < 1$.

Eis as regras operatórias dos logaritmos

- $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$
- $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a (x^p) = p \log_a x$

para $x, x_1, x_2 \in]0, +\infty[$ e para todo $p \in \mathbb{R}$.
O próximo resultado serve para calcular logaritmos por intermédio de uma mudança de base.

Teorema 1.5.2 Quaisquer que sejam os reais positivos a e b, distintos e diferentes da unidade, tem-se

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

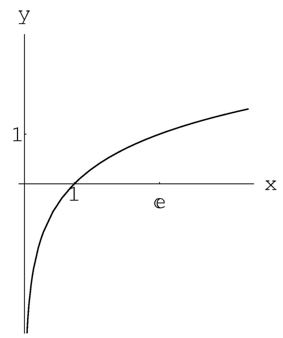
As bases do logaritmo mais usadas são o número de Neper

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828\ldots$$

e o número 10. Ao logaritmo de base e chamamos logaritmo natural ou neperiano e representamos por $\log x$ ou $\ln x$. Por sua vez, $\log_{10} x$ representa o chamado logaritmo decimal.

■ **Exemplo 1.58** Gráfico da função logarítmica de base e:

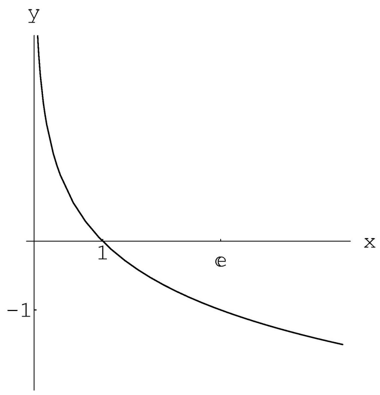
$$\begin{array}{rrcl} g: &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \ln x \end{array}$$



■

■ **Exemplo 1.59** Gráfico da função logarítmica de base e^{-1}:

$$\begin{array}{rrcl} f: &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \log_{e^{-1}} x \end{array}$$



■

Desafio 1.49 Identifique, justificando, a simetria entre os gráficos de g e f dos exemplos anteriores.

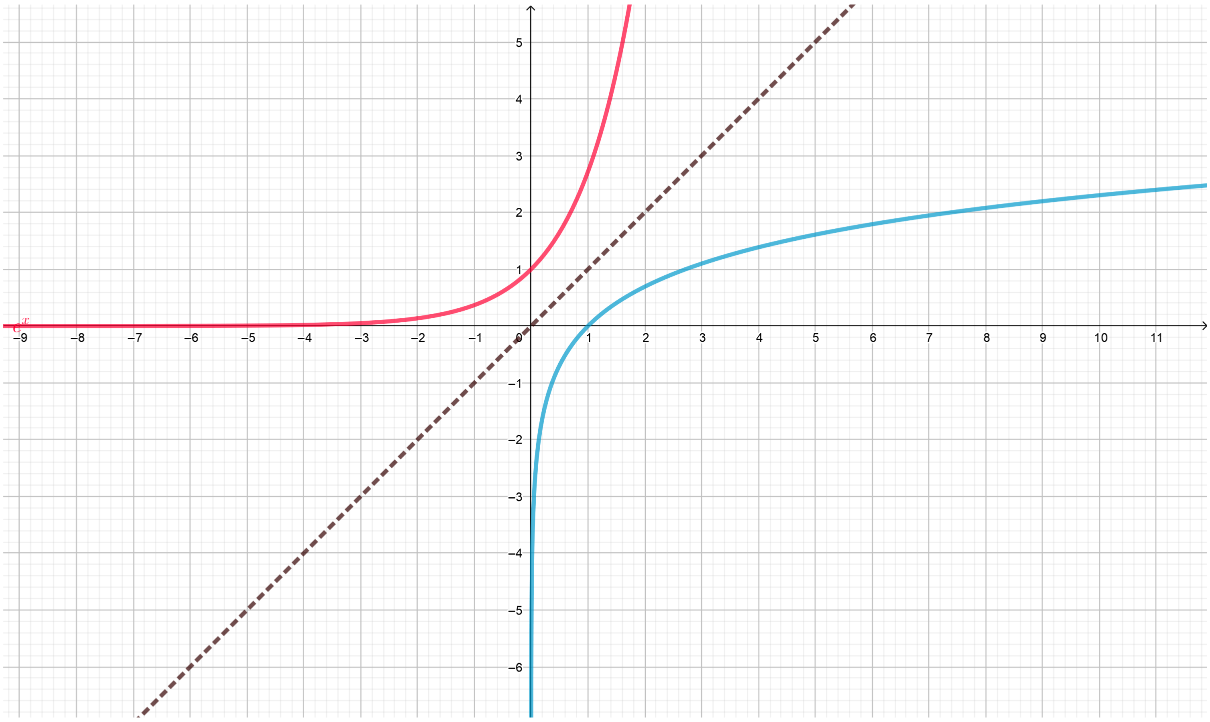


Figura 1.17: Ilustração gráfica do **Corolário 1.4.6**. O gráfico da função $x \mapsto \ln(x)$ (a azul ciano) é obtido como reflexão do gráfico da função $x \mapsto e^x$ (a magenta) relativamente à recta $y = x$ (tracejado a castanho).

Desafio 1.50 Considere a função seno hiperbólico $x \mapsto \sinh x$.
(i) Justifique que tem inversa;
(ii) Esboce o gráfico da inversa;
(iii) Representando a sua inversa por argsinh (argumento seno hiperbólico), mostre que

$$\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Desafio 1.51 — Funções logísticas em redes neurais. A função logística $f : D \to D'$ da forma

$$f(x) = \frac{1}{1+a^{-x}} \quad (a > 1)$$

é frequentemente utilizada em redes neurais como função de activação.

Para esta função:

1. Mostre que para qualquer base a, o gráfico de $x \mapsto f(x)$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $x \mapsto \tanh(x)$ por translações e dilatações.
   SUGESTÃO: Comece por verificar as seguintes igualdades:
   - $a^{-x} = e^{-x\ln(a)}$;
   - $\tanh(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$;
   - $1 + \dfrac{1-a^{-x}}{1+a^{-x}} = \dfrac{2}{1+a^{-x}}$.

2. Para $a = 2$, determine a expressão analítica da função inversa $x \mapsto f^{-1}(x)$.
3. Determine o domínio de f^{-1}. De seguida, diga justificando se f se trata de uma função limitada.

1.5.7 Função Exponencial-Potência

Atendendo a que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, para todo $x > 0$ temos

$$x = a^{\log_a x}$$

onde $a > 0$ e $a \neq 1$. Em particular, $x = e^{\ln x}$.

Definição 1.5.4 — Função Exponencial-Potência. Dadas as funções f e g de domínios D_f e D_g, respectivamente, define-se a função Exponencial-Potência h através de

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)} = e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \ln [f(x)]}.$$

O seu domínio é dado por

$$D_h = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}.$$

✓

(i) Se $f(x) = a \in \mathbb{R}$ e g não é constante, temos uma função exponencial de base a e expoente variável $g(x)$.

(ii) Se f não é constante e $g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, temos uma função potência de base variável $f(x)$ e expoente α.

Desafio 1.52 Determine o domínio de f tal que:

(**a**) $f(x) = x^x$ (**b**) $f(x) = \left(1 + \frac{2020}{x}\right)^x$

(**c**) $f(x) = (1 + 3x)^{1/x}$ (**d**) $f(x) = \ln(2 - x)^{\sqrt{x}}$

Desafio 1.53 Resolva as seguintes inequações em $\mathbb{R}$:

1. $x^{1.25} \leq 1.34$.
2. $x^{\frac{x^3 - 16x}{\ln(x)}} \leq 0$.

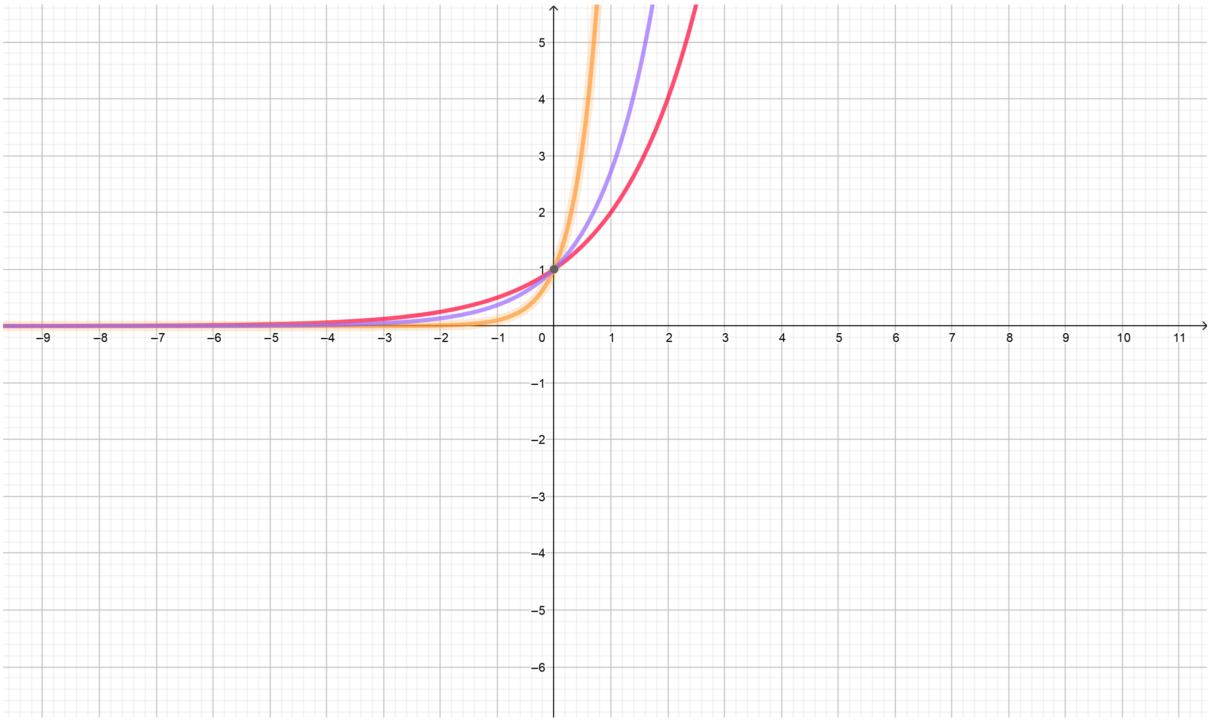
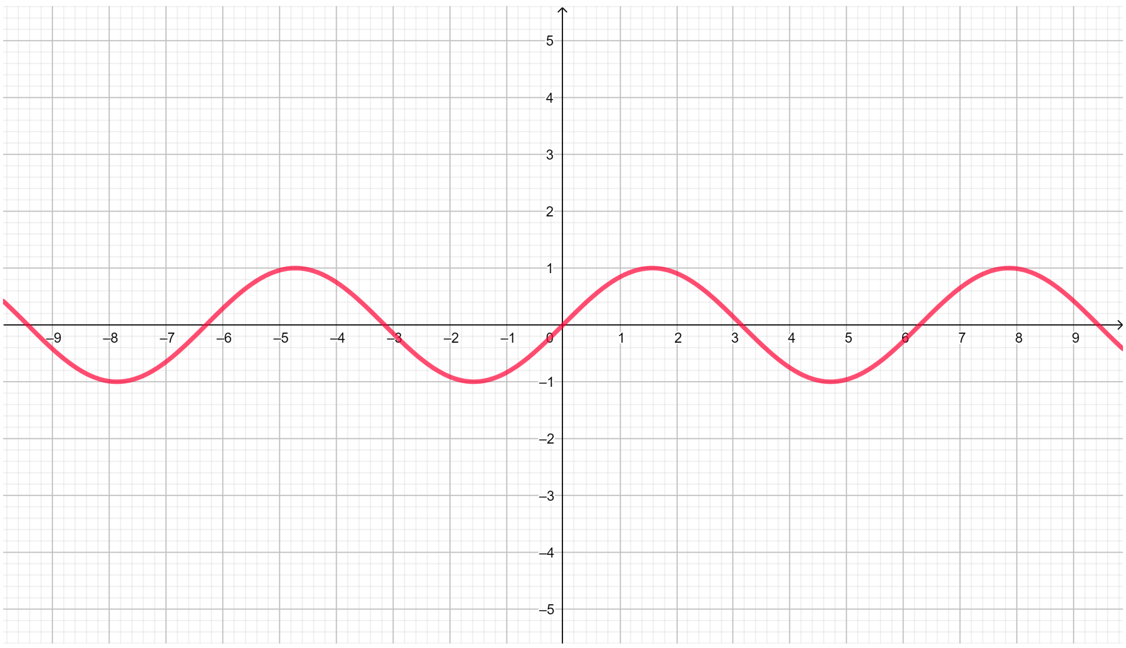


Figura 1.18: Ilustração gráfica da **Definição 1.5.4**. O gráfico da funções $x \mapsto 2^x$ (a vermelho) e $x \mapsto 10^x$ (a laranja) correspondem a homotetias do gráfico da função $x \mapsto e^x$ (a azul) associadas às constantes $c = \ln(2)$ e $c = \ln(10)$, respectivamente– vide **Definição 1.4.4**.

1.5.8 Funções Trigonométricas

Função Seno

A função seno definida por $f(x) = \sin(x)$, para todo $x \in D$, tem a seguinte representação gráfica:



Propriedades:

1. $D = \mathbb{R}$ e $D' = [-1, 1]$; Eis a tabela de alguns valores de da função seno:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

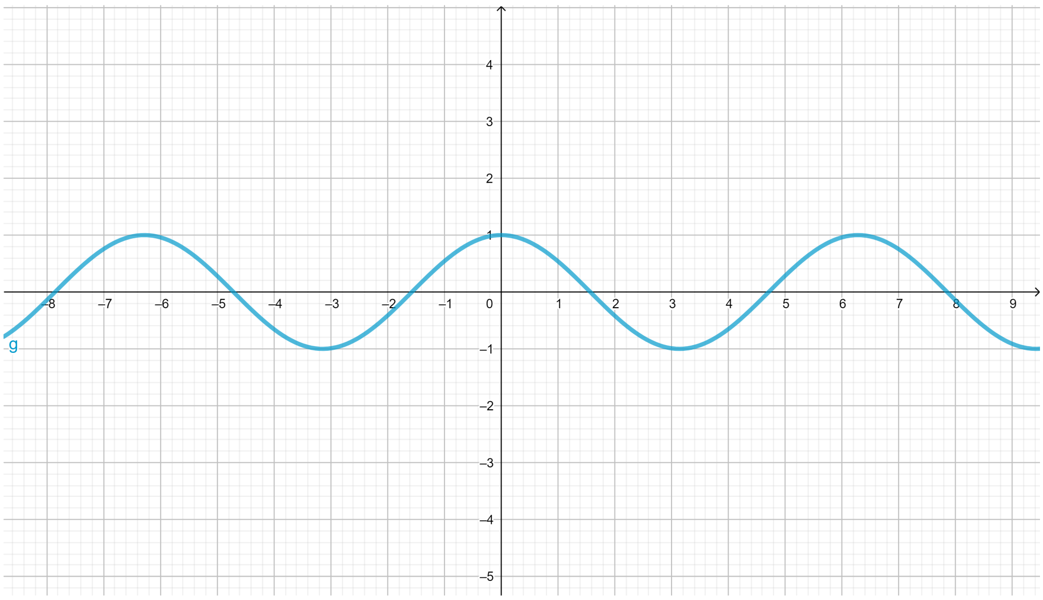
2. É periódica de período 2π e limitada;
3. É ímpar, isto é, $\sin(-x) = -\sin x,\, x \in \mathbb{R}$;
4. Eis o quadro de sinal da função seno no intervalo simétrico $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		0		π
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0

É negativa em $]-\pi, 0[$, mas positiva em $]0, \pi[$;
5. É estritamente decrescente em $[-\pi, -\pi/2]$ e em $[\pi/2, \pi]$, mas estritamente crescente em $[-\pi/2, \pi/2]$;
6. É convexa em $[-\pi, 0[$, mas côncava em $]0, \pi]$.

Função Cosseno

A função cosseno definida por $f(x) = \cos x$, para todo $x \in D$, tem a seguinte representação gráfica:



Propriedades:

1. $D = \mathbb{R}$ e $D' = [-1, 1]$; Eis a tabela de alguns valores de da função cosseno:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

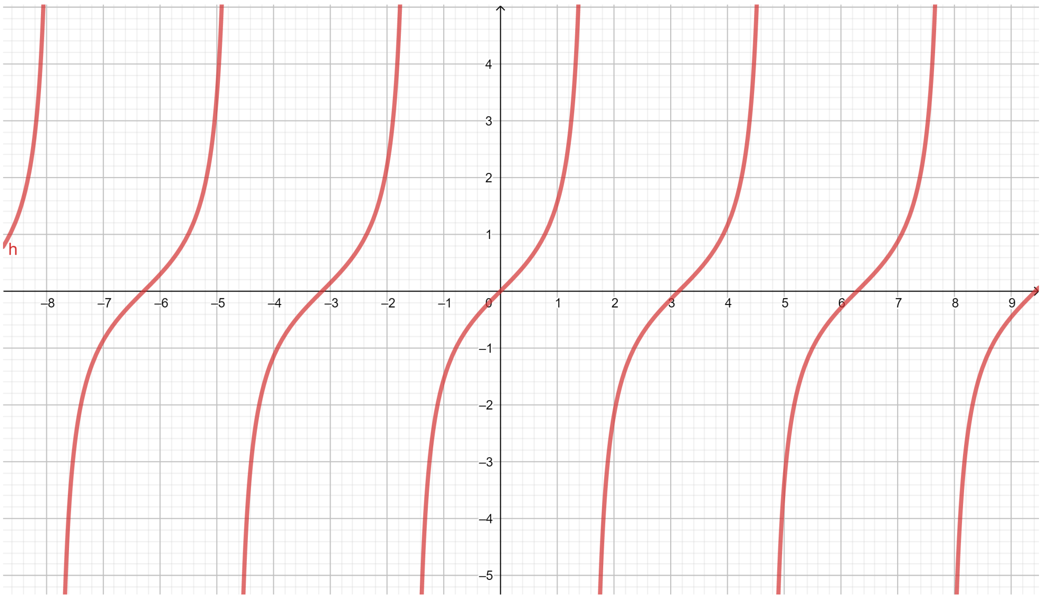
2. É periódica de período 2π e limitada;
3. É par, isto é, $\cos(-x) = \cos x,\, x \in \mathbb{R}$;
4. Eis o quadro de sinal da função cosseno no intervalo simétrico $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$\cos(x)$	-1	-	0	+	0	-	-1

É negativa em $]-\pi, 0[$, mas positiva em $]0, \pi[$;
5. É estritamente crescente em $[-\pi, 0[$, mas estritamente decrescente em $]0, \pi]$;
6. É convexa em $[-\pi, -\pi/2[$ e em $]\pi/2, \pi[$, mas côncava em $]-\pi/2, \pi/2[$.

Função Tangente

A função tangente definida por $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, para todo $x \in D$, tem a seguinte representação gráfica:



Propriedades:

1. $D = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in Z\}$ e $D' = \mathbb{R}$;
   Eis a tabela de alguns valores de da função tangente:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	n.d

2. É periódica de período π;
3. É ímpar, isto é, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, x \in D$;
4. Eis o quadro de sinal da função tangente no intervalo simétrico $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
tg	n.d	-	0	+	n.d

   É negativa em $]-\pi, 0[$, mas positiva em $]0, \pi[$;
5. É estritamente crescente em $]\pi/2, \pi/2[$;
6. É côncava em $]-\pi/2, 0[$ mas convexa em $]0, \pi/2[$.

Desafio 1.54 — Função Cotangente. A função cotangente é definida por $f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, para todo $x \in D$. Determine o domínio e estude as suas propriedades a partir da representação gráfica.

Desafio 1.55 — Função Reciproca do Seno. A função secante é definida por $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ para todo $x \in D$. Determine o domínio e estude as suas propriedades a partir da representação gráfica.

Desafio 1.56 — Função Reciproca do Cosseno. A função cossecante é definida por $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, para todo $x \in D$. Determine o domínio e estude as suas propriedades a partir da representação gráfica.

Desafio 1.57 — Revisão Trigonometria. Mostre que:

(i) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ **(ii)** $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$

(iii) $\sec x \operatorname{cosec} x = \dfrac{2}{\sin(2x)}$ **(iv)** $\dfrac{\sec x}{\operatorname{cosec} x} = \operatorname{tg} x$

1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas

Função Arco Seno

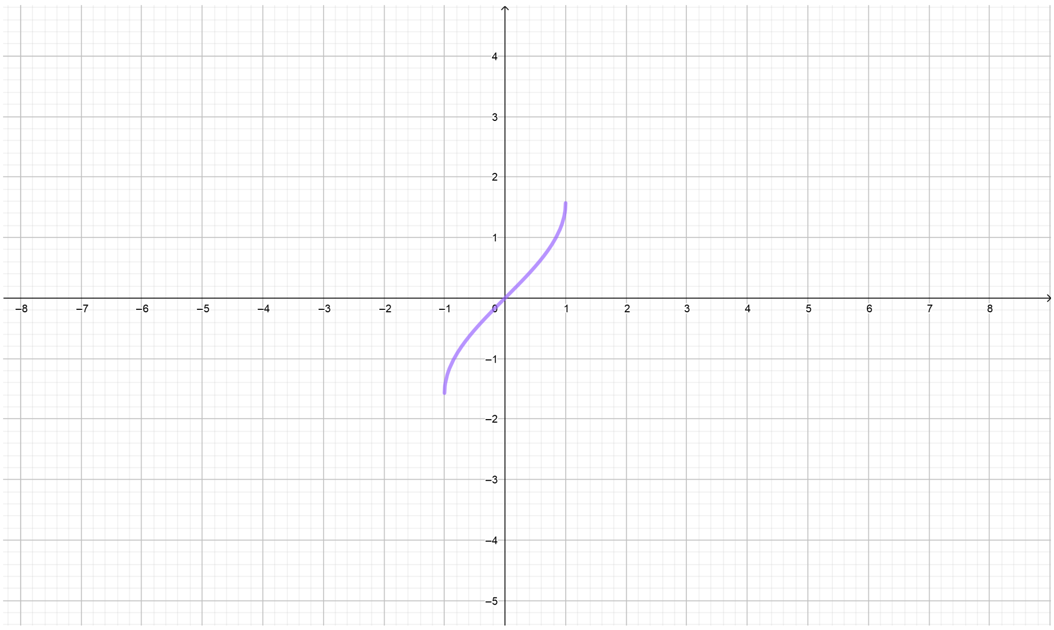
A restrição da função seno a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é injectiva. A sua inversa, designada por função arco seno, satisfaz:

$$y = \arcsin x \Longleftrightarrow x = \sin y$$

para $x \in [-1,1]$ e $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Logo, obtemos

$$\arcsin(\sin y) = y \quad ; \quad \sin(\arcsin x) = x$$

A sua representação gráfica é



Propriedades:

1. $D = [-1,1]$ e $D' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; Eis a tabela de alguns valores da função arco seno:

x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$f(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

2. É ímpar, isto é, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $x \in [-1,1]$;
3. Eis o quadro de sinal da função arco seno:

x	-1		0		1
$\arcsin(x)$	$-\pi/2$	$-$	0	$+$	$\pi/2$

   É negativa em $[-1,0[$, mas positiva em $]0,1]$;
4. É limitada pois $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1,1]$;
5. É estritamente crescente, isto é,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \arcsin x_1 < \arcsin x_2 \,,\, x_1 \in [-1,1] \wedge x_2 \in [-1,1];$$

6. É côncava em $[-1,0[$, mas convexa em $]0,1]$.

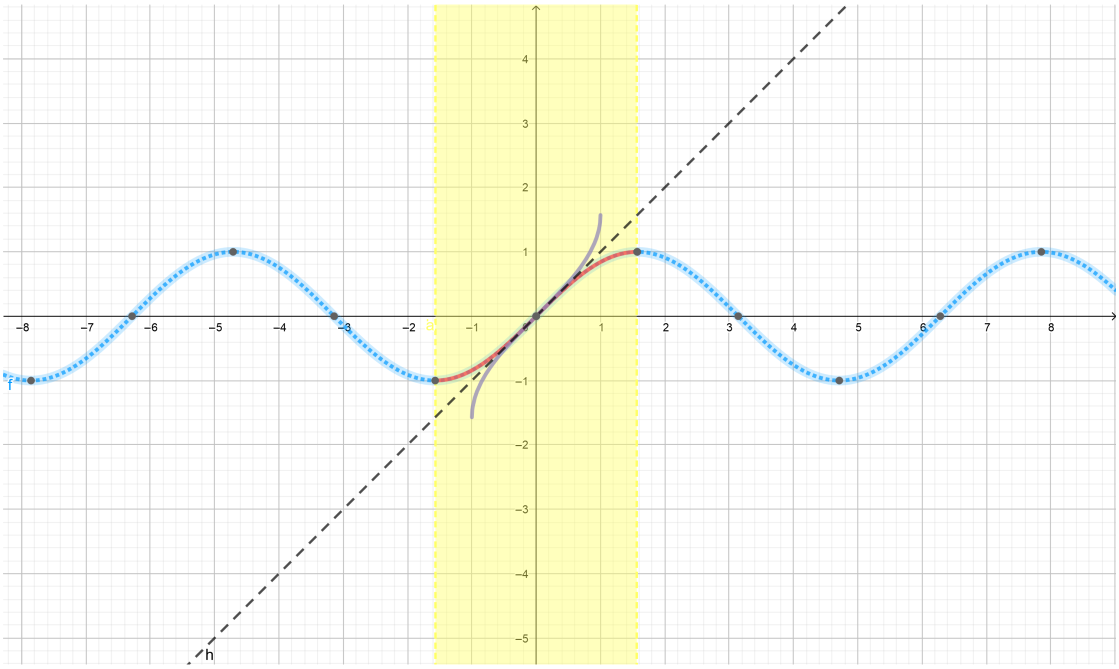


Figura 1.19: Ilustração gráfica do **Corolário 1.4.6**. Para determinarmos graficamente a **inversa da função seno** (gráfico pontilhado a azul ciano), começámos por considerar apenas o gráfico da função ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (1^o e 4^o quadrantes) de modo a assegurarmos a sua injectividade via a monotonia do gráfico – vide **Corolário 1.3.10**. Para obtermos de seguida o gráfico de $x \mapsto \arcsin(x)$ (a roxo) fizémos a reflexão do gráfico a magenta relativamente à recta $y = x$ (gráfico tracejado a preto).

Desafio 1.58 Para as constantes reais ω & ϕ tais que $\omega > 0$ & $\phi \neq 0$, considere a função f definida por

$$f(x) = \operatorname{cosec}(\omega x + \phi).$$

1. Estude a paridade da função para valores $\phi = \pi$ & $\phi = \frac{3\pi}{2}$.
2. Determine o domínio e o contradomínio.
3. Determine o período de f.
4. Determine a função inversa de f termos da função $x \mapsto \arcsin(x)$.

Função Arco Cosseno

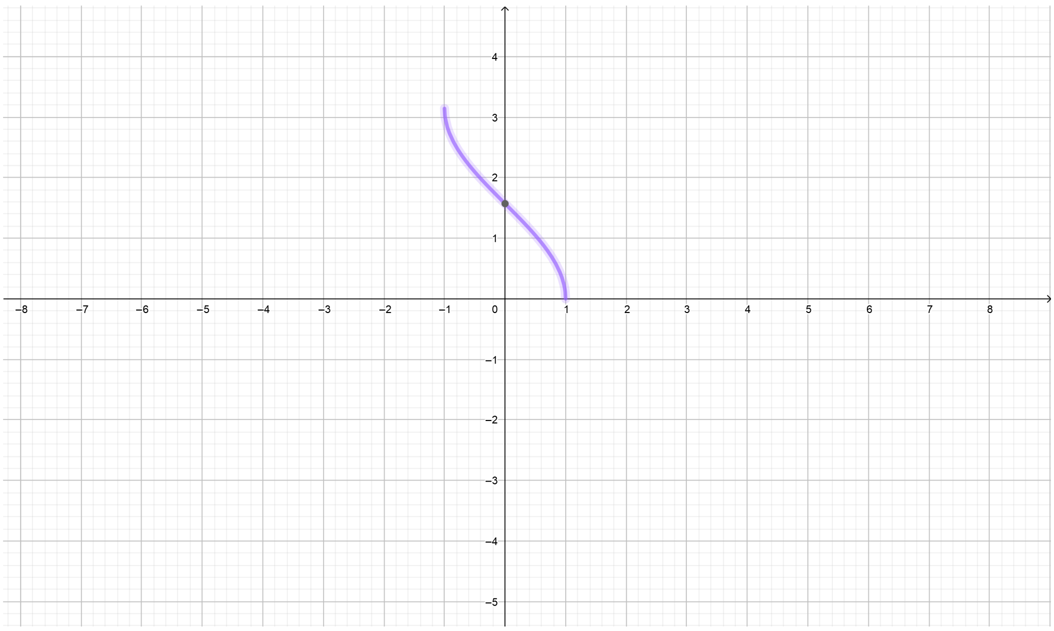
A restrição da função cosseno a $[0,\pi]$ é injectiva. A sua inversa, designada por função arco cosseno, satisfaz:

$$\arccos(\cos y) = y \quad ; \quad \cos(\arccos x) = x$$

para $x \in [-1,1]$ e $y \in [0,\pi]$. Logo, obtemos

$$\arccos(\cos y) = y \quad ; \quad \cos(\arccos x) = x$$

A sua representação gráfica é



Propriedades:

1. $D = [-1,1]$ e $D' = [0,\pi]$; Eis a tabela de para alguns valores da função arco cosseno:

x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arccos(x)$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

2. Não é ímpar nem par;
3. É não-negativa, isto é, $\arccos x \geq 0\,,\, x \in [-1,1]$
4. ; É limitada pois $0 \leq \arccos x \leq \pi\,,\, x \in [-1,1]$;
5. É estritamente decrescente, isto é,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \arccos x_1 > \arccos x_2\,,\, x_1 \in [-1,1] \wedge x_2 \in [-1,1];$$

6. É convexa em $[-1,0[$, mas côncava em $]0,1]$.

Desafio 1.59 Use a identidade trigonométrica $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$ para mostrar que

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\,,\, x \in [-1,1].$$

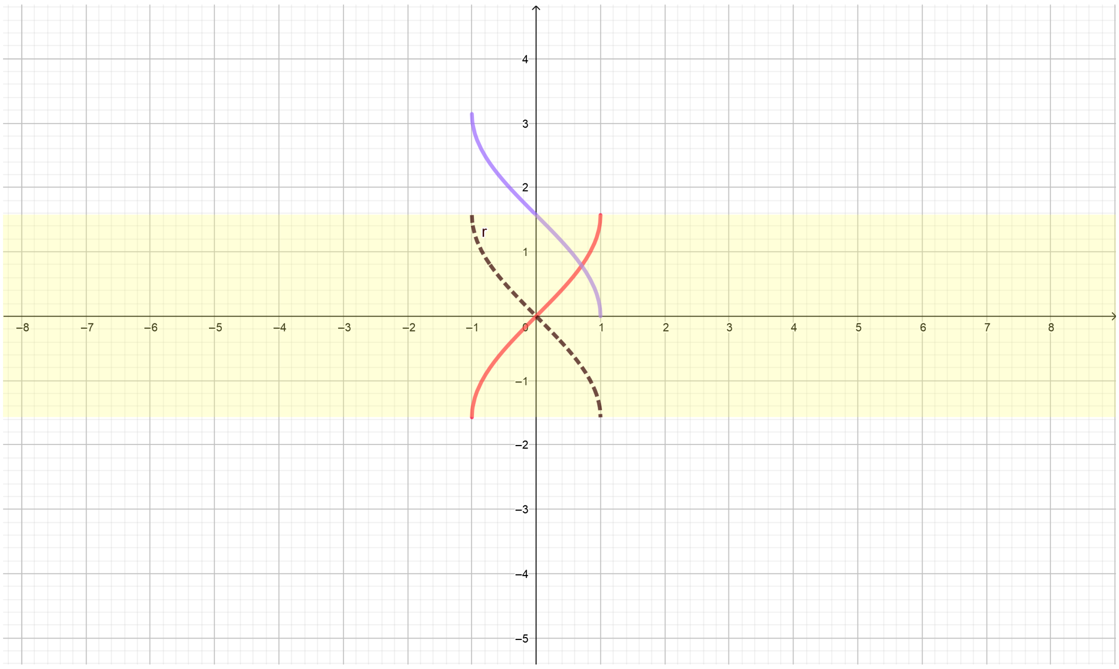


Figura 1.20: Ilustração gráfica da **Definição 1.4.4**. A identidade a demonstrar no **Desafio 1.59** permite-nos obter o gráfico da função arco cosseno (a lilás) a partir do gráfico da função arco seno (a magenta) por transformações gráficas. Na figura, o gráfico tracejado a castanho corresponde simultaneaneamente: **(i)** à reflexão do gráfico de $x \mapsto \arcsin(x)$ na vertical **(ii)** à translação do gráfico a lilás na vertical.

Desafio 1.60 Para a funções f e g definidas por

$$f(x) = \arccos(1-2x^2) \ \& \ g(x) = 2\arcsin(x)$$

1. Determine o domínio e o contradomínio de f e g.
2. Estude f e g quanto à paridade.
3. Diga, justificando, para que valores de x, as funções f e g coincidem.
   SUGESTÃO: Faça a substituição $\theta = \arcsin(x)$ nas identitdades trigonométricas
   $$\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1 \quad \& \quad \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=\cos(2\theta).$$
4. Determine a inversa da função f em termos da função $x \mapsto \arcsin(x)$, indicando o seu domínio e contradomínio.

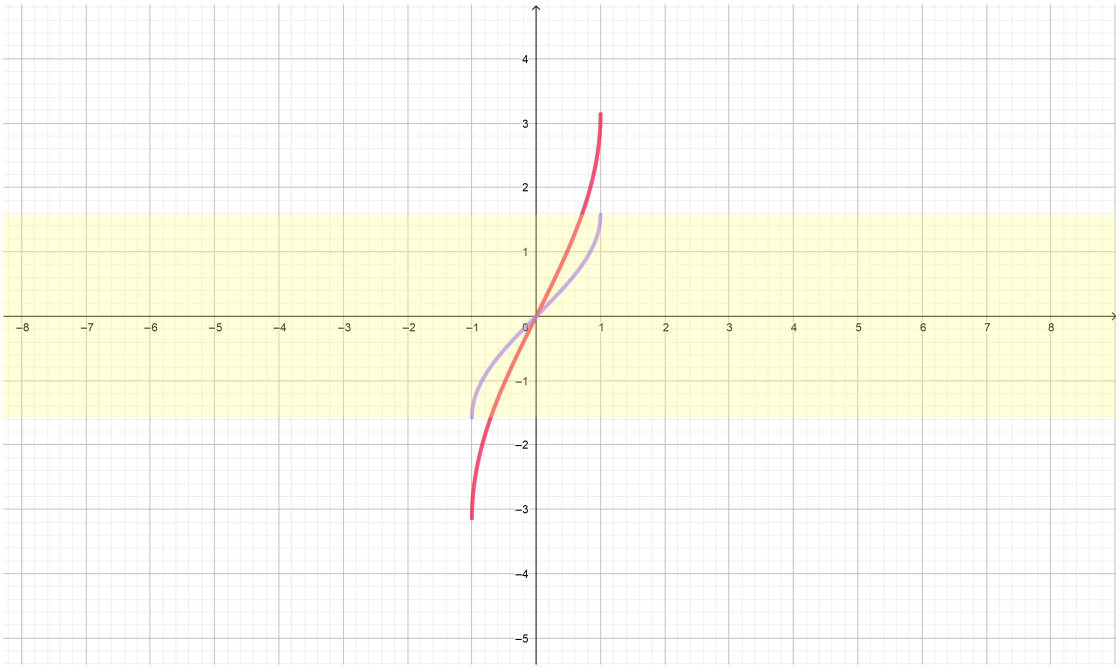


Figura 1.21: Ilustração gráfica da **Definição 1.4.4**. Na figura encontram-se representados os gráficos da função arco seno (a lilás) e o gráfico da função g do **Desafio 1.60** (a magenta). Esta última corresponde a dilatação (ou homotetia) do gráfico de $x \mapsto \arcsin(x)$ na vertical. Um bom desafio passa por verificar que o gráfico da função f é, na verdade, uma reflexão do gráfico da função g na vertical.

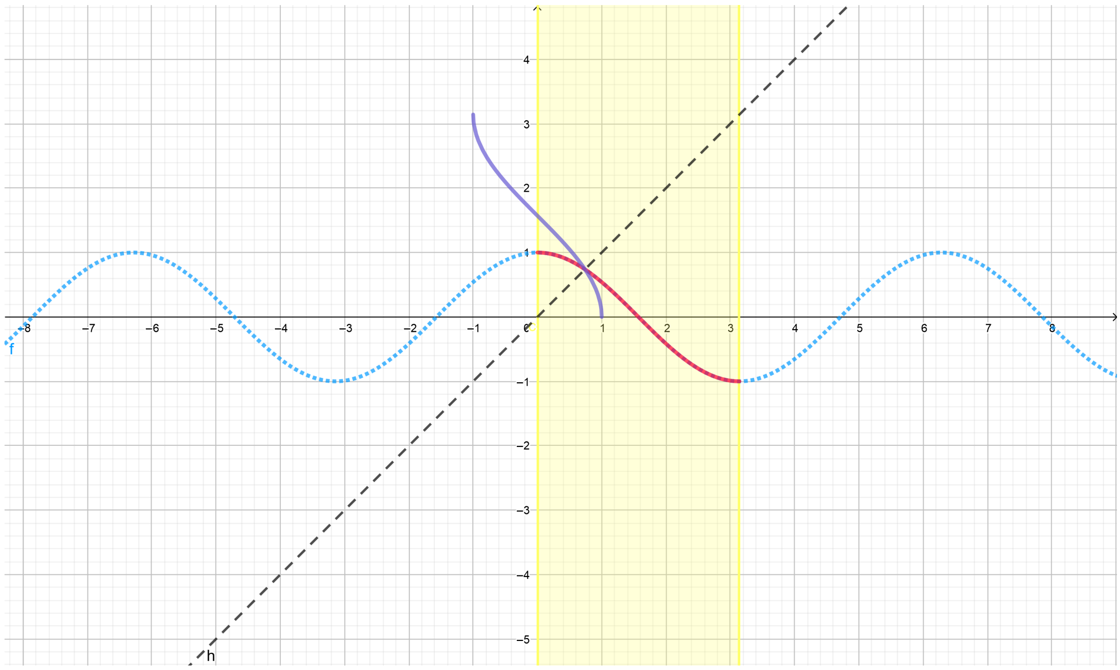


Figura 1.22: Ilustração gráfica do **Corolário 1.4.6**. Para determinarmos graficamente a **inversa da função cosseno** (gráfico pontilhado a azul ciano), começámos por considerar apenas o gráfico da função ao intervalo $[0,\pi]$ (1^o e 2^o quadrantes) de modo a assegurarmos a sua injectividade via a monotonia do gráfico – vide **Corolário 1.3.10**. Para obtermos de seguida o gráfico de $x \mapsto \arcsin(x)$ (a roxo) fizémos a reflexão do gráfico a magenta relativamente à recta $y=x$ (gráfico tracejado a preto).

Função Arco Tangente

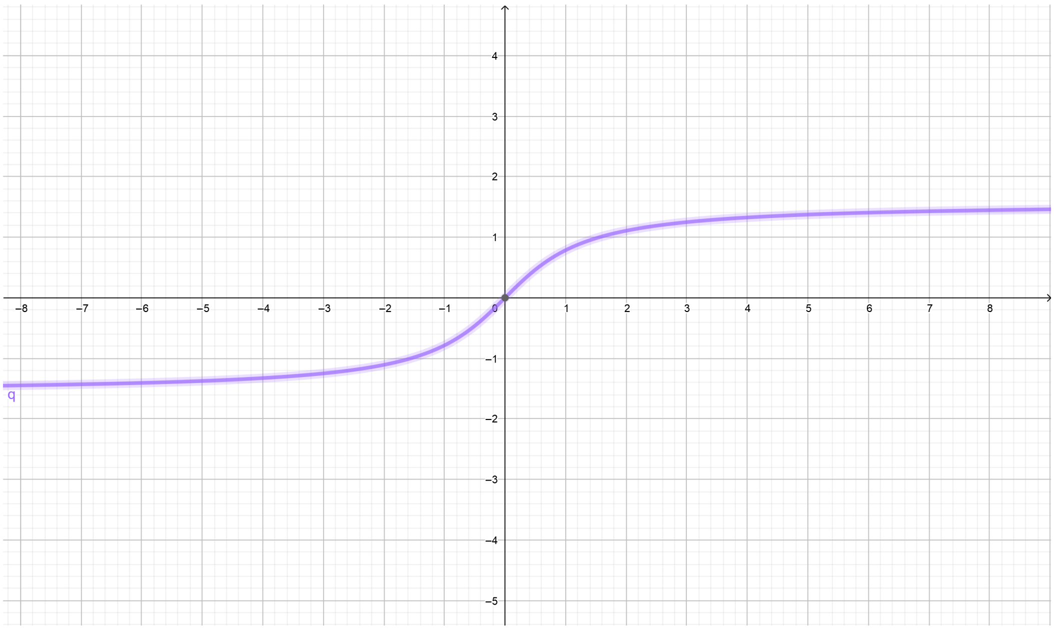
A restrição da função tangente a $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ é injectiva. A sua inversa, designada por função arco tangente, satisfaz:

$$y = \operatorname{arctg} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{tg} y$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Logo, obtemos

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad ; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

A sua representação gráfica é



Propriedades:

1. $D = \mathbb{R}$ e $D' = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; Eis a tabela de valores de alguns valores da função arco tangente:

x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$f(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

2. É ímpar, isto é, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$;
3. Eis o quadro de sinal da função arco tangente:

x		0	
$\operatorname{tg} x$	$-$	0	$+$

   É negativa em $]-\infty, 0[$, mas positiva em $]0,+\infty[$;
4. É limitada pois $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$;
5. É estritamente crescente, isto é,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2\,,\, x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R};$$

6. É convexa em $]-\infty, 0[$, mas côncava em $]0,+\infty[$.

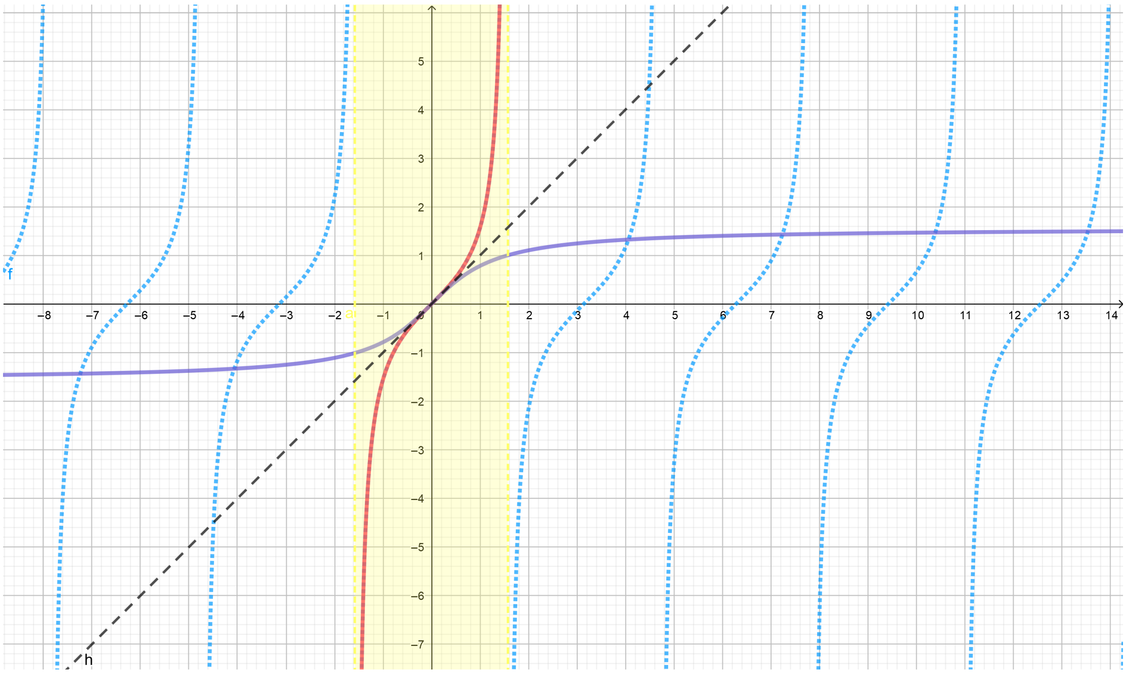


Figura 1.23: Ilustração gráfica do **Corolário 1.4.6**. Para determinarmos graficamente a **inversa da função tangente** (gráfico pontilhado a azul ciano), começámos por considerar apenas o gráfico da função ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (1^o e 4^o quadrantes com excepção dos pontos $x = \pm\frac{\pi}{2}$) de modo a assegurarmos a sua injectividade via a monotonia do gráfico – vide **Corolário 1.3.10**. Para obtermos de seguida o gráfico de $x \mapsto \arctan(x)$ (a roxo) fizémos a reflexão do gráfico a magenta relativamente à recta $y = x$ (gráfico tracejado a preto).

Desafio 1.61 — Inversa da função cotangente. Considere a identidade $\operatorname{cotg}(\theta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

(i) Esboce o gráfico da função cotangente no intervalo $]0, \pi[$ a partir do gráfico da função tangente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Identifique as transformações de gráficos envolvidas – vide **Definição 1.4.4**.

(ii) Mostre que $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)$ é a inversa da função cotangente no intervalo $]0, \pi[$.

(iii) Use a identidade anterior para determinar o gráfico da função arco cotangente (inversa da função cotangente):

- **(a)** A partir do gráfico da função cotangente no intervalo $]0, \pi[$.
- **(b)** A partir do gráfico da função arco tangente.

Desafio 1.62 — Resolução de inequações. Resolva as seguintes inequações envolvendo inversas de funções trigonométricas

1. $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4}$.
2. $\frac{\pi}{3} < \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$.
3. $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > \frac{\pi}{6}$.

Desafio 1.63 — Teste os seus conhecimentos sobre funções trigonométricas inversas. Complete a tabela abaixo:

$f(x)$	$\operatorname{arccotg}(x)$	$\operatorname{arcsec}(x)$	$\operatorname{arccosec}(x)$
DOMÍNIO		$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	
CONTRADOMÍNIO			
ZEROS			não admite zeros
PARIDADE			
INTERVALO f É POSITIVA [CONJ. SOL. DE $f(x) > 0$]			
INTERVALO f É NEGATIVA [CONJ. SOL. DE $f(x) < 0$]	$\emptyset$		
MONOTONIA	estritamente decrescente		
INTERVALO f É CÔNCAVA			
INTERVALO f É CONVEXA			

1.6 Recursos Complementares

- Bibliografia principal: Manual: SILVA, Jaime Carvalho, Princípios de Análise Matemática Aplicada, Lisboa, Editora McGraw-Hill de Portugal, 1994 [BP 517 SIL].
  Link: `http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexama.html`
- Manual interativo de apoio à unidade curricular de Matemática I da Licenciatura em Gestão da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra - ano letivo 2019/2020.
  Link: `https://www.geogebra.org/m/mhg7ckvx`
- O projeto "ReM@t: Recuperar a Matemática a Distância", coordenado pela Reitoria da Universidade de Coimbra e financiado pela Fundação Calouste Gulbenkian, tem como principal objetivo reforçar competências e conhecimentos matemáticos imprescindíveis à frequência de cursos de Ensino Superior.
  Este projeto deu origem a um curso, coordenado pelo Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva, no qual irás encontrar conteúdos em formato de texto, imagens, animações interativas e pequenos vídeos explicativos. São também propostos, ao longo de cada temática, exercícios de consolidação. O curso é gratuito e decorre em formato online! Para acederes, basta criares uma conta de utilizador e preencher o questionário de avaliação de expectativas.
  Link: `http://www.ucd.uc.pt/remat/`

1.7 Exercícios Propostos

1. Represente no plano xOy as curvas descritas pelos seguintes conjuntos de pontos:
   (a) $\{(x,y) : |x| + y - 1 = 0\}$ **(b)** $\{(x,y) : |y| + x - 1 = 0\}$
   (c) $\{(x,y) : x^2 - 4y = 0\}$ **(d)** $\{(x,y) : x - 4y^2 = 0\}$
   (e) $\{(x,y) : x^2 + x + y^2 = 0\}$ **(f)** $\{(x,y) : |x + y| - 1 = 0\}$
   (g) $\{(x,y) : x^2 - 4y^2 = 0\}$ **(h)** $\{(x,y) : xy - 1 = 0\}$
2. Das curvas traçadas no exercício anterior indique, justificando, quais correspondem a gráficos de funções.
3. Escreva a expressão analítica da função, cujo gráfico é a semi-circunferência de centro $C = (0,1)$ e de raio $\rho = 3$ situada abaixo da recta $y = 1$.
4. Esboce as parábolas, após a determinação dos vértices, que representam os gráficos das funções quadráticas definidas por:
   (a) $f(x) = x^2 - 4$ **(b)** $f(x) = x^2 - x$
   (c) $f(x) = -x^2 + 2x$ **(d)** $f(x) = 2x^2 + x$
   (e) $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ **(f)** $f(x) = -3x^2 + x - \frac{1}{12}$
5. A partir do gráfico da função f definida por $f(x) = \ln x$ represente graficamente as funções definidas por:
   (a) $g(x) = -f(x)$ **(b)** $h(x) = f(-x)$
   (c) $j(x) = |f(x)|$ **(d)** $l(x) = f(|x|)$
   (e) $m(x) = f(x) + 3$ **(f)** $n(x) = f(x + 3)$
6. Considere as funções definidas por
   $$f(x) = 1 + \sqrt{x+4}\,,\ g(x) = 3 - \sqrt{x}.$$
   (a) Indique os domínios de f e de g.

(b) Determine os contradomínios de f e de g. Diga, justificando, se a função g é limitada.
(c) Diga, justificando, se a função f é injectiva.
(d) Trace os gráficos de f e de g tendo por base o gráfico de h definida por $h(x) = \sqrt{x}$.
(e) Resolva a equação $f(x) = g(x)$.

7. Considere a função f definida por $f(x) = \sqrt{2-x}$.
(a) Esboce o gráfico de f.
(b) Determine o domínio e a expressão analítica da função simétrica de f.
(c) Reunindo os gráficos de f e da respectiva função simétrica obtemos uma parábola. Escreva a equação dessa curva.

8. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
(a) Indique o domínio de f e estude o sinal de f.
(b) Mostre que:
$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}\,.$$
(c) O que pode dizer quanto à injectividade de f?
(d) Esboce o gráfico de f a partir do gráfico de g definida por $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

9. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:
(**a**) $x^2 - x = 0$ (**b**) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
(**c**) $x^4 - x^2 - 2 = 0$ (**d**) $\mid x+4 \mid = 3$
(**e**) $\mid x+4 \mid = \mid 4-x \mid$ (**f**) $\cos x + \sin(2x) = 0$
(**g**) $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$ (**h**) $\ln(x+1) - \ln(x-1) = 2\ln 2$

10. Resolva as seguintes inequações, em $\mathbb{R}$:
(**a**) $\mid -x+2 \mid \geq 3$ (**b**) $\mid x^2 - 3 \mid \leq 1$
(**c**) $x^3 < 8$ (**d**) $\mid \sin x \mid > 0$
(**e**) $1 - \sqrt{x+1} > -1$ (**f**) $\frac{x+1}{x} \geq 2$
(**g**) $\mid e^x - 2 \mid > 2$ (**h**) $\ln(-x) + \ln(x^2) > 3$

11. Explicite a expressão analítica da função módulo das funções definidas por:
(**a**) $f(x) = ax + 2,\, a < 0$ (**b**) $f(x) = (ax)^2 - 9,\, a > 0$
(**c**) $f(x) = x^3 - 1$ (**d**) $f(x) = \sin x$
(**e**) $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ (**f**) $f(x) = \frac{x+1}{x}$
(**g**) $f(x) = \ln x$ (**h**) $2 - e^{-x}$

12. Defina as funções $g \circ f$ e $f \circ g$, explicitando os seus domínios e as suas expressões analíticas, sendo
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad g(x) = \sin x\,.$$
A composição de funções goza da propriedade comutativa, isto é, $g \circ f = f \circ g$?

13. Indique duas funções g e h, tais que $g \circ h = f_1$ e $h \circ g = f_2$, sendo
$$f_1(x) = \mathrm{tg}^2\, x \quad , \quad f_2(x) = \mathrm{tg}\,(x^2)\,.$$

14. Determine o domínio e a expressão analítica de $g \circ f$, sendo
(**a**) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ (**b**) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $g(x) = \sqrt{1+x^2}$
(**c**) $f(x) = \sec x$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ (**d**) $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \cos x$

15. Indique o domínio das seguintes funções e, caso seja possível, determine analiticamente as respectivas funções inversas:
    (**a**) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ (**b**) $f(x) = \sqrt{x}+2$
    (**c**) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ (**d**) $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$
    (**e**) $f(x) = 1 + \dfrac{e^{-2x}}{3}$ (**f**) $f(x) = 4\ln x + 1$
    (**g**) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ (**h**) $f(x) = \sinh x$
16. Considere a restrição da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. A sua função inversa tem como expressão analítica $f(x) = \arcsin x$.
    (a) Indique o domínio e o contradomínio de f.
    (b) Justifique que f é injectiva.
    (c) Calcule
    $$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(\cos\pi).$$
    (d) Mostre que f é uma função ímpar.
    (e) Estude o sinal de f recorrendo ao seu gráfico.
17. Seja $g(x) = \arccos x$ a expressão analítica da função inversa da restrição do co-seno ao intervalo $[0,\pi]$.
    (a) Indique o domínio e o contradomínio de g.
    (b) Calcule
    $$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), g\left(-\frac{1}{2}\right), g(\cos 0).$$
    (c) Determine os pontos de intersecção do gráfico de g com os eixos coordenados.
    (d) Esboce o gráfico de g.
    (e) A partir do gráfico de g esboce o gráfico da função definida por $f(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$.
18. A função arco-tangente definida por $h(x) = \operatorname{arctg} x$ representa a função inversa da restrição da tangente ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
    (a) Indique o domínio e o contradomínio de h.
    (b) Calcule
    $$h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), h(-1), h(\sin 0).$$
    (c) Mostre que h é uma função ímpar.
    (d) Estude o sinal de h recorrendo ao seu gráfico.
    (e) Esboce os gráficos das funções definidas por $p(x) = \mid h(x) \mid$ e $q(x) = h(\mid x \mid)$.
    (f) Verifique que $p(x) = q(x)$.

2. Limites e Continuidade

2.1 Limites

2.1.1 Definições e Exemplos

Definição 2.1.1 — Limite de f no ponto a. Seja f uma função definida num intervalo I do tipo $I =]c,a[\cup]a,b[$ em que $I \subset D$. Diz-se que f tem por limite $L \in \mathbb{R}$, quando x tende para $a \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo o $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < | x - a | < \delta \Longrightarrow | f(x) - L | < \varepsilon.$$

Note-se que $| x - a |$ representa a distância entre x e a no eixo Ox.
Por um lado, a desigualdade $|x - a| < \delta$ – equivalente a termos $a - \delta < x < a + \delta$ – diz-nos que $x \in]a - \delta, a + \delta[$.
Por outro lado, a desigualdade $|x - a| > 0$ – equivalente a termos $x \neq a$ – diz-nos que $f(x)$ nunca pode tomar o valor $f(a)$ quando estamos a calcular $\lim_{x \to a} f(x)$.

Segue naturalmente da definição de limite e das propriedades dos módulos as seguintes equivalências

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0 \quad \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x) - L| = 0.$$

A definição formal de limite apresentada também se designa por definição *epsilon-delta* (ε-δ) visto que essas letras gregas têm sido usadas com frequência a partir do momento que se conheceram os trabalhos de Cauchy sobre o assunto.
Suponhamos que a função tem como gráfico uma curva, no sentido vulgar do termo. Geometricamente, diz-se que o limite da função quando x tende para a é igual a L se e só se, para cada intervalo

$]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ traçado no eixo Oy, pode-se encontrar algum intervalo $]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$ no eixo Ox, de modo que todos os transformados de pontos desse intervalo, por meio de f, pertençãm a $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. Refira-se ainda que, se assume, que o intervalo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ traçado no eixo Oy pode ser tão pequeno quanto se deseje.

■ **Exemplo 2.1 — Limites envolvendo a função afim.** Recorrendo à definição de limite, iremos mostrar que

$$\lim_{x\to 2}(2x+1)=5.$$

Considere o número $\varepsilon>0$ e arbitrário. Como

$$|\,(2x+1)-5\,|=2\,|\,x-2\,|$$

basta escolher $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ para que

$$0<|\,x-2\,|<\delta \Longrightarrow |\,(2x+1)-5\,|<2\delta=\varepsilon$$

conforme se queria mostrar. ■

Definição 2.1.2 — Noção Informal de Limite. O limite de f quando x tende para a é igual a L: Informalmente

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

significa que os valores que a função toma em x se podem aproximar de L tanto quanto se queira desde que x esteja suficientemente próximo de a, mas podendo ser eventualmente diferente de a. Assinale-se que o real L não depende de $f(a)$.

■ **Exemplo 2.2 — Limites envolvendo funções racionais.** A fracção racional $f:D\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{9-x^2}{x-3}$ não está definida para $x=3$ ($D_f=\mathbb{R}-\{3\}$), mas

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(3+x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(-3-x)=-6$$

Observe que a função g tal que $g(x)=-x-3$ difere de f apenas no ponto $x=3$ pois

$$f(x)=g(x)\,,\, x\neq 3$$

Contudo o valor de $\lim_{x\to 3} f(x)$ coincide com o valor de $\lim_{x\to 3}(-x-3)$. ■

Desafio 2.1 Verifique que para as funções f e g do **Exemplo 1.36** se tem

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1} g(x)=0,$$

embora $f\neq g$.

Limites no infinito e infinitos

Vamos generalizar a definição *epsilon-delta* aos limites no infinito e aos limites infinitos.

Definição 2.1.3 — Limites no infinito. Seja f uma função definida no intervalo aberto $I=]c,+\infty[$. Diz-se que f tem por limite o número real L, quando x tende para $+\infty$, escrevendo-se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

se para todo $\varepsilon>0$ existe um um número $N>0$ tal que, para todo $x\in I$

$$\text{se } x>N \text{ então } |\,f(x)-L\,|<\varepsilon \tag{2.1}$$

O símbolo $+\infty$ não representa um número real, sendo usado para indicar que x cresce ilimitadamente para além de qualquer número.

Poderia-se definir também o limite de $f(x)$ quando x tende para $-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

de modo análogo, caso f esteja definida num intervalo do tipo $]-\infty, b[$.

Definição 2.1.4 — Limites infinitos. Seja f uma função definida num intervalo aberto, contendo o ponto a, o qual pode não pertencer ao seu domínio D. Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é mais infinito, escrevendo-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

se para todo $M > 0$ arbitrariamente grande, existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$

$$\text{se } x \text{ verifica } 0 < |\, x - a \,| < \delta \text{ então } f(x) > M \tag{2.2}$$

Poderia-se definir também o limite de $f(x)$, caso seja igual a $-\infty$, quando x tende para a

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

de modo análogo.

2.1.2 Existência e Unicidade de Limite

No conjunto dos números reais, x tende para a, quer por valores superiores a a, quer por valores inferiores a a, e por isso, faz sentido falar no conceito de limite lateral.

Notação 2.1 — Limites Laterais. O limite lateral de f à direita de a e o limite lateral de f à esquerda de a escrevem-se respectivamente como

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a^+} f(x) &:= \lim_{x\to a \,\wedge\, x>a} f(x) \\ \lim_{x\to a^-} f(x) &:= \lim_{x\to a \,\wedge\, x<a} f(x). \end{aligned}$$

Teorema 2.1.1 — Existência de Limite.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Ideia da demonstração. Esta demonstração decorre naturalmente da definição de limite no ponto e de limites laterais. Para tal, comece por observar que a dupla desigualdade $0 < |x-a| < \delta$ que aparece na **Definição 2.1.1** pode ser decomposta no seguinte sistema de inequações:

$$0 < x - a < \delta \quad \wedge \quad -\delta < x - a < 0,$$

que por sua vez é equivalente a termos

$$\underbrace{a < x < a + \delta}_{\text{ineq. utilizada para definir } x\to a^+} \qquad \wedge \qquad \underbrace{a - \delta < x < a}_{\text{ineq. utilizada para definir } x\to a^-} \,.$$

■

Teorema 2.1.2 — Unicidade de Limite. O limite $\lim_{x\to a} f(x) = L$, caso exista, é único.

Ideia da demonstração. Suponhamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} f(x) = M$$

Para mostrarmos que o limite é único, isto é, que $L = M$ vamos recorrer à **desigualdade triangular** já utilizada no **Exemplo 1.30**.

Para tal, note que

$$|M-L| = |(f(x)-L)+(M-f(x))| \le |f(x)-L| + \underbrace{|M-f(x)|}_{=|f(x)-M|}.$$

Da hipótese – L e M são os valores de $\lim_{x\to a} f(x)$ – segue que

$$\lim_{x\to a} |f(x)-L| = \lim_{x\to a} |f(x)-M| = 0.$$

Finalmente, aplicando limites a ambos os lados das desigualdades acima, resulta que

$$\begin{aligned} |L-M| &= \lim_{x\to a} |L-M| \\ &\le \lim_{x\to a} |f(x)-L| + \lim_{x\to a} |f(x)-M| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $|L-M| \le 0$. Esta desigualdade permite-nos concluir, de imediato, que

$$L = M,$$

como pretendido. ■

Na demonstração do **Teorema 2.1.2** evitámos fazer o uso da nomenclatura $\varepsilon - \delta$ – omnipresente em diversos livros de matemática – para que a compreensão da [ideia da] demonstração do resultado ficasse mais legível para não matemáticos.

Vejamos alguns exemplos de não-existência de limite para uma dada função.

■ **Exemplo 2.3 — Limites laterais diferentes.** Para a função sinal do **Exemplo 1.12** é facil de verificar que **o limite** $\lim_{x\to 0} \mathbf{sgn}(x)$ **não existe**, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \mathrm{sgn}(x) &= \lim_{x\to 0^+} 1 = 1, \\ \lim_{x\to 0^-} \mathrm{sgn}(x) &= \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.4 — Limites laterais infinitos.** Para a função do **Exemplo 1.14** o limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ não existe visto que

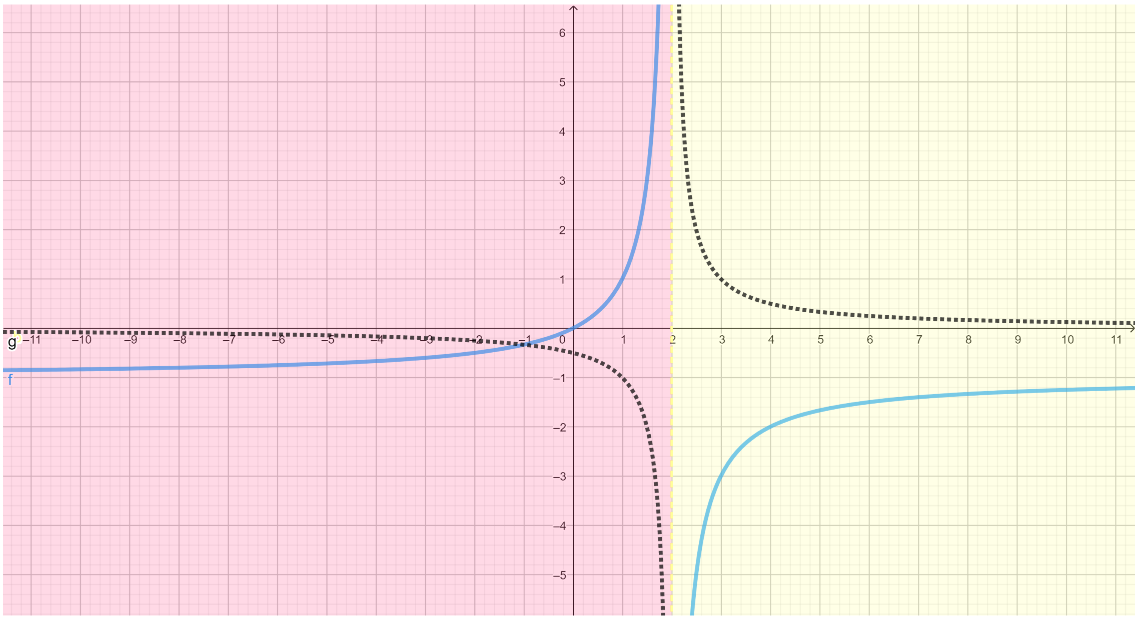
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Note-se que a função cresce ou decresce indefinidamente, quando x tende para 0. Os valores $f(x)$ divergem quando x estiver suficientemente próximo de zero. Ou seja, à medida que x se aproxima de zero, os valores $f(x)$ crescem indefinidamente se $x > 0$, mas decrescem indefinidamente se $x < 0$. ■

■ **Exemplo 2.5 — Limites vs. transformações gráficas.** Decorre da divisão de polinómios:

$$\frac{x}{2-x} = -1 - \frac{2}{x-2}$$

que o gráfico da função $x \mapsto \frac{x}{2-x}$ do **Exemplo 1.16** – representado na figura abaixo a azul ciano – pode ser obtido a partir do gráfico $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ – representado na figura abaixo a pontilhado preto – por reflexões e translações na vertical – vide **Definição 1.4.4**:



Note ainda que o gráfico de $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ corresponde a uma translação na horizontal do gráfico da função do **Exemplo 2.4**.

A interpretação gráfica permite-nos naturalmente verificar que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = +\infty,$$

uma vez que o gráfico da função $x \mapsto \frac{x}{2-x}$ toma **valores suficientemente grandes positivos**, à medida que nos aproximamos da recta vertical $x = 2$ por valores à esquerda (região a rosa do gráfico).

De modo análogo

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = -\infty$$

atendendo ao facto do gráfico de $x \mapsto \frac{x}{2-x}$ tomar **valores suficientemente grandes negativos**, à medida que nos aproximamos da recta vertical $x = 2$ por valores à direita (região a amarelo do gráfico). ■

Desafio 2.2 Para a função f definida por $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{|x+1|}$:

1. Calcule o domínio de f.
2. Determine, caso existam, os limites abaixo:
$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} |f(x)|.$$

O próximo resultado permite-nos obter uma correspondência biunívoca entre limites no infinito e limites laterais à esquerda e à direita de 0, tendo como referência a transformação do gráfico de f pela função $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ do **Exemplo 2.4**

Teorema 2.1.3 — Limites no Infinito vs. Limites Laterais. Para uma função definida num intervalo do tipo $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$, valem as seguintes regras para cálculo de limites:

- **Limites em $+\infty$ vs. Limites em 0^+:**
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$
- **Limites em $-\infty$ vs. Limites em 0^-:**
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Saliente-se que os valores $f(x)$ da função f também podem divergir, mas por oscilação, quando x estiver suficientemente próximo de um ponto a. Este comportamento, embora seja raro, surge associado a funções, cujo o limite não existe, quando x tende para a.

■ **Exemplo 2.6 — Não-Existência de Limite.** O limite $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Note que a função f tal que $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ é limitada, isto é,
$$-1\leq f(x)\leq 1,\quad \text{para todos os}\quad x\neq 0.$$
Além disso, tem uma infinidade de zeros, pertencentes ao intervalo $[-1/\pi,1/\pi]$. Porém, a função oscila entre -1 e 1 à medida que x se aproxima de 0, logo $f(x)$ não se aproxima de nenhum número real. A função diverge por oscilação num ponto.

Para sermos mais precisos, considere os pontos da forma $x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ para inteiros $k>0$:
$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$
Em particular, para a escolha $k=2m\to+\infty$, obtemos[1]
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2m\pi\right)=1\to 1$$
De modo análogo, se considerarmos $k=2m-1\to+\infty$, obtemos
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+(2m-1)\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2m\pi\right)=-1\to-1.$$
Os dois limites obtidos acima para valores de $k\to+\infty$ par (resp. ímpar) permitem-nos averiguar, de uma forma intuitiva, que o limite não existe. ■

✓ Essencialmente, a estratégia adoptada no **Exemplo 2.6** passou por mostrar que o limite lateral $\lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Acrescente-se que a escolha dos pontos da forma $x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ ($k>0$ e $k\in\mathbb{Z}$) teve como referência a identidade $\lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sin(x)$ obtida a partir do **Teorema 2.1.3**.

[1] Para provarmos que os limites davam 1 ou -1, fizémos uso das igualdades $\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm 1$ e do facto de seno ser uma função periódica, de período 2π.

O próximo teorema corresponde a uma generalização do raciocínio utilizado no **Exemplo 2.6**.

Teorema 2.1.4 — Limites no infinito envolvendo funções periódicas. Se f é uma função periódica, não-constante, então os limites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

não existem.

2.1.3 Assímptotas

Podemos generalizar a noção de limite, para o caso da variável independente tender para infinito, bem como, para o caso do valor do limite ser infinito. Este tipo de limites dão informações sobre a existência de assímptotas ao gráfico de uma dada função. Caso existam, as assímptotas são rectas verticais, horizontais ou oblíquas.

Ao longo desta subseção iremos recorrer, em várias situações, ao teorema abaixo.

Teorema 2.1.5 Considere-se o real a compreendido entre b e c com $b < c$. Seja f definida num intervalo do tipo: $]b,c[$ ou $]a,c[$ ou $]b,a[$. Tem-se

(i)

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0^+$$

(ii)

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0^-$$

✓ O teorema ainda é válido se substituirmos a por $+\infty$ ou por $-\infty$.

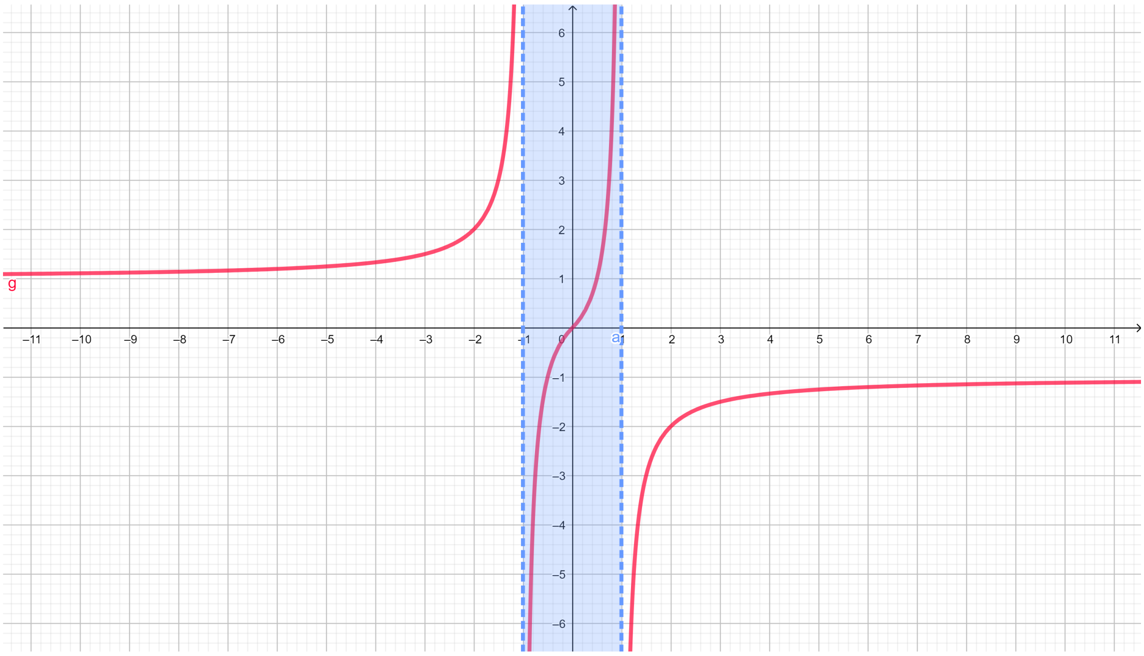
Definição 2.1.5 — Assímptotas Verticais. A recta $x = a$ é assímptota vertical ao gráfico de f se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty(-\infty) \quad \vee \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty(+\infty)$$

Note-se que a função cresce ou decresce indefinidamente, quando x tende para a, e por esse motivo, diz-se que a função diverge para valores próximos de a.

✓ As funções $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ e $x \mapsto \dfrac{x}{2-x}$ ilustradas graficamente no **Exemplo 2.5** apresentam $x = 2$ como assímptota vertical.

■ **Exemplo 2.7** Voltemos à função g do **Desafio 1.33**, cujo gráfico segue abaixo:



Como pode verificar facilmente pelo gráfico, $x = -1$ e $x = 1$ são assímptotas verticais ao gráfico de g.

Este facto pode ser comprovado analiticamente com base nos calculos de limites realizado abaixo:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-|x|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-|x|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1-|x|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1+x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-|x|} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1+x} = +\infty$$

Observe ainda que no caso de restringirmos a função g ao intervalo $]-1,1[$ (parte do gráfico delimitado pela região a azul), obtemos que esta coincide com a inversa $f^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ da função f do **Exemplo 1.44**.

Para este caso em particular, podemos ainda concluir o seguinte:

- $x = -1$ e $x = 1$ são também assímptotas horizontais ao gráfico do f^{-1}, uma vez que
$$\lim_{x\to 1^-} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$$
- Os limites laterais
$$\lim_{x\to 1^+} f^{-1}(x) \quad \& \quad \lim_{x\to -1^-} f^{-1}(x)$$
não existem.

■

Desafio 2.3 Verifique se as assímptotas verticais das funções f e g do **Exemplo 1.36** coincidem.

Definição 2.1.6 — Assímptotas Não-Verticais. A recta $y = mx + b$ é assímptota ao gráfico de f se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = b$$

ou se

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = b$$

Observe-se que: Se $m \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ então temos uma assímptota oblíqua. Mas se $m = 0$ e $b \in \mathbb{R}$, trata-se de uma assímptota horizontal de equação $y = b$.

A assímptota $y = mx + b$ é uma recta que se aproxima do gráfico de f quando a variável x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. O sinal de $f(x) - mx - b$ determina o modo como se faz essa aproximação, isto é, se $f(x) - mx - b < 0$ a recta está situada acima do gráfico, mas se $f(x) - mx - b > 0$ a recta já está situada abaixo do gráfico. Contudo, esclareça-se que nem sempre isso acontece, pois o sinal de $f(x) - mx - b$ pode alternar para valores de x suficientemente grandes, em valor absoluto.

Assímptotas de funções racionais

Para estudarmos a existência de assímptotas verticais, tais como as do **Exemplo 2.5** e do **Exemplo 2.7**, os seguintes limites são de importância fulcral:

Teorema 2.1.6 — Limites no infinito envolvendo funções racionais. Consideremos os polinómios da forma

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0) \\ q_m(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0) \end{aligned}$$

As seguintes regras envolvendo limites são válidas:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}(+\infty) & \text{se} \quad n > m \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{se} \quad n = m \\ 0 & \text{se} \quad n < m \end{cases} \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}(-1)^{n-m}(+\infty) & \text{se} \quad n > m \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{se} \quad n = m \\ 0 & \text{se} \quad n < m \end{cases} \end{aligned}$$

Ideia de demonstração. Note que $p_n(x)$ e $q_m(x)$ podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + p_j(x) \\ q_m(x) &= b_m x^m + q_k(x), \end{aligned}$$

onde $p_j(x)$ e $q_k(x)$ são polinómios de graus $j \leq n-1$ e $k \leq m-1$ respectivamente.

Colocando em evidência x^n no numerador e x^m no denominador, segue para valores de $x \neq 0$

que

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{x^n(a_n + x^{-n}p_j(x))}{x^m(a_m + x^{-m}q_k(x))}$$

Combinando a igualdade anterior com o **Teorema 2.1.3**, segue a sequência de igualdades

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{p_n\left(\frac{1}{x}\right)}{q_m\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-n}(a_n + x^n p_j\left(\frac{1}{x}\right))}{x^{-m}(b_m + x^m q_k\left(\frac{1}{x}\right))} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{a_n x^{-n}}{b_m x^{-m}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}.
\end{aligned}$$

Deixamos ao cargo do leitor realizar o mesmo tipo de simplificação, envolvendo os limites $x \to -\infty$ & $x \to 0^-$. ■

O **Teorema 2.1.6** diz-nos essencialmente que são os termos de maior grau dos polinómios em numerador e denominador que são utilizados para calcular o limite.

O termo $(-1)^{n-m}(+\infty)$ que aparece no cálculo do limite

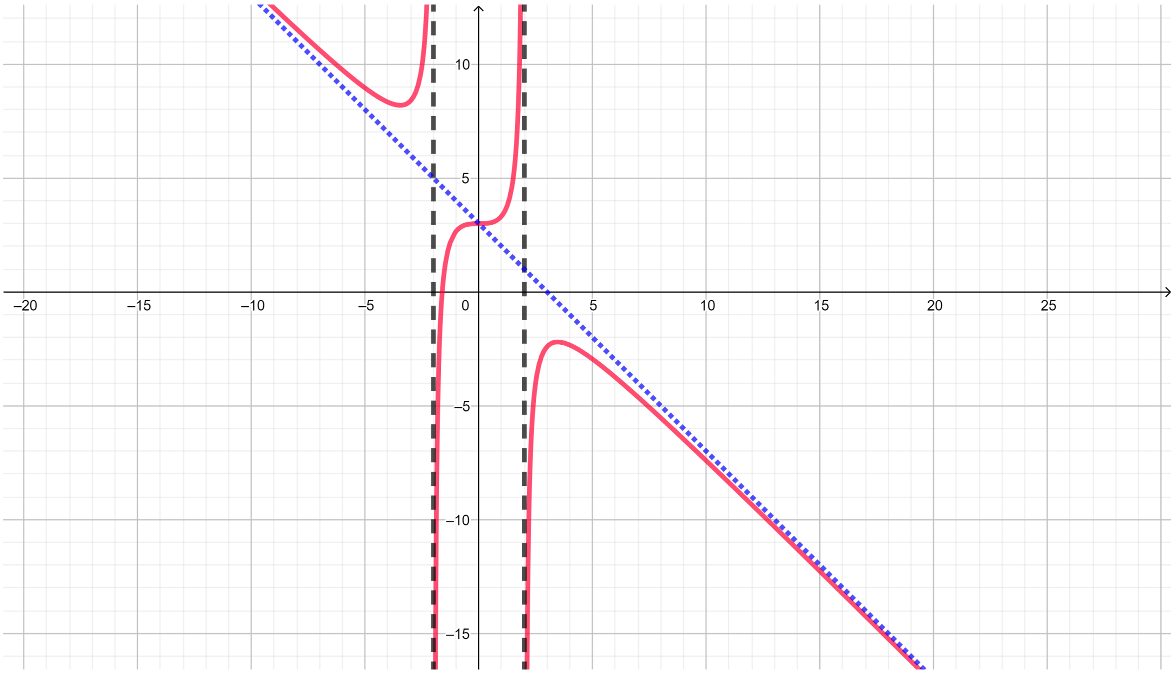
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

diz-nos essencialmente que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-m}$ é igual a $+\infty$ quando $n-m$ é par, e $-\infty$ quando $n-m$ é ímpar – i.e. $-\infty = -(+\infty)$.

■ **Exemplo 2.8 — Assímptotas de uma função racional.** A função f definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4 - x^2}$$

representada na figura abaixo possui duas assímptotas horizontais ($x = -2$ e $x = 2$) e uma assímptota oblíqua ($y = -x + 3$).



A verificação de que $x = \pm 2$ são assímptotas verticais segue das igualdades envolvendo limites laterais[2]:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-3x^2+12}{4-x^2} &= \frac{-8}{0^+} = -\infty, \\
\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-3x^2+12}{4-x^2} &= \frac{-8}{0^-} = +\infty, \\
\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-3x^2+12}{4-x^2} &= \frac{8}{0^-} = -\infty, \\
\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-3x^2+12}{4-x^2} &= \frac{8}{0^+} = +\infty.
\end{aligned}$$

Para verificar que $y = -x+3$ é uma assímptota oblíqua via a **Definição 2.1.6**, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-3x^2+12}{4x-x^3} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{-x^3} \\
&= \underbrace{-1}_{=m} \\
\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x^2+12}{4x-x^3} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{-x^3} \\
&= \underbrace{-1}_{=m}.
\end{aligned}$$

[2]Para obter 0^- e 0^+ em denominador, usámos o facto de $4-x^2 < 0 \Leftrightarrow x > 2 \ \vee \ x < -2$ & $4-x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\underbrace{(-1)}_{=m}x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+4x+12}{4-x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2}{-x^2}\\
&= \underbrace{3}_{=b}\\
\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\underbrace{(-1)}_{=m}x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+4x+12}{4-x^2}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{-x^2}\\
&= \underbrace{3}_{=b}.
\end{aligned}$$

■

✓ Repare que no exemplo anterior poderíamos ter feito a divisão de polinómios. Assim,

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+12}{4-x^2}=-x+3+\frac{4x}{4-x^2},$$

logo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+3)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0$$

Daí também podemos concluir que $y=-x+3$ é assímptota ao gráfico de f.

Com o próximo desafio pretende-se ilustrar que pode existir funções que possuam mais que uma assímptota oblíqua.

Desafio 2.4 — Assímptotas Oblíquas. Verifique que:

1. a função $x\mapsto x+\frac{1}{x}$ admite uma única assímptota oblíqua;
2. a função $x\mapsto |x|+\frac{1}{x}$ admite duas assímptotas oblíquas.

Assímptotas de funções irracionais

O próximo resultado, que pode ser obtido com base no gráfico da função inversa de $x\mapsto x^n$ para para valores de n par $(n=2k)$ e n ímpar $(n=2k+1)$ será de extrema utilidade para determinar limites como o do **Exemplo 2.14** – a ser abordado mais adiante.

Corolário 2.1.7 Pode mostrar-se que:

- Para $k\in\mathbb{N}$, a função irracional definida por $g(x)=\sqrt[2k+1]{x}$ tem como domínio $\mathbb{R}$ e verifica

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty \quad\wedge\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

mas por outro lado, a função definida por $h(x)=\sqrt[2k]{x}$ tem por domínio $[0,+\infty[$ e verifica

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

Assímptotas de funções transcendentes

■ **Exemplo 2.9 — Assímptotas da função exponencial.** Na subseção **1.5.4 Funções Exponenciais** constatámos[3] que a função exponencial $x \mapsto a^x$ é estritamente decrescente para valores de $0 < a < 1$, e estritamente crescente para valores de $a > 1$.

Por outro lado, via o crescimento/decrescimento do gráfico é possível concluir:

1. $y = 0$ é uma assímptota horizontal ao gráfico de $x \mapsto a^x$, uma vez que
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \text{se} \quad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \text{se} \quad a > 1.$$
2. A função $x \mapsto a^x$ não é limitada [inferiormente/superiormente], uma vez que
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = -\infty, \quad \text{se} \quad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \text{se} \quad a > 1.$$

■

■ **Exemplo 2.10 — Assímptotas da função logaritmo.** Com base no gráfico da função logaritmo ilustrada na subseção **1.5.6 Funções Logarítmicas** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**, segue pelo **Teorema 1.5.2** que o eixo Oy ($x = 0$) é uma assímptota do gráfico da função $x \mapsto \log_a(x)$ ($a > 0$), uma vez que[4]

$$\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = -\infty$$

para valores de $a > 1$ e

$$\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = +\infty.$$

para valores de $0 < a < 1$. ■

Na prática, podemos afirmar que no caso da função f admitir inversa, que o **Corolário 1.4.6** da subseção **1.4.5 Função Inversa e Gráfico** permite-nos estabelecer uma correspondência biunívoca entre as assímptotas horizontais (resp. verticais) do gráfico de f podem ser identificadas – via a **reflexão do gráfico de f relativamente à recta** $y = x$ – como assímptotas verticais (resp. horizontais) ao gráfico de f^{-1}.

Este tipo de correspondência é muito útil para obter **limites infinitos ou no infinito** envolvendo funções trigonométricas e suas inversas, como iremos ver de seguida.

■ **Exemplo 2.11 — Assímptotas da função tangente e arco tangente.** O gráfico da função tangente, $x \mapsto \tan x$, tem uma infinidade de rectas verticais como assímptotas, entre as quais

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

enquanto o gráfico da função $x \mapsto \arctan x$ admite apenas duas assímptotas, horizontais

$$y = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad y = \frac{\pi}{2}.$$

A constatação acima segue das igualdades[5]

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

[3] Esta conclusão poderia ser obtida via o gráfico da função exponencial $x \mapsto e^x$ (que é estritamente crescente) e a identidade $a^x = e^{x\ln(a)}$ – vide **Função Exponencial-Potência 1.5.7**.

[4] Note que $\ln(a) > 0$, para valores de $a > 1$ e $\ln(a) < 0$, para valores de $0 < a < 1$.

[5] Quando estamos a determinar os limites $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)$ (resp.$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x)$) estamos a determinar para que comprimento de arco x o declive da reta é indefinido.

■

■ **Exemplo 2.12 — Assímptotas da função arco-secante.** No **Desafio 1.63** da subseção **1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** pretende-se que chegue na conclusão de que

$$]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[=\{y\in\mathbb{R}\ :\ |y|\geq 1\}$$

é o domínio da função arco-secante, e que

$$x\mapsto \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

corresponde à inversa da restrição da função secante a $]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi[$:

$$x\mapsto \sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}.$$

Com base nesta relação, e nos limites no infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+\quad \text{e}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$$

poderá concluir[6] que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\arccos\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to0^+}\arccos x &&= \arccos 0 &&= \frac{\pi}{2}\\
\lim_{x\to-\infty}\arccos\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to0^-}\arccos x &&= \arccos 0 &&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

ou seja, que $y=\frac{\pi}{2}$ é uma assímptota horizontal da função arco-secante.

Note ainda que a função não admite assímptota vertical em $x=0$, por conta dos limites

$$\lim_{x\to0^+}\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\quad \&\quad \lim_{x\to0^-}\arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

não existirem[7].

■

Desafio 2.5 — Assímptotas verticais de funções trigonométricas. Com base no estudo gráfico já realizado na subseção **1.5.8 Funções Trigonométricas**, indique para que valores de a, os limites laterais $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ das funções abaixo dão $+\infty$ ou $-\infty$:

1. $f(x)=\operatorname{cotg}(x)$
2. $f(x)=\operatorname{cosec}(x)$.

O que pode concluir sobre a existência de assímptotas verticais em cada um dos casos?

[6] Poderia adoptar um raciocínio análogo ao utilizado no **Exemplo 2.11**

[7] Para entender que os limites laterais em 0, basta atender que o gráfico da função arco-cosseno nunca se aproxima de zero. Na verdade, o gráfico da função arco-secante não está definida no intervalo $]-1,1[$.

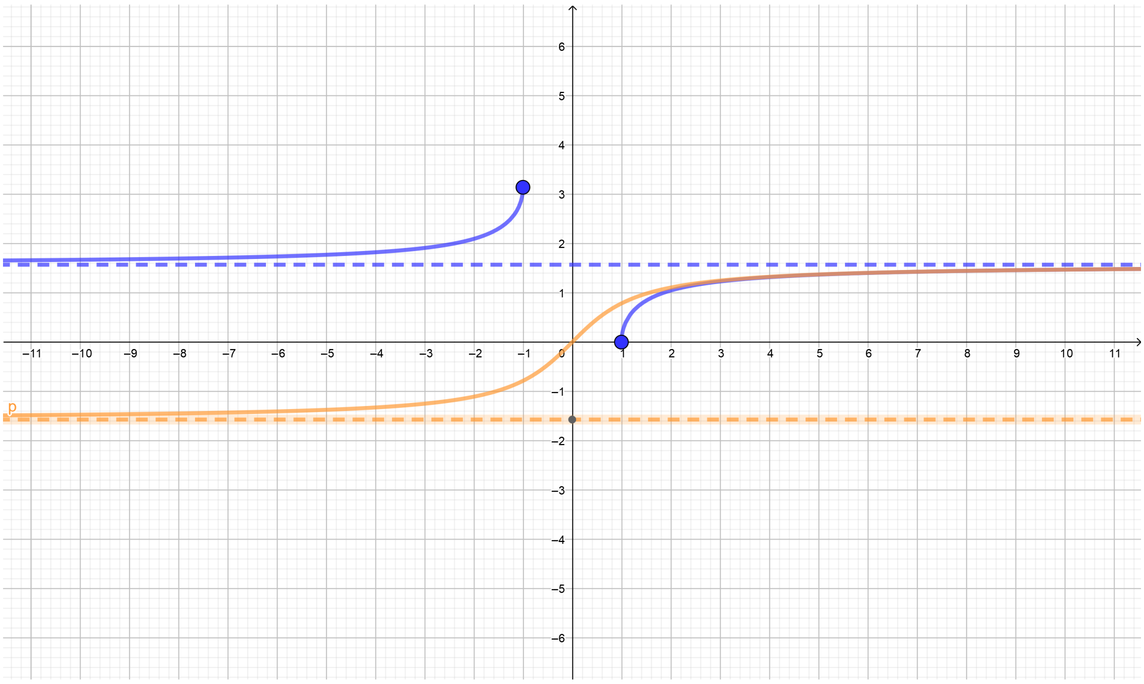


Figura 2.1: Na figura encontram-se representados os gráficos das funções arco-tangente (a laranja) e da função arco-secante (a azul) do **Exemplo 2.11** & do **Exemplo 2.12**, respectivamente. A tracejado azul a assímptota horizontal $y = \frac{\pi}{2}$ da função arco-secante. Na ilustração gráfica, podemos as retas tracejado nos dão as assímptotas horizontais $(y = \pm\frac{\pi}{2})$ do gráfico da função arco-tangente. Em suma, pode-se concluir-se que a assímptota $y = \frac{\pi}{2}$ é comum a ambos os gráficos.

Desafio 2.6 — Assímptotas horizontais de funções trigonométricas. Faça uso do estudo gráfico realizado na subseção **1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas** para determinar os $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ das funções abaixo

1. $f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$
2. $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$
3. $f(x) = \operatorname{arccosec}(x)$.

O que pode concluir sobre a existência de assímptotas horizontais em cada um dos casos?

2.1.4 Propriedades e Resultados

Regras envolvendo limites no ponto

É evidente que:

(i) $\lim\limits_{x\to a} c = c$, isto é, qualquer que seja a, o limite da função constante quando x tende para a é igual à constante;

(ii) $\lim\limits_{x\to a} x = a$, isto é, qualquer que seja a, o limite da função identidade quando x tende para a é igual a a.

Enuncieamos mais algumas propriedades de limites.

Teorema 2.1.8 Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

então tem-se

1. $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = L+M$
2. $\lim_{x\to a} f(x)-g(x) = L-M$
3. $\lim_{x\to a} cf(x) = cL$ para todo o real c.
4. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$
5. Se m é um inteiro positivo então $\lim_{x\to a} f(x)^m = L^m$
6. Se $M \neq 0$ então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Desafio 2.7 Diga, justificando, se as afirmações abaixo são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**). No caso de **V**, justifique com base nas propriedades ilustradas no **Teorema 2.1.8**. No caso de **F**, dê um contra-exemplo.

1. Se não existem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, então os limites $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ e $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$ também não existem.
2. Se existem os limites $\lim_{x\to a} g(x)$ e $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$, então o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ também existe.
3. Se os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem, o limite $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ também não existe.
4. Se existem os limites $\lim_{x\to a} g(x)$ e $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$, então o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ também existe.

Regras envolvendo limites infinitos

Diga-se que em vez dos reais a, L e M também se pode ter os símbolos $+\infty$ ou $-\infty$.

O limite da soma é a soma dos limites, inclusive nos seguintes casos:

- $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$ e $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$
- $(-\infty)+b = -\infty$ e $+\infty+b = +\infty$ para todo o real b.

O limite do produto é o produto dos limites, inclusive nos seguintes casos:

- $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$ e $(+\infty)(-\infty) = -\infty$
- $(+\infty)k = (-\infty)(-k) = +\infty$ e $(+\infty)(-k) = (-\infty)k = -\infty$ para todo o real positivo k.

Note-se que os resultados expressam que o sinal de limite é permutável com o sinal operatório entre funções, sempre que:

(a) Os limites em questão existam, podendo ser finitos ou infinitos;
(b) Não existam símbolos de indeterminação.

No caso de

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \wedge \quad L = \lim_{x\to a} f(x) \neq 0$$

então o que é que se pode dizer sobre o limite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \ ?$$

Substituindo vem $\frac{L}{0}$ sob o pressuposto (certo ou errado?) que o limite do quociente é igual ao quociente dos limites. Qual será então o significado do símbolo $\frac{L}{0}$ com $L \neq 0$? Para tentar abordar a questão, estude-se alguns casos particulares:

(i) Se considerar $f(x) = 1$ e $g(x) = x$ então

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

não existe já que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$$

(ii) Se considerar $f(x) = 1$ e $g(x) = x^2$ então o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

é igual a $+\infty$ pois

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

✓ Os exemplos acima indiciam que a resposta à questão depende dos valores dos limites laterais em torno de a.

E se

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

então quanto vale o limite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,? \tag{2.3}$$

Justifique.

Alguns exemplos de limites envolvendo indeterminação

Os símbolos do tipo

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0\times\infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

são conhecidos por símbolos de indeterminação. O valor do limite é desconhecido a priori, quando as regras operatórias de limites conduzirem a um símbolo de indeterminação. Então é preciso recorrer a técnicas de cálculo para o determinar.

■ **Exemplo 2.13 — Indeterminação tipo $+\infty - \infty$.** O limite

$$\lim_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{3-x}\right)$$

envolvem indeterminações do tipo $+\infty - \infty$.

Para este caso, aplicando a técnica da multiplicação pelo conjugado, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} x + \sqrt{3-x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+\sqrt{3-x})(x-\sqrt{3-x})}{x-\sqrt{3-x}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-3}{-x-\sqrt{3-x}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{-x} \\
&= \lim_{x\to +\infty} (-x) \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.14 — Indeterminações vs. assímptotas oblíquas.** O gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ corresponde à hipérbole de equação

$$y^2 - x^2 = 1$$

situada acima do eixo Ox. Com base na **Definição 2.1.6** temos que os cálculos envolvendo os limites $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

nos permite concluir que as candidatas a assímptotas oblíquas têm declive $m = 1$ e $m = -1$, respectivamente.

Adicionalmente, os limites

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \overbrace{1}^{=m}.x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - \overbrace{(-1)}^{=m}.x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

permitem-nos concluir que ambas as assímptotas passa pela origem ao gráfico de f.

EM SUMA: $y = x$ e $y = -x$ (bissectrizes dos quadrantes pares e ímpares) são assímptotas ao gráfico de f ■

Desafio 2.8 — Interpretação geométrica do conceito de assímptota não-vertical. Determine para que valores de a, b e m o limite no infinito

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + a} - mx - b \right)$$

(i) É igual a zero (0);
(ii) É igual a 'mais infinito' $(+\infty)$.

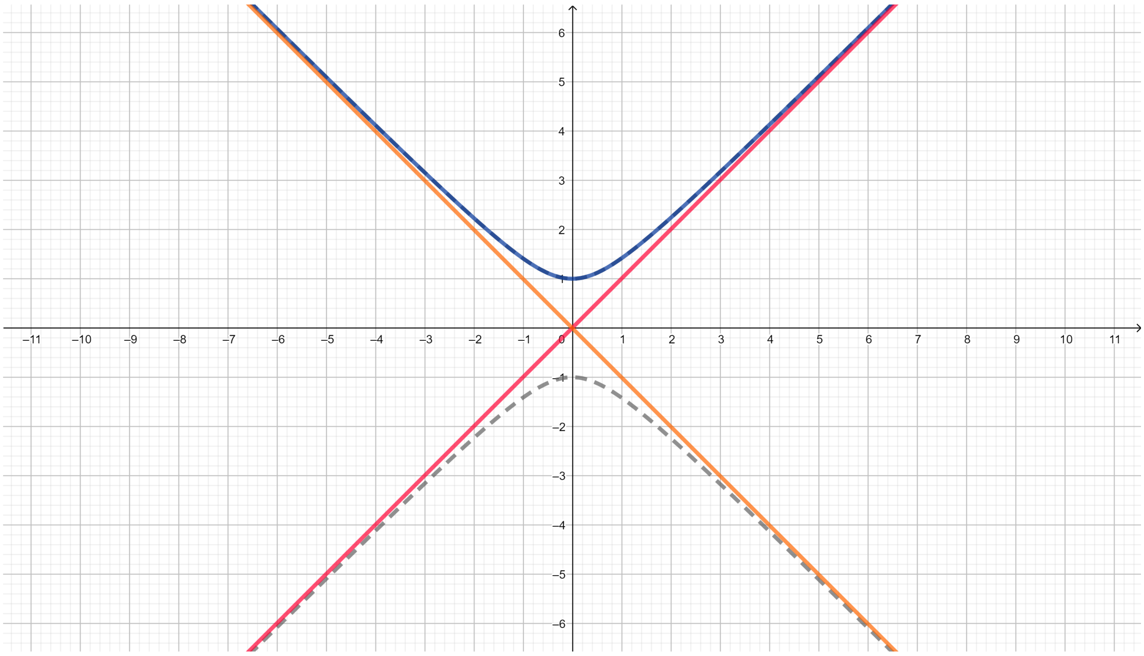


Figura 2.2: Na figura encontram-se representadas as assímptotas oblíquas da função $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ (a azul) dadas pelas rectas $y = x$ (a magenta) e $y = -x$ (a laranja).

De seguida, use a **Definição 2.1.6** para interpretar o resultado obtido.

■ **Exemplo 2.15 — Indeterminação tipo $\frac{0}{0}$.** Para calcular o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

comece por observar que

$$x-1 = (\sqrt[3]{x})^3 - 1$$

e por considerar o polinómio de grau 3 na variável y:

$$p_3(y) = y^3 - 1.$$

Como este polinómio admite zero em $y = 1$, segue pelo algoritmo da divisão de polinómios – vide **Teorema 1.5.1** da subseção **1.5.1 Funções Polinomiais** – que

$$y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1).$$

Em particular, para a escolha $y = \sqrt[3]{x}$ segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x})^3-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x}-1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.16 — Indeterminação do tipo $0\times\infty$.** Um dos limites do tipo $0\times\infty$ que surge muito na literatura envolve as funções exponenciais e logaritmos de base a abordados nas subseções **1.5.4 Funções Exponenciais** e **1.5.6 1.5.6**, assim como polinómios de grau n, que iremos denotar por $p_n(x)=a_nx^n+p_j(x)$, $a_n\neq 0$ e $j<n$.

Note que
$$\lim_{x\mapsto+\infty} p_n(x)=a_n(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \text{se } a_n>0\\ -\infty, & \text{se } a_n<0\end{cases}$$

Adicionalmente, os seguintes limites que poderão ser verificados no **Capítulo 3 Derivação** quando abordar a regra de L'Hopital:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} a^{-x}p_n(x)&=0 \quad \text{para valores de} \quad a>1\\ \lim_{x\to0^+}\log_a(x)\,p_n(x)&=0 \quad \text{para valores de} \quad a>1\end{aligned}$$
envolvem indeterminações do tipo $0\times\infty$ que podem ser convertidos em indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (limite envolvendo a função exponencial) e $\frac{0}{0}$ (limite envolvendo a função logarítmica). ■

2.1.5 Teorema do Enquadramento e Aplicações

Nesta subseção iremos introduzir um resultado de extrema utilidade que nos permite determinar, em particular, limites envolvendo as funções transcendentes ilustradas no **1.5 Directório: Funções Algébricas e Funções Transcendentes** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos.**

Teorema 2.1.9 — Teorema do Enquadramento. Seja h a função definida, num intervalo I aberto contendo o ponto a, eventualmente com excepção de a. Se existem duas funções f e g, para as quais se tem
- $f(x)\leq h(x)\leq g(x) \quad x\in I$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$

então
$$\lim_{x\to a} h(x)=L$$

Ideia da demonstração. Uma ideia simples para esboçarmos a demonstração imediata do **Teorema 2.1.9** passa por considerarmos a desigualdade auxiliar, envolvendo o módulo de um número real $a\in\mathbb{R}$:
$$-|a|\leq a\leq |a|.$$

Assumindo que $f(x)\leq h(x)\leq g(x) \quad x\in I$, segue a sequência de desigualdades[8]
$$-|f(x)-L|\leq f(x)-L\leq h(x)-L\leq g(x)-L\leq |g(x)-L|.$$

Logo
$$-\lim_{x\to a}|f(x)-L|\leq \lim_{x\to a}(h(x)-L)\leq \lim_{x\to a}|g(x)-L|.$$

De seguida, da condição $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ obtém-se que
$$\lim_{x\to a}|f(x)-L|=\lim_{x\to a}|g(x)-L|=0$$
e, por conseguinte, que
$$0\leq \lim_{x\to a}(h(x)-L)\leq 0.$$

[8] Note que para $a=f(x)-L$ se tem $f(x)-L\geq -|f(x)-L|$. Por outro lado, para $a=g(x)-L$, podemos concluir que $g(x)-L\leq |g(x)-L|$.

Portanto,

$$\lim_{x\to a}(h(x)-L)=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} h(x)=L.$$

■

Desafio 2.9 Assumindo que que a função f satisfaz a condição

$$x+2\arccos(a)\leq f(x)\leq x^2+\arctan(b)$$

para todo $x\neq -1$, determine para que para que valores de a e b se tem

$$\lim_{x\to -1} f(x)=0.$$

Limites envolvendo funções limitadas

Corolário 2.1.10 — Enquadramento envolvendo funções limitadas. Seja f a função definida, num intervalo aberto contendo o ponto a, eventualmente com excepção de a tal que

$$\lim_{x\to a} f(x)=0$$

e g uma função limitada no intervalo I.

Então

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=0.$$

Ideia da Demonstração. Assumindo que g é uma função limitada no intervalo I, segue nas condições da **Definição 1.3.6** que a função $x\mapsto |f(x)g(x)|$ é limitada inferiormente pelo eixo Ox, e superiormente pela função

$$x\mapsto M|f(x)|,$$

sendo $M>0$ a constante a determinar, i.e.

$$0\leq \underbrace{|f(x)g(x)|}_{=|h(x)|}\leq M|f(x)|, \quad \text{para todo o} \quad x\in I.$$

Adicionalmente, da condição

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=0,$$

segue que a igualdade[9]

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=0,$$

é imediata por aplicação directa do **Teorema 2.1.9**. ■

■ **Exemplo 2.17 — Exemplo académico de enquadramento.** Podemos mostrar que o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2}=0$$

ou usando o item 6. do **Teorema 2.1.8** ou **Teorema 2.1.9**.

Para aplicarmos o **Teorema 2.1.9**, observe que a desigualdade

$$1+x^2\geq 1$$

[9] Observe que $\lim_{x\to a}|h(x)|=0 \iff \lim_{x\to a}h(x)=0$.

nos permite concluir[10] que

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| = \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 2|x| \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{-2}_{=m}|x| \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq \underbrace{2}_{=M}|x|.$$

Mostrámos assim que a função $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ é limitada superiormente pela função $x \mapsto 2|x|$, e inferiormente pela função $x \mapsto -2|x|$, tal como ilustrado na figura abaixo

Adicionalmente, a igualdade

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

permite-nos demonstrar, por enquadramento, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

■

O gráfico da função $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ – vide **Desafio 1.19** – corresponde ao gráfico de uma função limitada. Assim, nas condições do **Corolário 2.1.10** poderíamos verificar para valores de $a \in \mathbb{R}$ que

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{2x}{1+x^2} f(x)\right) = 0,$$

desde que a função f escolhida satisfazesse a condição de limite $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

■ **Exemplo 2.18 — Teorema do Enquadramento envolvendo funções trigonométricas.** Outro tipo de exemplos clássico envolvendo teorema do confronto consiste p.e no estudo de limites da forma

$$\lim_{x\to 0} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

[10]Observe que a desigualdade $|a| \leq |b|$ é equivalente a termos $-|b| \leq a \leq |b|$.
No nosso caso, considerámos $a = \frac{2x}{1+x^2}$ e $b = 2|x|$.

Neste caso particular, a função f definida por $f(x) = x^n$ satisfaz

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

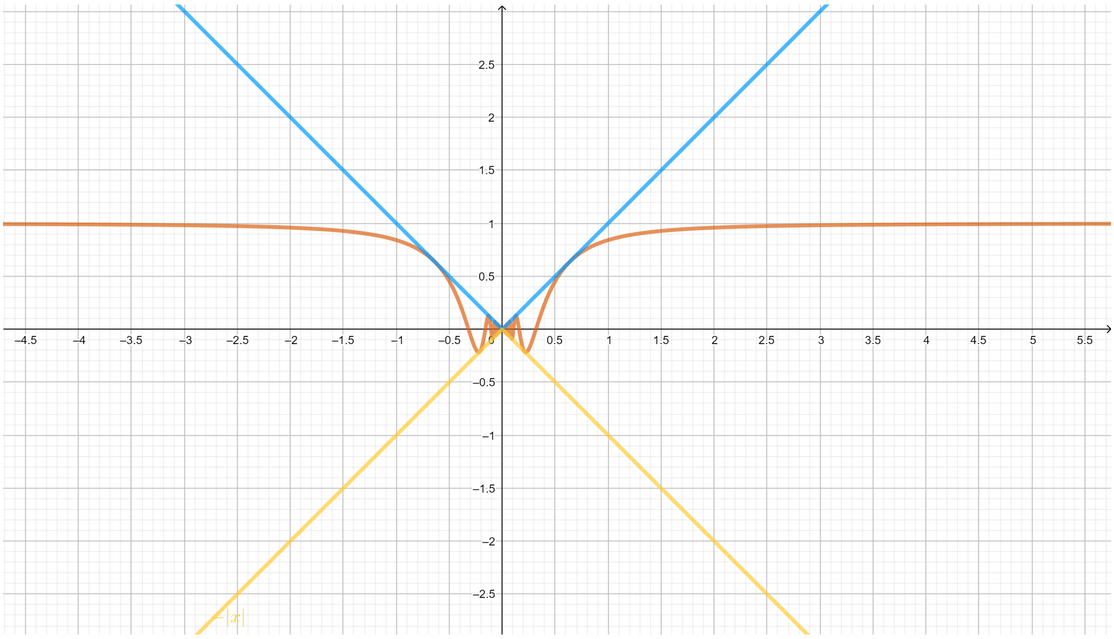
Por outro, a função g da definida $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, mesmo não tendo limite em $x \to 0$, é limitada – vide **Exemplo 2.6** – está nas condições do **Corolário 2.1.10** pelo que

$$\lim_{x\to 0} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \text{para todos o} \quad n \in \mathbb{N}.$$

No caso de $n = 1$, a prova por enquadramento induzida pela desigualdade

$$-|x| \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|, \quad \text{para todo o} \quad x \neq 0$$

tem a seguinte representação gráfica:



■

No próximo exemplo iremos ilustrar a razão pela qual o **Corolário 2.1.10** não pode ser aplicado no caso de termos uma função g que não é limitada

■ **Exemplo 2.19 — Exemplo em que a função não é limitada.** Suponha que pretendemos calcular limites da forma

$$\lim_{x\to 3\pi} \left(\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) g(x)\right)$$

envolvendo uma função g **não necessariamente limitada**.

Note que a função

$$x \mapsto \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

está nas condições do **Corolário 2.1.10**, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3\pi} \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) &= \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{0}{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

No entanto, se escolhermos $x \mapsto \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ como função g, obtemos[11]

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3\pi}\left(\text{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= \lim_{x\to 3\pi} 1\\ &= 1\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

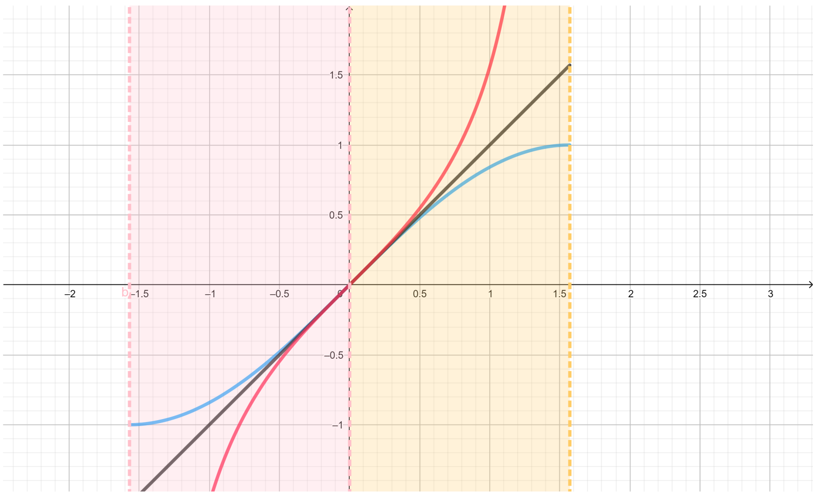
■

Desafio 2.10 — Vide Exemplo 2.17. Diga, justificando, em qual dos exemplos abaixo não é possível aplicar o **Corolário 2.1.10**:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+1}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+1}\arccos(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+1}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+1}\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Limites notáveis envolvendo funções trigonométricas

■ **Exemplo 2.20 — Enquadramento utilizando funções seno e tangente.** Na figura abaixo encontram-se representado no intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ os gráficos das funções seno (a azul), tangente (a magenta) e a reta de equação $y = x$.



Note que no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$ (região sombreada a amarelo) o gráfico da função tangente se situa acima da recta $y = x$. Por sua vez, o gráfico da função seno se situa abaixo da recta $y = x$.

Esta interpretação gráfica permite-nos obter a seguinte desigualdade:

$$\sin(x) \le x \le \tan(x) \quad \text{para todo o} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}.$$

Dividindo[12] por $\sin(x)$ em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$1 \le \frac{x}{\sin(x)} \le \frac{1}{\cos(x)}, \quad \text{para todo o} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

[11] Observe que $\text{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

[12] $\sin(x) > 0$ no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$ & $\sin(x) < 0$ no intervalo $]-\frac{\pi}{2},0[$.

De modo análogo, para a região sombreada a rosa segue a desigualdade

$$\tan(x) \leq x \leq \sin(x), \quad \text{para todo o} \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq 0.$$

e, por conseguinte, a desigualdade

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{para todo o} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

após dividirmos ambos os membros da [dupla] desigualdade por $\sin(x)$.

Estamos portanto nas condições do **Teorema 2.1.9**, uma vez que as funções f, g e h definidas por

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{x}{\sin(x)}$$

satisfazem a desigualdade

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{=\sec(x)} \quad \text{para todo o} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$$

e têm limites iguais:

$$\lim_{x\to 0} \sec(x) = \sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = 1 = \lim_{x\to 0} 1.$$

Logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1.$$

■

✓ A conclusão de que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

pode ser obtida, aplicando novamente o **Teorema 2.1.9** às funções resultantes da desigualdade[13]

$$1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \cos(x) \quad \text{para todo o} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$$

ou alternativamente aplicando à função $h(x) = \dfrac{x}{\sin(x)}$ a propriedade envolvendo limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} h(x)}$$

que decorre do **Teorema 2.1.8**.

Desafio 2.11 — Limites notáveis envolvendo funções trigonométricas. Use o resultado obtido no **Exemplo 2.20** verificar os seguintes limites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = 1.$

[13] Note que a equivalência

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \iff 1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \cos(x)$$

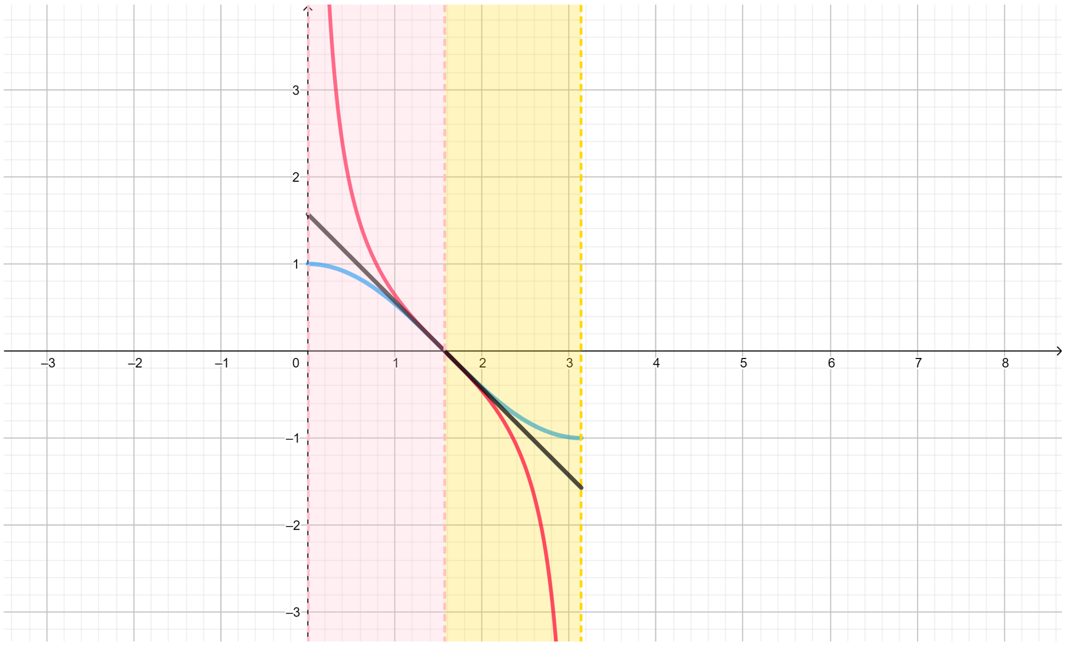
é verdadeira para todo o $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

2. $\lim_{x\to 0} x\text{cotg}(x) = 1$.

Desafio 2.12 — Enquadramento utilizando funções cosseno e cotangente. Na figura abaixo encontra-se representado os seguintes gráficos no intervalo $]0,\pi[$. São eles:

- O gráfico da função $x \mapsto \cos(x)$ (a azul);
- O gráfico da função $x \mapsto \text{cotg}(x)$ (a magenta);
- O gráfico da recta de equação $y = -x + \dfrac{\pi}{2}$ (a preto).

Adicionalmente, foi representado a rosa (resp. amarelo) os intervalos $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (resp. $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$).

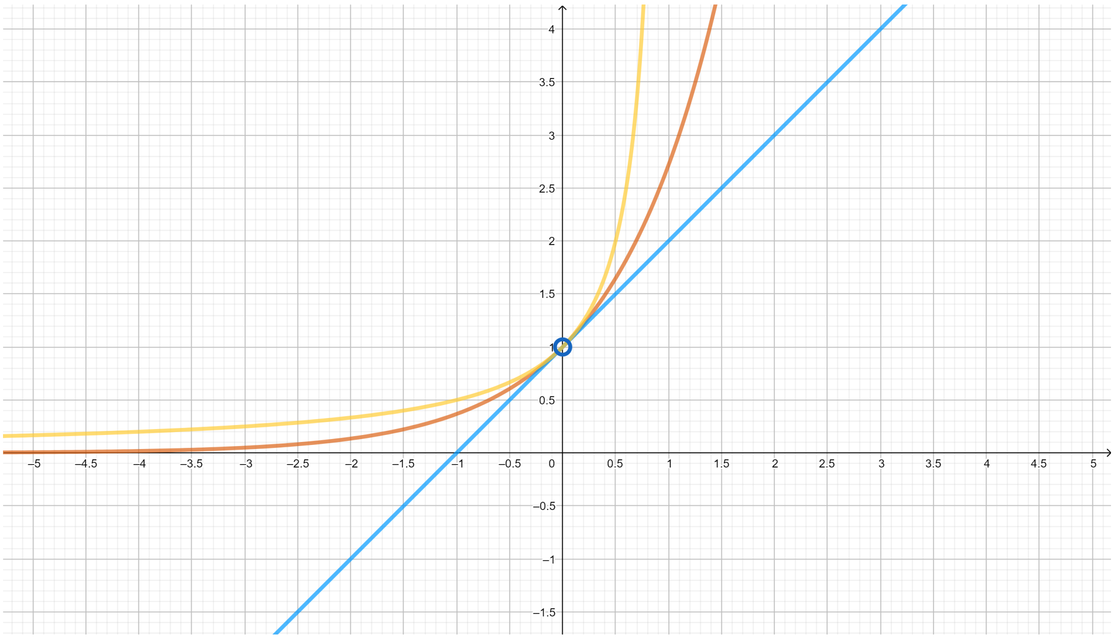


Use o gráfico acima e o **Teorema 2.1.9** para determinar o valor do limite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2x-\pi}.$$

Limites notáveis envolvendo exponenciais

■ **Exemplo 2.21** O exemplo da figura abaixo corresponde ao enquadramento da função $x \mapsto e^x$ (a vermelho) pela recta $y = x + 1$ (a azul) – que é tangente ao gráfico de e^x em $(0,1)$ – e a função $g(x) = \frac{1}{1-x}$ (representada a laranja apenas para valores de $x \leq 1$).



A interpretação gráfica conduz-nos à sequência de inequações

$$x+1 \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \quad \text{para todo o} \quad x<1$$

que por sua vez nos permitem obter as seguintes desigualdades:

$$\underbrace{1}_{=f(x)} \leq \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{=h(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{=g(x)}, \quad \text{no caso de} \quad 0<x<1.$$

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{=f(x)} \leq \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{=h(x)} \leq \underbrace{1}_{=g(x)}, \quad \text{no caso de} \quad x<0.$$

Adicionalmente, a verificação das igualdades abaixo envolvendo limites laterais, com recurso ao **Teorema 2.1.9**, é imediata:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}$$

Esta última igualdade permite-nos mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

■

Desafio 2.13 Para função f definida pontualmente por $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x+1}+1\right)$.

1. Determine o domínio de f.
2. Determine a expressão analítica, o domínio e o contradomínio da função inversa f^{-1}.
3. Calcule o limite $\lim_{x\to 0} x f^{-1}(x)$.

2.1.6 Cálculo de limites usando substituição

Limites envolvendo funções trigonométricas

No próximo exemplo vamos fazer uso do limite notável deduzido no **Exemplo 2.20** para calcular o limite abaixo

■ **Exemplo 2.22 — Limite envolvendo os zeros da função seno.** Como teve oportunidade de constatar na **Subeção 1.5.8** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** os zeros da função seno são da forma

$$x = k\pi, \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para este caso, obtemos que o limite

$$\lim_{x\to k\pi} \frac{\sin(x)}{x-k\pi}$$

corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Por outro lado, note que nas condições do **Corolário 2.2.4** a função [na variável y] $y \mapsto y+k\pi$ satisfaz

$$\lim_{y\to 0}(y+k\pi) = k\pi.$$

Assim, fazendo a substituição $x = y+k\pi$, obtém-se a igualdade

$$\lim_{x\to k\pi} \frac{\sin(x)}{x-k\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+k\pi)}{y}.$$

De seguida, aplicando a identidade abaixo para $a = x$ e $b = k\pi$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$

conclui-se ainda que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+k\pi)}{y} &= \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)\cos(k\pi)+\cos(y)\overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)\cos(k\pi)}{y}.
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo uso do limite notável

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

obtido a partir do **Exemplo 2.20**, concluímos com base no **item 3.** do **Teorema 2.1.8** que

$$\lim_{x\to k\pi} \frac{\sin(x)}{x-k\pi} = \cos(k\pi).$$

A prova de que a constante $c = \cos(k\pi)$ admite a simplificação

$$\cos(k\pi) = (-1)^k \ (k \in \mathbb{Z})$$

fica a cargo do leitor. ■

■ **Exemplo 2.23 — Limites notáveis envolvendo funções trigonométricas inversas.** Podemos facilmente verificar que, nas condições do **Corolário 2.2.4** que as igualdades abaixo são verdadeiras:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \underbrace{=}_{y=\arcsin(x)} \lim_{y\to 0}\frac{y}{\arcsin(y)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} \underbrace{=}_{y=\arctan(x)} \lim_{y\to 0}\frac{y}{\arctan(y)}$$

A prova de que o valor dos limites envolvendo as funções trigonométricas inversas vale um (1) em ambos os casos é uma consequência directa do **Exemplo 2.20** e do **Desafio 2.11**. ■

■ **Exemplo 2.24 — Limites notáveis envolvendo funções logarítmicas.** Podemos facilmente verificar que, nas condições do **Corolário 2.2.4** que a igualdade abaixo é verdadeiras:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \underbrace{=}_{y=e^x-1} \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}$$

A prova de que

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1 = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

é imediata pelo **Exemplo 2.21** e pelo item 6. do **Teorema 2.1.8**. ■

Desafio 2.14 Suponha que g é uma função que satistaz a condição

$$|x^2 g(x) - x\ln(1+x)| \leq |x|^3, \quad \text{para todo o} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Aplique o **Teorema 2.1.9** para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} g(x).$$

Desafio 2.15 Use a substituição $x = f^{-1}(y)$ (função inversa) – i.e. $g = f^{-1}$ no **Teorema 2.2.3** – para calcular os seguintes limites:

1. $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\arccos(x)}.$$

   SUGESTÃO: Faça substituição $x = \cos(y)$ para valores[14] de $0 \leq y \leq \pi$.

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin(e^x-1)}{e^x-1}\,\frac{e^x-1}{x}\right) = \ldots.$$

   SUGESTÃO: Faça a substituição $y = e^x - 1$ num dos limites.

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arctan(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\arctan(x))}{\arctan(x)}\,\frac{\arctan(x)}{x}\right) = \ldots.$$

   SUGESTÃO: Faça a substituição $y = \arctan(x)$ num dos limites.

[14] A escolha $0 \leq y \leq \pi$ segue do facto de $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ corresponder à inversa da função $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ – vide subseção **1.5.9 Funções Trigonométricas Inversas**.

2.1.7 Cálculo de limites no infinito

Nesta seção convidamos o leitor a aplicar o **Teorema 2.4** para reformular/calcular alguns dos limites obtidos anteriormente no infinito.

Limites envolvendo funções limitadas

Desafio 2.16 Use o que aprendeu com o estudo de exemplos envolvendo o **Teorema 2.1.10** – em particular, os **Exemplo 2.2** & **Exemplo 2.18** – para calcular os limites abaixo no infinito:

1. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{7x+\sin(x)}{x-11\sin(x)}$;
2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos^2(x)}{x^2\tan\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Desafio 2.17 Com base no estudo da função $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ no **Exemplo 2.14**, dê um exemplo de uma função g para a qual se verifica a igualdade

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}g(x)+xg(x)) = 0.$$

Limites envolvendo funções transcendentes

É fácil de verificar, via a substituição $y = \frac{1}{x}$ as seguintes identidades[15]:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(y)}{y} = 1\\
\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) &= \lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y} = 1\\
\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1.
\end{aligned}$$

Desafio 2.18 Use o que aprendeu sobre cálculo de limites envolvendo substituição para verificar as igualdades abaixo:

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(x - x\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right) = 0.$
2. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{8}\sinh\left(\dfrac{9}{x}\right) = \dfrac{9}{8}.$
3. $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)+1} - x\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{9}{x}\right)+1}\right) = -\dfrac{5}{2}$

Desafio 2.19 Faça uso do **Desafio 2.11** e do **Teorema 2.1.6** para verificar a igualdade abaixo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^3+x-2}{2x^5-16x}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3x}\right) = \frac{3}{2\pi}.$$

Assímptotas ao gráfico

Para terminar, procure combinar o **Teorema 2.1.3** com o **Corolário 2.1.10** para comprovar o comportamento mencionado no exemplo abaixo:

■ **Exemplo 2.25** O gráfico de f tal que $f(x) = e^{-x}\cos x$ admite uma assímptota horizontal de equação $y = 0$. Por outro lado, o gráfico de f intersecta a assímptota um número infinito de vezes pois

$$e^{-x}\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi$$

sendo k um inteiro. ■

[15] Para $x \to -\infty$ vs $x \to 0^-$, o raciocínio é análogo.

2.2 Continuidade

2.2.1 Definições: Continuidade num ponto

Definição 2.2.1 Diz-se que a função f é contínua no ponto a se
(i) $a \in D_f$;
(ii) $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$;
(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Acrescente-se que, se pelo menos uma das condições referidas não for válida, diz-se ainda que a é um ponto de descontinuidade de f, ou seja, f é descontínua em a.

Para as funções $x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto |f(x)|$ tratadas no **Desafio 2.2** falha a continuidade em $x = -1$, uma vez que $-1 \notin D_f$.

Para a função sinal do **Exemplo 1.12** falha a continuidade em $x = 0 \in D_{\text{sgn}}$, uma vez que o limite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ não existe – vide **Exemplo 2.3**.

Desafio 2.20 Encontre o valor das constantes c e d para as quais a função h é contínua em $x = -3$:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^3 - 2x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4}}{x^3 + 27} & \text{, se } x < -3 \\[2ex] c & \text{, se } x = -3 \\[2ex] \dfrac{dx + 3d}{1 - \sqrt{x+4}} & \text{, se } x > -3 \end{cases}$$

SUGESTÃO: Comece por rever o **Teorema 1.5.1** as técnicas de cálculo adoptadas no **Exemplo 1.45** e no **Exemplo 1.46** da subseção **1.5.1 Funções Polinomiais**.

Definição 2.2.2 Seja a uma descontinuidade de f.
Então
1. O ponto a é uma descontinuidade removível se existe e é finito o $\lim_{x \to a} f(x)$, mas este ou é diferente de $f(a)$ ou então a não pertence a D ;
2. O ponto a é um pólo se
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \vee \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
3. O ponto a é uma descontinuidade de primeira espécie se os dois limites laterais existem e são finitos, mas distintos;
4. O ponto a é uma descontinuidade de segunda espécie se pelo menos um dos limites laterais não existe ou é infinito.

■ **Exemplo 2.26** Cada uma das seguintes funções é descontínua em $x = 0$. Assim
1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tem uma descontinuidade removível
2. $g(x) = \frac{1}{|x|}$ tem um pólo.
3. $h(x) = (1 + e^{1/x})^{-1}$ tem uma descontinuidade de primeira espécie.
4. $j(x) = x^{-1/3}$ tem uma descontinuidade de segunda espécie.

■

A função sinal do **Exemplo 1.12** exibe uma descontinuidade de primeira espécie em 0 uma vez que os limites laterais são finitos mas distintos – vide **Exemplo 2.3**.

As funções g e f^{-1} tratadas no **Exemplo 2.7** exibem em $x = \pm 1$ **descontinuidades de segunda espécie**.

Desafio 2.21 Classifique as descontinuidades das funções

$$x \mapsto f(x) \text{ e } x \mapsto |f(x)|$$

tratadas no **Desafio 2.2**.

Definição 2.2.3 — Prolongamento por continuidade de f em x_0. Sejam $f : D \to Y$ uma função e x_0 uma descontinuidade removível de f.
Então $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to Y$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

é contínua em x_0.

Desafio 2.22 Determine, caso exista, o prolongamento analítico para as funções

$$x \mapsto f(x) \text{ e } x \mapsto |f(x)|$$

tratadas no **Desafio 2.2**.

Desafio 2.23 Determine o valor das constantes a e b de modo a que a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x^2} \ln(1+x) & \text{, se } x > 0 \\ \dfrac{\tan(bx)}{\tan(ax)} & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

satisfaça as seguintes condições:

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a$.
2. f admita prolongamento analítico em $x = 0$.

2.2.2 Funções contínuas em intervalos

Vamos apresentar a noção de continuidade de uma função num intervalo: aberto, semi-aberto ou fechado, subconjuntos do seu domínio.

Definição 2.2.4 — Continuidade em intervalos. A função $f : D \to Y$ diz-se contínua em $]c, d[\subset D$ se nesse intervalo aberto não existe nenhum ponto de descontinuidade de f.
Supondo agora, que o domínio de f contém o intervalo fechado $[c, d]$ estabelece-se que f é contínua em $[c, d]$ se

(i) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

(ii) f é contínua em $]c, d[$

(iii) $\lim_{x \to d^-} f(x) = f(d)$

Acrescente-se que:

- **(i)** e **(iii)** significam que f é contínua à direita de c e à esquerda de d, respectivamente. Pode-se então dizer que f é contínua em $[c,d]$ se f é contínua, à direita de c, em $]c,d[$ e à esquerda de d, simultaneamente;
- Se f verificar apenas **(i)** e **(ii)** diz-se que é contínua em $[c,d[$;
- Se verificar somente **(ii)** e **(iii)** já se diz que é contínua em $]c,d]$.

✓ Note que a inversa f^{-1} da função $x \to \frac{x}{1+|x|}$ tratada no **Desafio 1.33** é contínua no intervalo $]-1,1[$ mas descontínua nos intervalos da forma

$$[-1,1], \quad]-1,1], \quad [-1,1[.$$

Esta conclusão segue do facto de $x = \pm 1$ serem assímptotas ao gráfico de f^{-1} – vide **Exemplo 2.7**.

2.2.3 Propriedades e Resultados

Teorema 2.2.1 A função f é contínua no ponto a se e só se f é contínua à direita e à esquerda de a simultaneamente.

Todas as funções pertencentes ao directório são contínuas no seu domínio. Poderá criar as suas próprias funções, operando essas funções entre si, sem surgirem descontinuidades, como revelam os próximos teoremas.

Teorema 2.2.2 Se f e g são contínuas no ponto a então as seguintes funções também são contínuas em a:

- a função soma, $f+g$
- a função diferença, $f-g$
- a função produto, $f \times g$
- a função potência, f^n
- a função quociente, $\frac{f}{g}$, desde que $g(a) \neq 0$
- a função módulo, $|f|$

Teorema 2.2.3 — Continuidade da função composta. Se f é contínua no ponto a e g é contínua no ponto L com $L = f(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a

Corolário 2.2.4 Seja $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Se g é contínua no ponto L então

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(L)$$

Teorema 2.2.5 Seja f definida num intervalo I com valores num intervalo J e invertível. A função f é contínua em I se e só se f^{-1} é contínua em J.

2.2.4 Zeros e extremos de funções contínuas

Esta subseção servirá de pré-requisito para introduzir, mais à frente no Capítulo 3 Derivação, o estudo de extremos (máximos ou mínimos) de funções.

Localização de zeros em funções contínuas

Teorema 2.2.6 — Teorema de Bolzano-Cauchy. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $[c,d] \subseteq D$. Se x_1 e x_2 são dois pontos do intervalo e k um valor compreendido entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ então existe, pelo menos, um valor x_0 em $[c,d]$, para o qual $f(x_0) = k$.

✓ Embora a demonstração do **Teorema 2.2.6** seja meramente técnica, a sua interpretação gráfica decorre da interpretação gráfica do conceito de continuidade de uma função.

Este resultado garante que toda a função contínua num intervalo fechado para passar de um valor a outro tem obrigatoriamente que passar por todos os valores intermédios. Fazendo $k = 0$ no teorema anterior tem-se

Corolário 2.2.7 Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[c,d] \subseteq D$.
Se $f(c)f(d) < 0$ então a função f tem , no mínimo, um zero.

✓ No caso do gráfico de f ser estritamente monótono – vide subseção **1.3.5 Monotonia e Concavidades** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** – o zero da função obtido pelo **Corolário 2.2.7** é único.

■ **Exemplo 2.27 — Função cosseno hiperbólico.** Observe que para funções pares, como é o caso da função f definida por $f(x) = \cosh(x) - 1$ – vide subseção **1.5.5 Funções Hiperbólicas** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** – não é possível aplicar o **Corolário 2.2.7** para localizar os zeros em intervalos simétricos da forma $[-d,d]$ $(d > 0)$, uma vez que

$$f(-d) = \underbrace{\frac{e^{-d} + e^{-(-d)}}{2}}_{=\cosh(-d)} - 1 = \underbrace{\frac{e^{-d} + e^{d}}{2}}_{=\cosh(d)} - 1 = f(d) \Longrightarrow f(-d)f(d) = f(d)^2 > 0.$$

No entanto, a igualdade

$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$$

permite-nos verificar que $0 \in [-d,d]$ é um zero de f. ■

Com o próximo desafio pretende-se que aplique o conceito de paridade, abordado na subseção **1.3.3 Paridade e Simetria** do o **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos** à localização de zeros em intervalos simétricos.

Desafio 2.24 Suponha que f é uma contínua no intervalo $[-d,d] \subseteq D_f$ $(d > 0)$.

1. Mostre que se f é ímpar, então f admite pelo menos um zero no intervalo $[-d,d]$.
2. No caso de f ser ímpar e injectiva, o que pode afirmar sobre o ponto $0 \in [-d,d]$? – vide **Corolário 1.3.4**.

O próximo resultado, conhecido por teorema do ponto fixo de Brouwer, permite-nos mostrar a existência de certas situações de equilíbrio em Economia, via o estudo da existência de *pontos fixos*[16].

[16] Dizemos que $x \in D_f$ é um ponto fixo de f se, e só se, é solução da equação $x = f(x)$

Teorema 2.2.8 — Teorema do ponto fixo de Brouwer. Seja f uma função contínua em $[c,d]$, satisfazendo

$$c \leq f(x) \leq d, \text{ para todo} x \in [c,d].$$

Então, **a equação de ponto fixo** $x = f(x)$ possui pelo menos uma solução $x \in [c,d]$.

O Teorema do ponto fixo de Brouwer enunciado acima admite várias demonstrações. No contexto da presente seção, iremos recorrer ao **Corolário 2.2.7** do teorema de Bolzano-Cauchy (**Teorema 2.2.6**) para ilustrar como o problema de localização de zeros de uma função contínua está correlacionado com o estudo de pontos fixos.

Ideia da demonstração. Se $f(c) = c$ ou $f(d) = d$ então a existência de pelo menos uma solução para a equação $f(x) = x$ em $[c,d]$ está assegurada. Caso contrário – i.e. $f(c) \neq c$ e $f(d) \neq d$ basta verificar que a condição

$$c \leq f(x) \leq d \text{ para todo} x \in [c,d].$$

nos assegura, em particular, que $f(c) > c$ e $f(d) < d$. Logo, a função auxiliar g definida por $g(x) = f(x) - x$ está nas condições do **Corolário 2.2.7**, uma vez que é contínua e satisfaz $g(c)g(d) < 0$.

Esta última condição é deduzida a partir de

$$\begin{aligned} g(c) &= f(c) - c > 0 \\ g(d) &= f(d) - d < 0. \end{aligned}$$

Assim, prova-se que g tem pelo menos um zero em $[c,d]$, ou equivalentemente, que a equação

$$x = f(x)$$

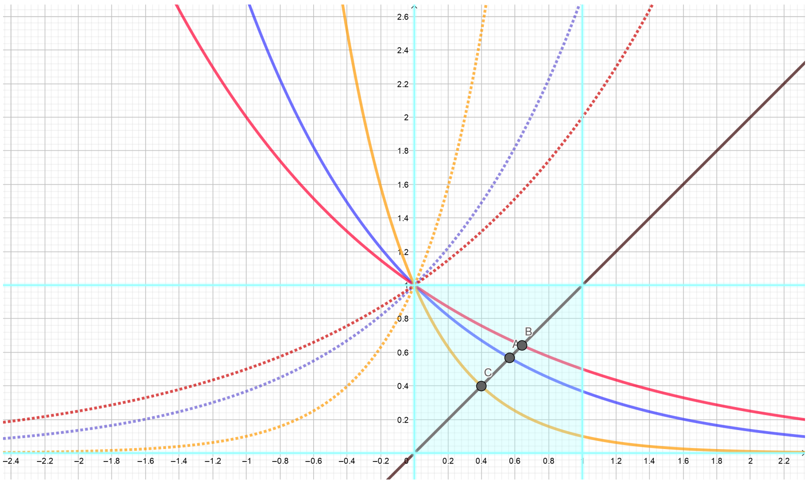
tem pelo menos uma solução em $[c,d]$. ■

✓ Graficamente, uma função contínua $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ satisfaz o **Teorema 2.2.8** se, e só se, o gráfico da função f está contido do quadrado de lado $d - c$:

$$[c,d] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \leq x \leq d \ \wedge \ c \leq y \leq d\}.$$

■ **Exemplo 2.28 — Pontos fixos envolvendo a função exponencial.** Na figura abaixo representámos a pontilhado os gráficos das funções $x \to 2^x$, $x \mapsto e^x$ & $x \mapsto 10^x$, já ilustrados na subseção **1.5.7 Função Exponencial-Potência** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**, e a cheio [com a mesma cor] a reflexão de cada um dos gráficos relativamente ao eixo Oy – vide **Definição 1.4.4**.

Adicionalmente, incluímos a reta $y = x$ (a castanho) para ilustrar os pontos fixos das funções $x \mapsto 2^{-x}$ (a magenta), $x \mapsto e^{-x}$ (a azul) & $x \mapsto 10^{-x}$ (a laranja).



Para o caso dos gráficos a pontilhado, estes situam-se sempre acima da recta $y = x$, donde se conclui que estas não admitem pontos fixos.

No entanto, para as funções da forma $x \to a^{-x}$ $(a > 1)$ – vide subseção **1.5.4 Funções Exponenciais** – admitem pontos fixos, com base nas desigualdades abaixo:

$$0 < a^{-x} \leq 1, \quad \text{para todo o} \quad x \geq 0$$

que seguem do facto do gráfico de $x \mapsto a^{-x}$ ser estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

A desigualdade acima garante-nos, em particular, que a restrição do gráfico de funções da forma $x \mapsto a^{-x}$ $(a > 1)$ ao intervalo $[0,1]$ está sempre contido no quadrado $[0,1] \times [0,1]$ (representado na figura a azul mais claro), o que nos permite aplicar o **Teorema 2.2.8**.

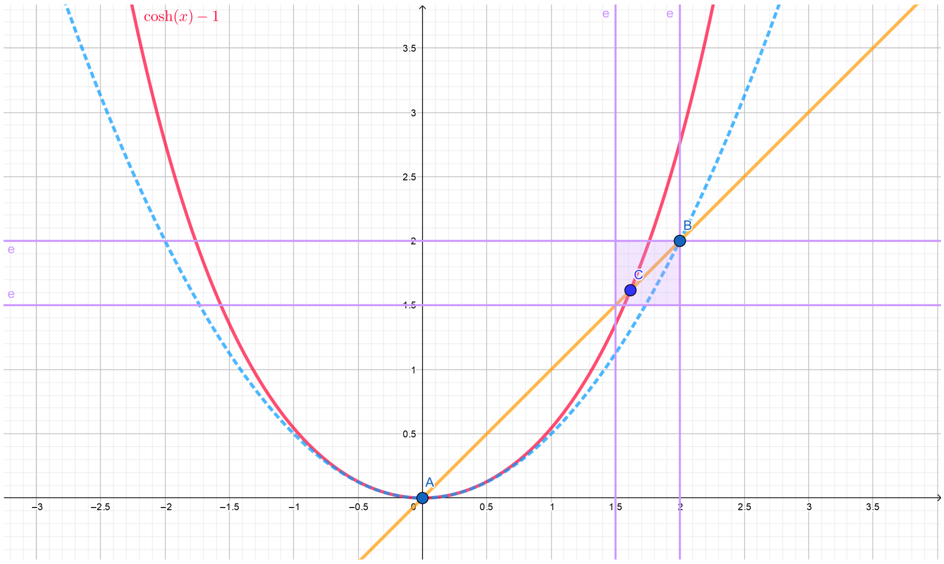
Deixamos para o leitor a verificação de que a função f definida por $f(x) = a^{-x} - x$ está nas condições do Corolário 2.2.7 no intervalo $[0,1]$, assim como justificar a razão pela qual f admite um único zero e, por conseguinte, $x \mapsto a^{-x}$ um único ponto fixo. ■

No próximo exemplo iremos ilustrar a aplicabilidade do **Teorema 2.2.8** para localizar um dos pontos fixos de uma função hiperbólicas. Estas já foram abordadas graficamente na subseção **1.5.5 Funções Hiperbólicas** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**

■ **Exemplo 2.29 — Pontos fixos envolvendo funções hiperbólicas.** Na figura abaixo ilustrámos graficamente a determinação dos pontos fixos das equações

$$x = \frac{x^2}{2} \quad \& \quad x = \cosh(x) - 1$$

representando a tracejado azul o gráfico da parábola de equação $y = \dfrac{x^2}{2}$, a magenta o gráfico da função hiperbólica $x \mapsto \cosh(x) - 1$, e a laranja o gráfico da recta $y = x$.



No caso da parábola, a determinação dos pontos fixos – $x = 0$ e $x = 2$ – é imediata pela fórmula resolvente – vide **Exemplo 1.41** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**.

No caso da função apenas nos é possível verificar algebricamente que $x = 0$ é um dos pontos fixos de $x \mapsto \cosh(x) - 1$ – vide **Exemplo 2.27**.

Graficamente, fixando o intervalo $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ é possível verificar que estamos nas condições do **Teorema 2.2.8**, uma vez que o ponto $C = (x_0, x_0)$ da nossa figura – que nos dá a solução pretendida, está contido no quadrado $I \times I$ (representado graficamente pela região a lilás).

Alternativamente, poderíamos verificar que a função auxiliar g, definida por

$$g(x) = \cosh(x) - 1 - x$$

está nas condições do **Corolário 2.2.7** no no intervalo $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ – i.e. $g\left(\frac{3}{2}\right) g(2) < 0$ – uma vez que

$$\cosh\left(\frac{3}{2}\right) - 1 < \frac{3}{2} \quad \& \quad \cosh(2) - 1 > 2,$$

pelo que a existência de $\frac{3}{2} < x_0 < 2$ satisfazendo a equação $x_0 = \cosh(x_0) - 1$ é automaticamente garantida. ■

Existência de máximos e mínimos absolutos de funções contínuas

Teorema 2.2.9 — Teorema de Weierstrass. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo fechado $[c, d] \subseteq D$. Então a função é limitada em $[c, d]$ e por conseguinte tem um máximo e um mínimo absolutos.

Embora o teorema não forneça indicações para a identificação dos extremos num problema de optimização condicionada, é indispensável na medida em que garante a sua existência sempre que a função seja contínua num intervalo fechado.

Com base nas representações gráficas ilustradas no **Exemplo 2.28** & **Exemplo 2.29**, é fácil de verificar que:

- A função $x \mapsto a^{-x}$ admite máximo e mínimo no intervalo $[0, 1]$;
- A função $x \mapsto \cosh(x) - 1$ admite máximo e mínimo no intervalo $[0, 2]$.

Com base no estudo realizado ao longo deste capítulo – em particular, a **2.2.4** & a **Definição 2.2.3** – é fácil de constatar que no caso de

$$x = c \text{ ou } x = d$$

ser(em) assímptota(s) vertical/verticais ao gráfico de f, então é impossível obter uma extensão de continuidade de f em intervalos da forma $[c,d]$, de forma a poder aplicar o **Teorema 2.2.9**.

2.3 Recursos Complementares

2.4 Exercícios Propostos

19. Calcule os seguintes limites:

(**a**) $\displaystyle\lim_{x\to a^2} \frac{\sqrt{x}-a}{x-a^2}$, $a>0$

(**b**) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

(**c**) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x/3)}$

(**d**) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sec x-1)\sin x}{x^2}$

(**e**) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^{-1/2}-2^{-1}}{x-4}$

(**f**) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

(**g**) $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$

(**h**) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}$

20. Utilizando o teorema do limite das funções enquadradas, mostre que:

(**a**) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sinh x \cos(1/x) = 0$

(**b**) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$

21. Estude a continuidade das seguintes funções definidas por:

(**a**) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

(**b**) $f(x) = \begin{cases} \ln|x-2| & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$

(**c**) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

(**d**) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{2x}}{\sinh x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

(**e**) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-|x|} & \text{se} \quad x \neq 1 \wedge x \neq -1 \\ -2 & \text{se} \quad x = 1 \vee x = -1 \end{cases}$

(**f**) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln|x-1|}{|x|-1} & \text{se} \quad x \neq 1 \wedge x \neq -1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \\ 1/2 & \text{se} \quad x = -1 \end{cases}$

22. Defina o prolongamento por continuidade, caso exista, das funções do exercício anterior.
23. Determine as assímptotas aos gráficos das seguintes funções.

(a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x} + 2x$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x+4}{x+1}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x}$

(e) $f(x) = \ln(\arctan x)$

(f) $f(x) = \exp(-x^2)$

(g) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$

(h) $f(x) = \dfrac{|x-4|+x}{(x-2)^2}$

24. Mostre que as equações apresentadas têm pelo menos uma raíz no intervalo I indicado.
    (a) $x^3 - 3x + 1 = 0, \quad I = [0,1]$
    (b) $\cos x = x, \quad I = [0, \pi/2]$
    (c) $\tan x = x + 1, \quad I =]0, \pi/2[$
25. Mostre que as seguintes equações têm pelo menos uma solução:
    (a) $x^3 = \cos x$
    (b) $1/x = \sin x$
    (c) $e^x = \tan x$

3. Derivadas e Aplicações

3.1 A derivada da função no ponto e interpretação geométrica

Para compreender a interpretação geométrica da derivada da função f no ponto x_0 é preciso saber responder à seguinte questão:

Como traçar a recta tangente ao gráfico de $f :]a,b[\subseteq D \to \mathbb{R}$ em $P = (x_0, y_0)$, sendo $x_0 \in]a,b[$?

A estratégia consiste em aproximar a recta tangente por outras rectas, as chamadas retas secantes ao gráfico de f. Consideremos então $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = f(x) - y_0$ os acréscimos nas variáveis x e y a partir de x_0 e y_0, respectivamente. Assim, temos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ dois pontos pertencentes ao gráfico de f. Se imaginarmos o ponto Q a deslocar-se sobre o gráfico de f em direcção ao ponto P, as sucessivas rectas secantes vão-se aproximando de uma posição limite que é a da tangente ao gráfico de f no ponto P. Por um lado, se $\Delta x > 0$ e aproximar-se de zero, o ponto Q está à direita de P, logo as secantes aproximam-se de uma semi-recta t_d, a que se chama semi-tangente à direita no ponto P. Por outro lado, se $\Delta x < 0$ e aproximar-se de zero, o ponto Q está à esquerda de P, logo as secantes aproximam-se de uma semi-recta t_e chamada semi-tangente à esquerda no ponto P. Esta abordagem dinâmica permite-nos averiguar a existência da recta tangente ao gráfico de f em P. Então concluímos que se as semi-tangentes t_d e t_e estão no prolongamento uma da outra então dão origem a uma recta t, tangente ao gráfico de f no ponto P. Porém, se as semi-tangentes não coincidirem então não podemos traçar a recta tangente ao gráfico no ponto P. Formalizamos em primeiro lugar o conceito de derivada de uma função num ponto.

Definição 3.1.1 — Derivada de f em x_0. Sejam $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$. Se existir, ao limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

chama-se derivada de f no ponto x_0 e representa-se por $f'(x_0)$.

A expressão $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ designa-se por razão incremental de f relativamente a x_0.

Se existir $f'(x_0)$ então pode ser finita ou infinita. Caso seja finita diz-se que f é diferenciável em x_0.

3.1.1 Estudo de existência de derivada no ponto

A aproximação a x_0 na reta real pode ser feita por dois sentidos, quer por valores de x superiores a x_0 quer por valores de x inferiores a x_0.

Definição 3.1.2 — Derivadas Laterais de f em x_0. Sejam $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$. Caso existam, os limites:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \; ; \; f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

representam a derivada à direita de f em x_0 e a derivada à esquerda de f em x_0, respectivamente.

Teorema 3.1.1 — Existência de derivada. A função f tem derivada em x_0, $f'(x_0)$, se e só se existem ambas as derivadas laterais de f em x_0 e são iguais, isto é,

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Ideia de demonstração. Atendendo a que as derivadas laterais envolvem a noção de derivadas laterais, segue que esta demonstração é análoga à demonstração do **Teorema 2.1.1** do capítulo **2 Limites e Continuidade**. ■

Esta condição necessária e suficiente para a existência de derivada de uma função num ponto é muito útil. Quando uma das duas derivadas laterais não existe ou existindo ambas são diferentes, concluímos que a função não tem derivada no ponto.

■ **Exemplo 3.1 — Derivada da função constante.** A função constante dada por $f(x) = \sqrt{2}$ é diferenciável em $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$ para todo x_0, uma vez que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

■

■ **Exemplo 3.2 — Derivadas laterais finitas e diferentes.** A função definida por $f(x) = |x-4|$ não tem derivada em $x_0 = 4$ porque as derivadas laterais são diferentes:

$$f'_+(4) = \lim_{x \to 4^+} \frac{|x-4|}{x-4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{x-4}{x-4} = 1; \tag{3.1}$$

$$f'_-(4) = \lim_{x \to 4^-} \frac{|x-4|}{x-4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{-(x-4)}{x-4} = -1. \tag{3.2}$$

■

■ **Exemplo 3.3 — Derivadas laterais infinitas.** A função f tal que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ não é diferenciável em $x_0 = 0$ apesar de ter derivada nesse ponto, porém é infinita uma vez que

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty; \tag{3.3}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty. \tag{3.4}$$

■

3.1.2 Diferenciabilidade vs Continuidade

Teorema 3.1.2 — Diferenciabilidade implica continuidade. Se f é diferenciável em x_0 então f é contínua em x_0.

Ideia de demonstração. Assumindo que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, segue pelas propriedades envolvendo limites que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

como pretendido. ■

O **Teorema 3.1.2** é equivalente a se afirmar que **toda a função descontínua num ponto não é diferenciável nesse ponto.**

Ressalvamos, com base no **Exemplo 3.2** e no **Exemplo 3.3**, que uma função pode ser contínua mas não ser diferenciável no mesmo ponto.

Outros exemplos análogos podem ser construídos com recurso a translações e transformações modulares de funções exponenciais e logaritmo:

■ **Exemplo 3.4 — Continuidade não implica diferenciabilidade.** Consideremos $a \in \mathbb{R}$ e f e g tais que $f(x) = e^{-|x-a|}$ e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 & \text{se} \quad x \leq a \\ (x-a)\ln(x-a) & \text{se} \quad x > a \end{cases}$$

É fácil de verificar f é contínua em $x_0 = a$ mas não diferenciável em $x_0 = a$.

Esta última conclusão decorre facilmente do limite notável ilustrado no **Exemplo 2.21** do capítulo **2 Limites e Continuidade** de que as derivadas laterais em $x_0 = a$ existem mas não coincidem.

De facto, fazendo a substituição $h = x - a$, obtemos

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \ , \ f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{-(-h)} = -1.$$

Por outro lado, a função g é contínua em $x_0 = a$ mas não diferenciável em $x_0 = a$.

A conclusão da continuidade segue da sequência de igualdades

$$\begin{aligned} g(a) &= 0, \\ \\ \lim_{x \to a^-} g(x) &= \lim_{x \to a^-} (x^2 - a^2) \\ &= 0, \\ \\ \lim_{x \to a^+} g(x) &= \lim_{x \to a^+} (x-a)\ln(x-a). \\ &= 0. \end{aligned}$$

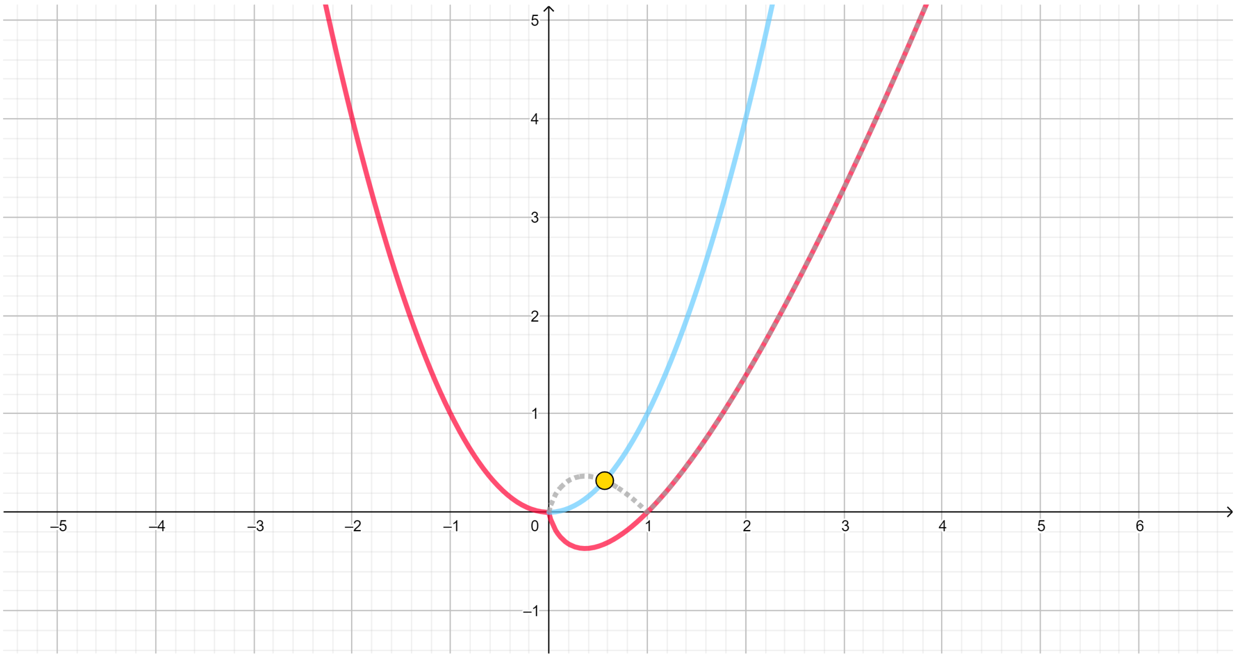


Figura 3.1: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.4** para $a = 0$. A magenta encontra-se representado a função g, e a azul ciano a parábola de equação $y = x^2$ (apenas para valores de $x > 0$). É fácil de verificar, via a representação gráfica, que $g(x) \leq x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. No entanto, se considerarmos a função modular $x \mapsto |g(x)|$, a desigualdade $|g(x)| \leq x^2$ apenas é satisfeita para valores de x em intervalos da forma $]-\infty, 0] \cup [x_0, +\infty[$. Na figura, x_0 corresponde à abcissa de (x_0, y_0) – a laranja – dada interseção entre os gráficos de $y = |g(x)|$ e $y = x^2$ $(x > 0)$. Adicionalmente, incluímos o gráfico pontilhado a cinza para ilustrar a reflexão modular de $x \mapsto |g(x)|$ no intervalo $[0, 1]$.

Para o cálculo do último limite lateral $(x \to a^+)$, podemos aplicar o **Corolário 2.1.10** do Teorema do Enquadramento – vide **Teorema 2.1.9** – com base na desigualdade[1]

$$0 < (x-a)\ln(x-a) \leq (x-a)^2, \quad \text{para todo o} \quad x > a,$$

ou alternativamente a regra de L'Hôpital – como iremos ver mais adiante.

Para verificar que f não é diferenciável em $x_0 = a$, bastaria verificar, com recurso ao gráfico da função $x \mapsto \ln(x)$ – vide **Exemplo 2.10** do capítulo **2 Limites e Continuidade** – que $g'(a)$ não pode ser determinada, uma vez que o gráfico de $x \mapsto g'(x)$ exibe uma assímptota vertical de equação $x = a$. Esta conclusão segue do cálculo de $g'_+(a)$:

$$\begin{aligned} g'_+(a) &= \lim_{x \to a^+} \frac{(x-a)\ln(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a^+} \ln(x-a) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

■

Desafio 3.1 — Revisão dos Teoremas de Bolzano e Weierstrass. Diga, justificando em qual dos intervalos abaixo:

[1] É fácil de verificar graficamente que o gráfico de $y = \ln(x)$ se situa sempre abaixo do gráfico de $y = x^2$, para valores de $x > 0$. Fazendo uma translação na horizontal de ambos os gráficos, obtemos a desigualdade $\ln(x-a) \leq (x-a)^2$, para todo o $x > a$.

$$[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}] \text{ ou } [\tfrac{3}{4},1]$$

a equação

$$x^2 = x\ln(x)$$

admite uma solução. De seguida, justifique que a solução é unica.

■ **Exemplo 3.5 — Descontinuidade implica não-diferenciabilidade.** A função

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) & \text{se} \quad x \neq -\sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{6} & \text{se} \quad x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

é descontínua num ponto.

Observe que temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\sqrt{3}} f(x) &= \lim_{x\to-\sqrt{3}} \overbrace{\arctan(x)}^{\text{é contínua}} \\ &= \arctan(-\sqrt{3}) \\ &= -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

e $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$.

Deste modo podemos imediatamente concluir que f não é diferenciável em $x_0 = -\sqrt{3}$. ■

Desafio 3.2 — Vide Exemplo 2.12. Determine para que valores de L a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsec}(x) & \text{se} \quad x \neq -2 \\ L & \text{se} \quad x = -2 \end{cases}$$

não é diferenciável em $x_0 = -2$.

3.1.3 Interpretação geométrica do conceito de derivada

Para interpretar geometricamente o conceito de derivada de uma função f num ponto x_0, comecemos por observar a dicotomia entre a noção de diferenciabilidade de f em em x_0 e a equação da recta tangente, dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Primeiramente, observe que a noção de diferenciabilidade introduzida via **Definição 3.1.1** permite-nos obter a equivalência

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = 0 \iff \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Segue então pela **unicidade do limite** –vide **Teorema 2.1.2** do **Capítulo 2 Limites e Continuidade** – que a recta afim

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

de declive m e ordenada na origem $b = y_0 - mx_0$ que satisfaz a condição de limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-y_0-m(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

é precisamente a recta de equação

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Adicionalmente, tomando $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ segue para $y = f(x)$ que a razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é o declive da recta [secante] ao gráfico de f que passa pelos pontos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, pelo que não é surpreendente afirmar que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é precisamente o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, f(x_0))$. Assim sendo, é fácil escrever a equação dessa recta sabendo que tem declive $m = f'(x_0)$ e passa pelo ponto de tangência $P = (x_0, f(x_0))$.

✓ Note que a equação da recta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ é uma recta não-vertical. No caso em que as derivadas laterais de f são infinitas em x_0 então a recta tangente é vertical e tem equação $x = x_0$. Esta corresponde essencialmente a uma **assímptota vertical ao gráfico da função derivada $x \mapsto f'(x)$.**

Notação 3.1 — Notação de Leibniz para derivada. É também comum adoptar a notação de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

para descrever $f'(x)$ como o limite infinitesimal ($\Delta x \to 0$) da razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Suponhamos agora que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 = a$ ou $x_0 = b$. Nestes casos particulares, introduzimos a seguinte definição de derivada de f nesses pontos:

Definição 3.1.3 — Derivação em intervalos fechados. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 = a$ ou $x_0 = b$. Se existirem os limites,

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ f'_-(a) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x} \end{aligned}$$

temos $f'(a) = f'_+(a)$ e $f'(b) = f'_-(b)$.

■ **Exemplo 3.6 — Derivada da função raiz quadrada..** Consideremos $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Notemos que $D_f = [-1,1]$. Adicionalmente, temos que não é diferenciável em $x = \pm 1$, dado que[2]

$$f'_+(-1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-(\Delta x)^2}}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{|\Delta x|} - 1} = +\infty$$

e

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-(\Delta x)^2}}{-|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \to 0^+} -\sqrt{\frac{1}{|\Delta x|} - 1} = -\infty.$$

■

3.2 Derivadas de funções elementares

[2]No cálculo dos limites, usámos as igualdades $|\Delta x| = \Delta x$ ($\Delta x > 0$), $|\Delta x| = -\Delta x$ ($\Delta x < 0$) & $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x)^2}$.

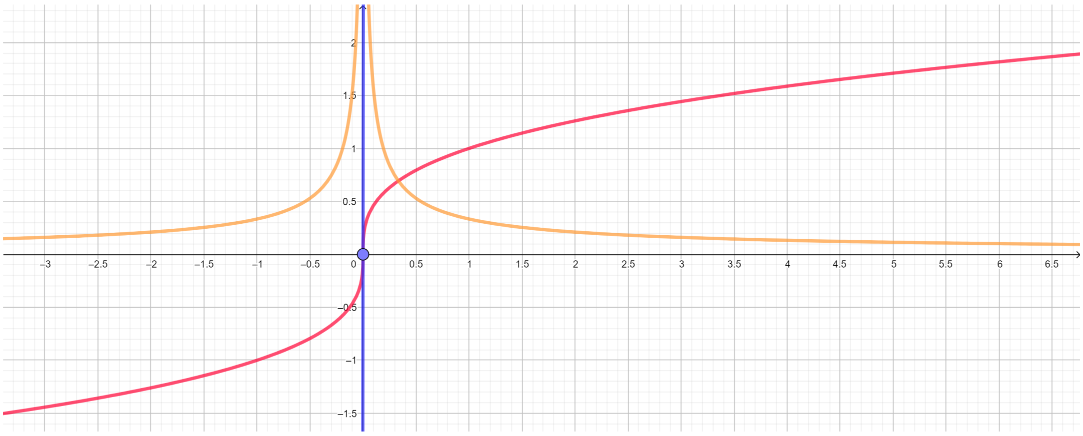


Figura 3.2: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.3**. A magenta encontra-se representado a função $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, a laranja a função derivada ($x \mapsto \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$) calculada a partir do limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$, e a azul a assímptota vertical (eixo Oy) ao gráfico da função derivada.

Definição 3.2.1 — Função Derivada de ordem 1. Sejam f uma função de domínio D_f e $A \subseteq D_f$. Diz-se que f é diferenciável em A se tem derivada finita em todos os pontos de A. Definimos a função primeira derivada através de $x \mapsto y = f'(x)$, onde $A = \{x \in D_f : f'(x) \in \mathbb{R}\}$.

É evidente que:

- A **derivada da função constante**, $x \mapsto f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$ é a função nula dada por $f'(x) = 0$.
- A **derivada da função identidade**, $x \mapsto i(x) = x$, é a função constante dada por $i'(x) = x' = 1$.

Usando a Definição obtemos respectivamente

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0;$$

$$i'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, logo ambas as funções são diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

Notação 3.2 — Diferenciabilidade vs. função derivada. Sempre que nos referimos à diferenciabilidade de f em x_0, iremos recorrer às notações

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ou

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

No caso de pretendermos definir a função derivada $x \mapsto f'(x)$, iremos recorrer à notação

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

sempre que pretendemos definir a função derivada via o limite da razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, sendo

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Este tipo de nomenclatura para a notação de derivada é muito útil para obter, em particular, modelações matemáticas envolvendo quantidades económicas como são o custo marginal e a função de elastiscidade, como iremos abordar mais à frente na seção **3.8 Aplicações: Taxas de Variação em Economia**.

3.2.1 Operações envolvendo derivadas

Teorema 3.2.1 — Linearidade da derivada. Se f e g são diferenciáveis em x, então:

i) **Derivada da Soma:** a função $f+g$ é diferenciável em x e

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

ii) **Derivada do produto duma constante por uma função:** se $k \in \mathbb{R}$ é uma constante então a função produto kf é diferenciável em x e

$$[kf(x)]' = kf'(x).$$

■ **Exemplo 3.7** Consideremos a função afim $f, x \mapsto f(x) = mx+b$, com $m \in \mathbf{R}$ e $b \in \mathbf{R}$ constantes. Vejamos que é uma função diferenciável em $\mathbf{R}$ e

$$f'(x) = (mx+b)' = (mx)' + (b)' = mx' + 0 = m$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. ■

Teorema 3.2.2 — Regras de derivação. Sejam f e g duas funções diferenciáveis em x. Então:

i) **Derivada do Produto:** a função fg é diferenciável em x e

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ii) **Derivada do Quociente:** se $g(x) \neq 0$, a função f/g é diferenciável em x e

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Em particular, da alínea ii) segue que a derivada da função recíproca de g é dada por

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{(1)'g(x) - g'(x)}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

■ **Exemplo 3.8 — Derivada da função potência.** Seja $m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$. Consideremos a função potência de expoente inteiro definida por $g_m(x) = x^m$.
Se $m > 1$ então usando a Definição vem

$$\begin{aligned}
(x^m)' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x^m + mhx^{m-1} + \frac{m!}{2!(m-2)!}h^2x^{m-2} + \ldots + mh^{m-1}x + h^m) - x^m}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (mx^{m-1} + \frac{m!}{2!(m-2)!}hx^{m-2} + \ldots + mh^{m-2}x + h^{m-1}) \\
&= mx^{m-1}
\end{aligned}$$

Se $m < 0$ então $m = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Usando a regra da derivada da função recíproca vem

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

para $x \neq 0$ ■

Desafio 3.3 — Falha na regra de derivação. A função

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|},$$

já abordada no **Exemplo 1.44** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**, pode ser expressa como quociente entre funções, sendo que a função em denominador $(x \mapsto |x|+1)$ não é diferenciável [em 0].

Averigue se esta é diferenciável em todos os pontos do seu domínio e, em caso afirmativo, calcule a sua derivada.

O que pode concluir sobre a regra $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ no caso de pelo menos menos uma das funções ser diferenciável?

3.2.2 Derivadas da função composta e da função inversa

Derivada da função composta

Teorema 3.2.3 — Derivada da Função Composta. Se g é diferenciável em $x \in D_g$ e g é diferenciável em $g(x) \in D_f$ então $f \circ g$ é diferenciável em x e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Derivada da função inversa

Antes de introduzirmos a derivada da função inversa, consideremos o seguinte problema geométrico, análogo ao estudado no **Exemplo 1.3** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**.

■ **Exemplo 3.9 — Tangente à circunferência.** Para a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ – vide **Exemplo 1.9** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** – é possível verificar que as curvas de equações $y = \sqrt{1-x^2}$ $(y \geq 0)$ e $y = -\sqrt{1-x^2}$ definem gráficos de funções.

Por outro lado, assumindo que $y = f(x)$ na equação da circunferência – estamos apenas a assumir que é possível definir y como função de x – obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + f(x)^2 = 1 \quad &\Longrightarrow \quad (x^2 + f(x)^2)' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x + 2f'(x)f(x) = 0. \end{aligned}$$

Desta última equação segue que $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ é igual a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \text{para} \quad y = f(x),$$

desde que $y \neq 0$.

Em particular, podemos concluir que para $x = \pm 1$ não é possível determinar $f'(-1)$ e $f'(1)$ para ambas as funções, indo ao encontro do que já tinha sido verificado no **Exemplo 3.6** via limites laterais.

Em concreto, para $y = f(x)$, é possível concluir, com base no cálculo dos limites laterais[3]

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x \to a^+} \left(-\frac{x}{f(x)} \right) \\ f'_-(a) &= \lim_{x \to a^-} \left(-\frac{x}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

que $f'_+(-1)$ e $f'_-(1)$ dão infinito. Daqui se retira que

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1$$

definem assímpotas verticais aos gráficos de ambas as funções. ■

Teorema 3.2.4 — Derivada da Função Inversa. Suponha que $f : D \to D'$ tem inversa, i.e.,

$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)$$

para todo $x \in D'$ e para todo $y \in D$.
Se f é diferenciável em y e $f'(y) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em x e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Demonstração usando o Teorema 3.2.3. Note-se que a função $g = f^{-1}$ está nas condições do **Teorema 3.2.3**.

Logo,

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x).$$

Por outro lado, substituindo $g = f^{-1}$ no item **(ii)** da **Definição 1.4.5** – vide subseção **1.4.5** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráfico**– segue que

$$(f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Desta última igualdade, retiramos que a equação anterior é equivalente a

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x).$$

Finalmente, da hipótese $f'(y) \neq 0$ conclui-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

como pretendido. ■

Em alternativa, apresentamos outra prova.

Demonstração usando a notação de Leibniz. Suponhamos, com base na equivalência

$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)$$

que

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

[3]Note que embora não seja possível calcular $f'(-1)$ e $f'(1)$ com base na fórmula $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$, é possível determinar $f'_+(-1)$ e $f'_-(-1)$

define $f'(y)$ – derivada de f em função da variável y.

Para mostrarmos que $(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx}$ existe, observe, com base no **Teorema 3.1.2**, que $y \mapsto f(y)$ é uma função contínua em D'.

Em particular, para $\Delta x := f(y+\Delta y) - f(y)$, obtemos

$$\lim_{\Delta y \to 0} f(y+\Delta y) = f(y) \iff \lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$$

Desta última equivalência segue que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

pode ser reescrito como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Finalmente, com base nas propriedades dos limites enunciadas no **Teorema 2.1.8** do capítulo **2 Limites e Continuidade**, concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

desde que $f'(y) = \frac{dx}{dy} \neq 0$. ■

✓ A última demonstração do **Teorema 3.2.4** permite-nos facilmente concluir para o caso da representação da equação $x = \sqrt{1-y^2}$ no primeiro quadrante de xOy, com excepção do ponto $(1,0)$ que

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Portanto, para $y = \sqrt{1-x^2}$ obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

é a derivada da função $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$, para $0 \leq x < 1$.

■ **Exemplo 3.10 — Função cúbica do Exemplo 1.45.** A função cúbica $x \mapsto p_3(x) = x^3 + 27$ admite inversa pois é monótona crescente. É fácil de averiguar que

$$y = 27x + 81$$

nos dá a equação da recta tangente ao gráfico de p_3 no ponto $(-3,0)$.

Adicionalmente, aplicando apenas o **Teorema 3.2.4**, podemos verificar que o declive da recta tangente do gráfico de $(p_3)^{-1}$ em $(0,-3)$ é dado pela sequência de igualdades

$$((p_3)^{-1})'(0) = \frac{1}{p_3'(-3)} = \frac{1}{27}.$$

Portanto, $y = -3 + \frac{1}{27}x$ dá-nos a equação da recta tangente ao gráfico de $(p_3)^{-1}$ em $(0,-3)$. ■

Na prática, recorremos ao seguinte resultado para determinar a equação da recta tangente ao gráfico de f^{-1}.

Corolário 3.2.5 — Equação da recta tangente ao gráfico de f^{-1}. Seja (x_0,y_0) um ponto do gráfico de f, e f uma função invertível e diferenciável que satisfaz a condição $f'(x_0)\neq 0$. Então
$$y = x_0 + \frac{1}{f'(x_0)}(x-y_0)$$
dá-nos a equação da recta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto (y_0,x_0).

✓ Já tínhamos visto na subseção **1.4.5** do capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos que se (x_0,y_0) é ponto do gráfico de f:
$$(x_0, f(x_0)) = (x_0,y_0)$$
e f é invertível, então (y_0,x_0) é um ponto do gráfico de f^{-1}:
$$(y_0, f^{-1}(y_0)) = (y_0,x_0).$$
Com o **Corolário 1.4.5** acrescentámos que podemos calcular a recta tangente ao gráfico de f^{-1}, a partir da equação da recta tangente ao gráfico de f – i.e. sem precisar de calcular f^{-1}.

Desafio 3.4 — Equações das rectas tangente e normal. Determine a equação da recta tangente à circunferência $x^2+y^2=1$ em pontos da forma
$$(x_0,y_0) = (\cos(\theta),\sin(\theta)) \quad (\pi<\theta<2\pi)$$
via a equação
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$
De seguida, use o que aprendeu na subsecção **1.1.2 Rectas: equações de rectas** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** para determinar a recta normal ao gráfico da circunferência (x_0,y_0). Note que, por definição a recta normal ao gráfico em P é uma recta perpendicular à recta tangente que passa por P.

Qual a relação entre a recta normal ao gráfico da circunferência e a derivada da função inversa?

3.2.3 Derivadas de potências

■ **Exemplo 3.11 — Função Radical.** Seja $n\in\mathbb{N}$ e $n\neq 1$. Consideremos a função radical de índice n definida por $g_n(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.
Reparemos que se n é ímpar então $D = D' = \mathbb{R}$, mas se n é par então $D = D' = [0,+\infty[$. Em ambos os casos, g_n é injectiva, logo tem inversa. A sua inversa, $(g_n)^{-1}$, verifica
$$y = \sqrt[n]{x} \Longleftrightarrow x = y^n$$
para todo $x\in D$ e para todo $y\in D'$. Aplicando o teorema vem
$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$
desde que $x\neq 0$. De seguida, mostramos que g_n não é diferenciável em $x_0=0$. De facto, pela definição obtemos
$$(g_n)'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt[n]{\Delta x}-0}{h\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\Delta x^{1-1/n}} = +\infty \quad ; (g_n)'_-(0) = -\infty$$
Assim, concluímos que g_n é diferenciável em $\mathbb{R}-\{0\}$. ■

■ **Exemplo 3.12 — Função Potência.** Seja $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$ e $n \neq 1$. Consideremos a função potência de expoente racional definida por $h_{m,n}(x) = x^{m/n}$.
Observe que $h_{m,n}$ pode ser escrita na forma de função composta. Tomando $f_m(x) = x^m$ e $g_n(x) = x^{1/n}$ temos

$$h_{m,n}(x) = (f_m \circ g_n)(x)$$

Usando o **Teorema 3.2.3** obtemos

$$\begin{aligned} h'_{m,n}(x) &= m(x^{1/n})^{m-1}\frac{1}{n}x^{1/n-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{(m-1)/n+1/n-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{m/n-1} \end{aligned}$$

■

3.2.4 Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

Teorema 3.2.6 — Derivadas de funções exponenciais. A função exponencial de base a, $a > 0$ e $a \neq 1$, definida por $f(x) = a^x$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(a^x)' = (\ln a)a^x.$$

Demonstração usando limite notável do **Exemplo 2.21**. Consideremos $x \mapsto y = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Comecemos por determinar a sua derivada pela definição

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \end{aligned}$$

Usando o **Teorema 3.2.3** vem

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (x \ln a)' e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$$

■

Desafio 3.5 Para as funções hiperbólicas introduzidas na subseção **1.5.5 Funções Hiperbólicas** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** satisfazem as seguintes regras de derivação:

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad ; \quad (\cosh x)' = \sinh x.$$

De seguida use as regras de derivação acima deduzidas para calcular a derivada das funções

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \text{e} \quad \mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

usando a 'derivada do quociente' – vide **Teorema 3.2.2**.

Teorema 3.2.7 — Derivadas de funções logarítmicas. A função logarítmica de base a, $a > 0$ e $a \neq 1$, definida por $\log_a |x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

Demonstração. Por definição, temos

$$y = \ln x \Longleftrightarrow x = e^y$$

para todo $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Recorrendo ao **Teorema 3.2.4** vem

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

para $x > 0$. Utilizando a fórmula de mudança de base

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \left(\frac{1}{\ln a}\right) \ln x$$

obtemos

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\right)(\ln x)' = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

para $x > 0$. A demonstração para $x < 0$ deixamos a cargo do leitor. ∎

Teorema 3.2.8 — Derivada da função exponencial-potência. Se f e g são diferenciáveis em x e $f(x) > 0$ então a função exponencial-potência, $x \mapsto h(x) = [f(x)]^{g(x)}$, é diferenciável em x e

$$h'(x) = \left[g'(x) f(x) \ln(f(x)) + g(x) f'(x)\right] [f(x)]^{g(x)-1}$$

Com efeito, consideremos

$$\ln(h(x)) = g(x) \ln(f(x))$$

Derivando membro a membro vem

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ou seja, substituindo $h(x)$ temos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right] h(x) \\ &= \left[g'(x) f(x) \ln(f(x)) + g(x) f'(x)\right] [f(x)]^{g(x)-1} \end{aligned}$$

✓ A regra de derivação acima diz-nos essencialmente que, escrevendo a função exponencial potência $f(x)^{g(x)}$ na forma

$$f(x)^{g(x)} = e^{u(x)}, \quad \text{com} \quad u(x) = g(x) \ln(f(x))$$

então

$$(f(x)^{g(x)})' = u'(x) f(x)^{g(x)}.$$

Notação 3.3 — Derivada logarítmica. À derivada $\dfrac{h'(x)}{h(x)}$ associada à logaritmização da função potência:

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)} \quad \xrightarrow{u(x)=\ln(h(x))} \quad u(x) = g(x)\ln(f(x))$$

designamos por derivada logarítmica. O nome desta derivada advém da regra de derivação

$$(\ln|h(x)|)' = \frac{h'(x)}{h(x)}.$$

Desafio 3.6 — Aplicabilidade da derivada logarítmica. Calcule a a derivada de $\dfrac{\sqrt[7]{x^2-16}}{x^2+1}$ usando as seguintes regras de derivação:

1. Via 'derivada do quociente';
2. Via derivada logarítmica.

Em qual dos processos o cálculo de derivação lhe pareceu mais eficiente?

3.2.5 Derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas

As derivadas das funções trigonométricas seno e cosseno podem ser deduzidas via a definição de derivada, combinando o limite notável do **Exemplo 2.20** do Capítulo **2 Limites e Continuidade**:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

com as regras de adição/subtração:

$$\begin{aligned} \sin(x+\Delta x) &= \sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) \\ \cos(x+\Delta x) &= \cos(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)\sin(\Delta x). \end{aligned}$$

A técnica de demonstração é análoga à técnica de cálculo de limite utilizada no **Exemplo 2.22** do **Capítulo 2 Limites e Continuidade**.

Para as restantes funções trigonométricas, poderemos aplicar directamente a regra de derivção da função quociente – vide **Teorema 3.2.2**.

Corolário 3.2.9 — Derivadas de Funções Trigonométricas.

A função seno é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(\sin x)' = \cos x.$$

- A função cosseno é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

- A função tangente é diferenciável em $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e

$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

- A função cotangente é diferenciável em $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e

$$(\text{cotg}\, x)' = -\text{cosec}^2 x.$$

- A função secante é diferenciável em $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e

$$(\sec x)' = \sec x \tan x.$$

- A função cossecante é diferenciável em $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x.$$

Por seu turno, as derivadas das funções trigonométricas inversas, decorrem naturalmente da combinação do **Teorema 3.2.4** e das fórmulas de trigonometria

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad \text{e} \quad \tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta).$$

Corolário 3.2.10 — Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas.
A função arco seno é diferenciável em $]-1,1[$ e

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- A função arco cosseno é diferenciável em $]-1,1[$ e

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- A função arco tangente é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Derivada da função arco seno. A função arco seno satisfaz

$$y = \arcsin x \Longleftrightarrow x = \sin y$$

para $x \in [-1,1]$ e $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Aplicando o teorema da derivada da função inversa vem

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

desde que $\arcsin x \neq -\frac{\pi}{2}$ e $\arcsin x \neq \frac{\pi}{2}$. Tendo em conta o exercício proposto 14 segue que

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

Logo,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

desde que $x \neq -1$ e $x \neq 1$.

■

Derivada da função arco cosseno. A função arco cosseno satisfaz

$$y = \arccos x \Longleftrightarrow x = \cos y$$

para $x \in [-1,1]$ e $y \in [0,\pi]$. Pelo teorema da derivada da função inversa segue que

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}$$

desde que $\arccos x \neq 0$ and $\arccos x \neq \pi$. Simplificando a função composta obtemos

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Assim,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

desde que $x \neq -1$ e $x \neq 1$.

■

Derivada da função arco tangente. A função arco tangente satisfaz

$$y = \arctan x \Longleftrightarrow x = \tan y$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Recorrendo ao teorema da derivada da função inversa vem

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}$$

Atendendo a que

$$\sec^2(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2$$

obtemos

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

3.2.6 Tabela de derivadas

A tabela de derivadas ilustrada abaixo pode ser facilmente deduzida via a regra de derivação da função composta – vide **Teorema 3.2.3**. Em alguns dos casos, foi combinado a derivação da função composta com a da função inversa – vide **Teorema 3.2.4**.

Tabela 3.1: Regras de Derivação Generalizadas

$f(x)$	$f'(x)$
$[u(x)]^p$	$p[u(x)]^{p-1}u'(x)$
$\log_a \mid u(x) \mid$	$\frac{1}{\ln a}\frac{u'(x)}{u(x)}$
$a^{u(x)}$	$u'(x)a^{u(x)}\ln a$
$\sinh(u(x))$	$u'(x)\cosh(u(x))$
$\cosh(u(x))$	$u'(x)\sinh(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\text{tg}\,(u(x))$	$u'(x)\sec^2(u(x))$
$\text{cotg}\,(u(x))$	$-u'(x)\text{cosec}^2(u(x))$
$\sec(u(x))$	$u'(x)\sec(u(x))\,\text{tg}\,(u(x))$
$\text{cosec}\,(u(x))$	$-u'(x)\text{cosec}\,(u(x))\,\text{cotg}\,(u(x))$
$\arcsin(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arccos(u(x))$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\text{arctg}\,(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

3.3 Funções regulares

3.3.1 Teoremas de Rolle e Lagrange

Definição 3.3.1 — Função regular num intervalo fechado. Diz-se que f é regular em $[a,b]$ se

(i) f é contínua em $[a,b]$;

(ii) f é diferenciável pelo menos em $]a,b[$.

Teorema 3.3.1 — Teorema de Rolle. Seja f uma função regular em $[a,b]$. Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um $x_0 \in]a,b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Nas condições do teorema de Rolle, a recta t tangente ao gráfico de f no ponto $T = (x_0, f(x_0))$ é horizontal.

Teorema 3.3.2 — Teorema de Lagrange. Se f é uma função regular em $[a,b]$, então existe pelo menos um $x_0 \in]a,b[$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Recordemos que $m_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ representa o declive da recta s, secante ao gráfico que passa pelos pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$. Em conseguência da regularidade da função é possível traçar a recta t, tangente ao gráfico de f em qualquer ponto de abcissa x_0, $T = (x_0, f(x_0))$, sendo o seu declive dado por $m_2 = f'(x_0)$. O teorema garante a existência dum ponto T, para o qual as rectas s e t são paralelas, ou seja, os seus declives m_1 e m_2 coincidem, i.e, $m_1 = m_2$.

Desafio 3.7 Diga, justificando, se posso aplicar o **Teorema 3.3.2** à função $x \to \sqrt[3]{x^2}$ nos intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ e $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Os próximos dois resultados serão aplicados recorrentemente no capítulo **4 Primitivação** quando realizarmos o cálculo de primitivas.

Corolário 3.3.3 — Derivada da função constante. Seja f uma função regular em $[a,b]$. Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$, então f é constante em $[a,b]$.

Corolário 3.3.4 — Derivadas vs Primitivas. Sejam f e g funções regulares em $[a,b]$. Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in]a,b[$, então $f - g$ é constante em $[a,b]$.

■ **Exemplo 3.13 — Relação entre arco seno e arco cosseno.** Sabemos que

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)'$$

para todo o $x \in]-1,1[$. Pelo corolário anterior, h definida por

$$h(x) = \arcsin x + \arccos x$$

é constante em $[-1,1]$. Calculando, por exemplo, $h(0) = \frac{\pi}{2}$, concluímos que

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

para todo o $x \in [-1,1]$. ■

Corolário 3.3.5 Sejam f e g funções regulares em $[a,b]$. Se existem os limites $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f'(x)$, então

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x) \quad ; \quad f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} f'(x)$$

3.3.2 Funções Monótonas

Teorema 3.3.6 — Relação entre o sinal da 1ª derivada e a monotonia da função. Seja f uma função regular em $[a,b]$.
i) Se $f'(x) > 0$ em $]a,b[$ então f é estritamente crescente em $[a,b]$.
ii) Se $f'(x) < 0$ em $]a,b[$ então f é estritamente decrescente em $[a,b]$.

Demonstração. Sejam $x_1 \in [a,b]$ e $x_2 \in [a,b]$ tais que $x_1 < x_2$, arbitrários. Pelo teorema de Lagrange, existe pelo menos um $x_0 \in]x_1,x_2[$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Por hipótese, se $f'(x_0) > 0$, então $f(x_2) > f(x_1)$, ou seja, f é estritamente crescente em $[a,b]$. Caso contrário, se $f'(x_0) < 0$, então $f(x_2) < f(x_1)$, ou seja, f é estritamente decrescente em $[a,b]$. ■

Desafio 3.8 — Monotonia de funções exponenciais e logarítmicas. Verifique que as funções, tais que $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ para $a > 0$ e $a \neq 1$, são estritamente monótonas.

■ **Exemplo 3.14 — Monotonia de Funções Trigonométricas Inversas.**

- A função arco seno, $x \mapsto f(x) = \arcsin x$, é estritamente crescente em $[-1,1]$ pois

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

para todo $x \in]-1,1[$ e $f'_+(-1) = f'_-(1) = +\infty$.

- A função arco cosseno, $x \mapsto g(x) = \arccos x$, é estritamente decrescente em $[-1,1]$ pois
$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$$
para todo $x \in]-1,1[$ e $g'_+(-1) = g'_-(1) = -\infty$.
- A função arco tangente, $x \mapsto h(x) = \arctan x$, é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e
$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

3.3.3 Aproximação linear e diferencial de uma função

Diferenciabilidade vs aproximação linear

Definição 3.3.2 — Aproximação linear de uma função regular. Sejam f uma função regular em $I =]x_0-\delta, x_0+\delta[$, em que $\delta > 0$ e $I \subset D_f$. Diz-se que a função L definida por
$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$
para todo $x \in I$, é a aproximação linear de f em x_0.

Geometricamente, o gráfico de $y = L(x)$ corresponde à equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, f(x_0))$, discutida ao longo da subseção **3.1.3 Interpretação geométrica do conceito de derivada**.

Denotando por $E(x) = f(x) - L(x)$ o **erro de aproximação linear**, segue pela condição de diferenciabilidade deduzida também na secção supramencionada:
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = 0 \iff \lim_{x\to x_0}\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}^{=E(x)}}{x-x_0} = 0.$$
que toda a função regular f em $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ pode ser representada na forma
$$f(x) = L(x) + E(x), \quad \text{com} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{E(x)}{x-x_0} = 0.$$

Diferencial de uma função

Definição 3.3.3 Suponhamos que f, tal que $y = f(x)$, é diferenciável em x_0 e o acréscimo de x, Δx, é suficientemente pequeno. O diferencial de f em x_0 relativamente a Δx é definido por
$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

O diferencial é a medida da variação da direcção da tangente quando x sofre um acréscimo desde x_0 até $x = x_0 + \Delta x$.

Notação 3.4 — Diferencial de $y = f(x)$. O diferencial de uma função f tal que $y = f(x)$ é denotado por
$$dy = f'(x)dx.$$

Desta forma, o quociente $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ pode ser realmente interpretado como uma derivada, como já tínhamos mencionado anteriormente ao introduzir a **Notação 3.1** e a **Notação 3.2**.

Essencialmente, para definirmos dy em x_0, estamos a assumir que o diferencial de $y = f(x) = x$ em x_0 – $dx = \Delta x$ – dá-nos a variação de x no eixo das abscissas.

Exemplo 3.15 — Diferencial da função potência. Para a função potência do **Exemplo 3.8**, segue desenvolvimento em binómio de Newton:

$$(x+\Delta x)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} x^{m-j}(\Delta x)^j$$

segue que

$$\begin{aligned}
(x+\Delta x)^m - x^m &= \sum_{j=1}^{n} \binom{m}{j} x^{m-j}(\Delta x)^j \\
&= \underbrace{mx^{m-1}\Delta x}_{\text{diferencial } dy=f'(x)\Delta x} + \\
&+ \underbrace{\frac{m!}{2!(m-2)!}x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{m!}{2!(m-2)!}x^2(\Delta x)^{m-2} + m(\Delta x)^{m-1}x}_{\text{erro de aproximação linear}}.
\end{aligned}$$

Desta última fórmula podemos retirar que:

- Para $f(x) = x^m$, tem-se $dy = mx^{m-1}dx$ ($\Delta x \to dx$);
- $(x+\Delta x)^m \approx x^m + mx^{m-1}\Delta x$.

■

Teorema 3.3.7 — Regra de Aproximação Incremental de f em torno de x_0. Suponhamos que f é diferenciável em x_0 e o acréscimo de x, Δx, é suficientemente pequeno. Então

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Note-se que esta regra resulta de

$$\Delta y \approx dy \Longleftrightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Podemos dizer agora que **aproximação linear de uma função** consiste em aproximar $\Delta f(x_0)$ (variação de f em x_0) pela diferencial de f em x_0 ($df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$).

Exemplos de Aproximação Linear

Exemplo 3.16 — vide também Exemplo 2.21 do capítulo 2 Limites e Continuidade. Seja f definida por $f(x) = e^x - 1$. A equação da recta tangente ao gráfico de f em $P = (0,0)$ é $y = x$, logo $L(x) = x$.

Na tabela indicada no exemplo encontra-se representado o cálculo do valor aproximado de f, usando aproximação linear, para diferentes valores de Δx.

■

Tabela 3.2: Valores Numéricos

$x_0+\Delta x$	Δy	$L(x_0+\Delta x)$	$\Delta y - L(x_0+\Delta x)$
1.3	2.6693	1.3	1.3693
1	1.71828	1	0.71828
0.4	0.491825	0.4	0.091825
0.1	0.105171	0.1	0.005171
0.01	0.0100502	0.01	0.0000502
0.001	0.0010005	0.001	0.0000005

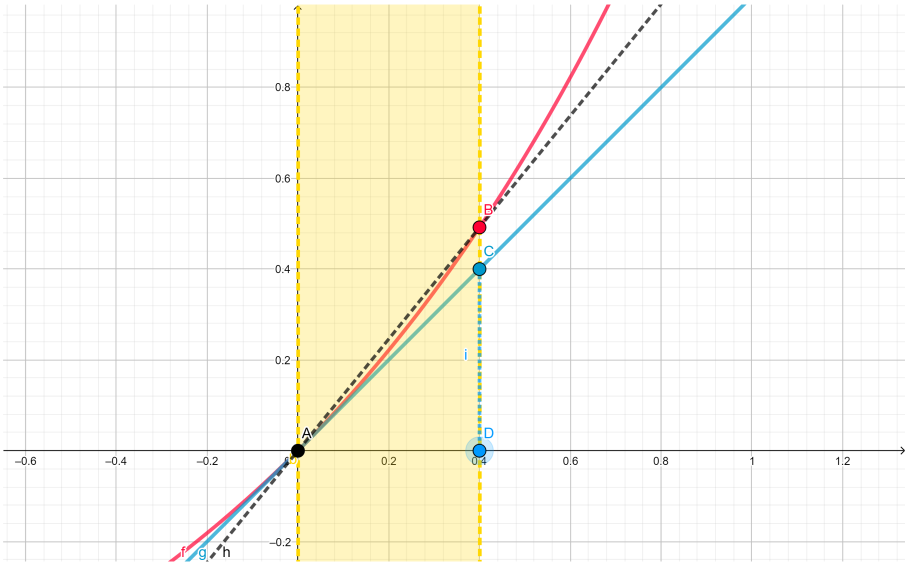


Figura 3.3: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.16** para $x_0 = 0$ e $\Delta x = 0.4$. A magenta encontra-se representado o gráfico da função f definida por $f(x) = e^x - 1$, e a azul ciano a recta tangente ao gráfico em $(x_0, y_0) = (0,0)$ – $y = x$. A tracejado foi representado a recta secante, de declive $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, com $\Delta x = 0.4$ e $\Delta y = f(0.4) - f(0)$. Sendo $f'(0) = 1$ o declive da recta tangente em $(x_0, y_0) = (0,0)$, tem-se que o diferencial de f em $x_0 = 0$ – $dy = f'(x_0)\Delta x$ – corresponde à altura do triângulo rectângulo formado pelos vértices A, C e D da figura (linha a pontilhado a azul ciano que une os vértices C e D). Por seu turno, $f(x_0+\Delta x) - L(x_0) = \Delta y - dy$ – erro de aproximação linear – pode ser medido via o comprimento do segmento de recta que une os vértices B e C da figura.

■ **Exemplo 3.17 — Aproximação linear de raizes quadradas.** Para a função f definida por $f(x) = \sqrt{x+8}$, sabemos que o seu gráfico passa pelo ponto $(1,3)$, uma vez que conhecemos o valor exacto de $f(1)$ [$\sqrt{9} = 3$].

Da derivação de f:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}}$$

obtemos $f'(1) = \frac{1}{6}$.

Logo,

$$\begin{aligned} f(1+\Delta x) &\approx f(1) + f'(1)\Delta x \\ &= 3 + \frac{1}{6}(x-1) \\ &= \frac{17+x}{6}. \end{aligned}$$

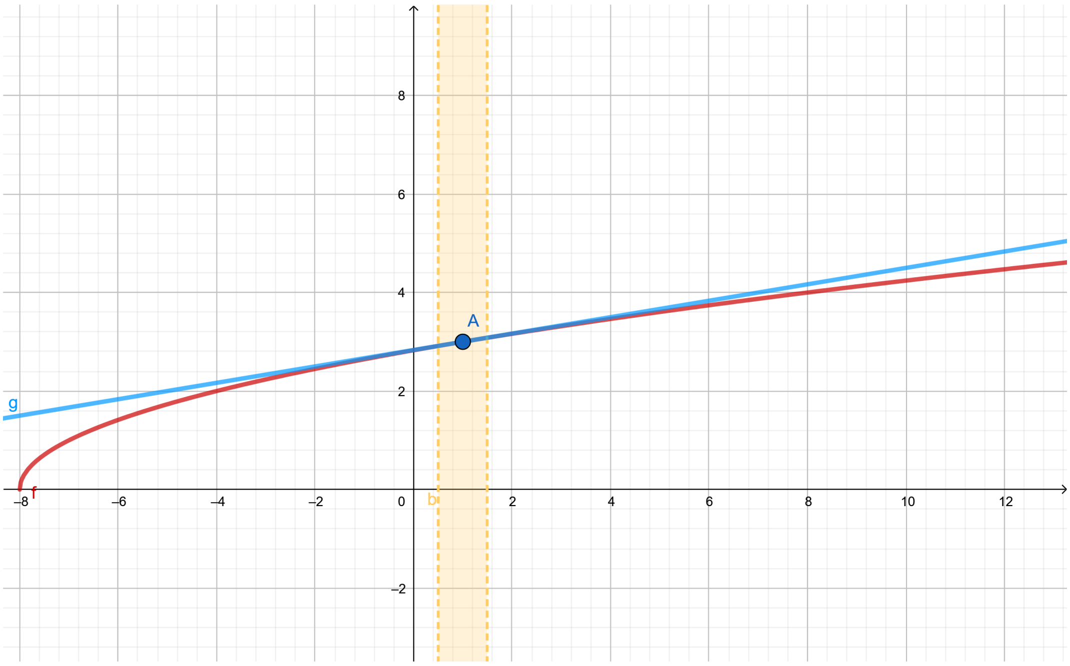


Figura 3.4: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.17** no intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[=]0.5, 1.5[$ ($x_0 = 1$ & $\delta = 0.5$). A magenta encontra-se representado o gráfico da função $x \mapsto \sqrt{x+8}$ e a azul ciano a recta tangente ao gráfico em $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

dá-nos uma aproximação de f para valores de $x \approx 1$. ■

Desafio 3.9 — Cálculo aproximado de raizes quadradas. Use a função $x \mapsto \sqrt{x+8}$ para obter um aproximado para raízes quadradas

$$\sqrt{16.16} \quad \& \quad \sqrt{24.88}.$$

SUGESTÃO: Para calcular a aproximação linear via determinação da equação da recta tangente, terá de escolher um x para o qual $\sqrt{x+8}$ lhe dê uma raiz exacta, que esteja suficientemente próxima das raiz quadrada que pretende calcular.

Desafio 3.10 — Erro relativo. Para a função f definida por $f(x) = \log_2\left(\sqrt{1-x}\right)$, determine uma estimativa para erro relativo

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} := \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$$

para valores de $x_0 = 0.75$ e $\Delta x = 0.001$, usando aproximação linear.

■ **Exemplo 3.18 — Área vs Perímetro de uma circunferência.** Sendo $A(r) = \pi r^2$ a função que nos permite calcular a área de uma circunferência de raio $r > 0$, segue que

$$\begin{aligned} A(r+\Delta r) - A(r) &= \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 \\ &= 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2. \end{aligned}$$

Da última fórmula concluímos que

$$dA(r) = 2\pi r \Delta r,$$

donde se retira que

$$A'(r) := \frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

Concluímos assim que a função derivada $A'(r)$ nos dá o perímetro de uma circunferência de raio r, e que o diferencial

$$dA(r) = A'(r)dr$$

nos permite encontrar uma estimativa para a área delimitada entre as circunferências de raio r e $r+\Delta r$, para valores de $\Delta r \approx 0$. ■

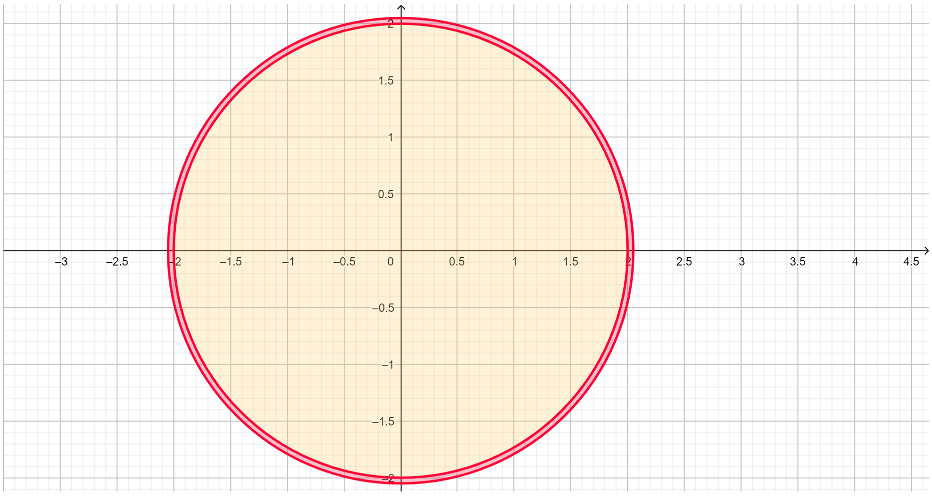


Figura 3.5: Ilustração gráfica do **Exemplo 3.18** para $r = 2$ e $\Delta r = 0.05$. A amarelo encontra-se a função $A(r)$– área da circunferência de raio r, e a vermelho a área da região anelar, correspondente à área compreendida entre as circunferências de raio r e $r+\Delta r$ – variação $A(r+\Delta r) - A(r)$. Neste caso podemos usar o diferencial $dA(r) = A'(r)dr$, envolvendo a função perímetro $A'(r) = 2\pi r$, para determinar uma aproximação para a área da região anelar.

3.4 Derivadas de 2^a ordem e Derivadas de ordem superior

Definição 3.4.1 — Derivadas de ordem superior a 1. Sejam f uma função de domínio D_f, $A = \{x \in D_f : f'(x) \in \mathbb{R}\}$ e $k \in \mathbb{N}$. A derivada de ordem $k \geq 2$ no ponto x, $f^{(k)}(x)$, é definida por recorrência através de

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x).$$

Dizemos ainda que f é de classe C^k num conjunto $B \subseteq A$ se f e as suas derivadas até à ordem k são contínuas em todos os pontos de B.

Por simplicidade representamos a segunda derivada de f usando ainda a notação da linha, ou seja,

$$f^{(2)}(x) = f''(x).$$

Seja $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a aproximação linear de f em x_0. Então:
i) f é convexa em I se $f(x) > L(x)$, para $x, x_0 \in I$ e $x \neq x_0$;
ii) f é côncava em I se $f(x) < L(x)$, para $x, x_0 \in I$ e $x \neq x_0$.

Teorema 3.4.1 Seja f uma função de classe C^1 em $I =]a,b[$. Então:
i) f é convexa em I se e só se f' é crescente;
ii) f é côncava em I se e só se f' é decrescente.

Assim sendo, o sinal da segunda derivada de f permite-nos determinar as concavidades do seu gráfico.

Teorema 3.4.2 — Relação entre o sinal da 2^a derivada e as concavidades do gráfico. Seja f' uma função regular em $[a,b]$.
i) Se $f''(x) > 0$ em $]a,b[$ então f é convexa em $[a,b]$, i.e, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $[a,b]$.
ii) Se $f''(x) < 0$ em $]a,b[$ então f é côncava em $[a,b]$, i.e, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[a,b]$.

Ressalve-se que, para as funções convexas ou côncavas podem existir valores de x para os quais a segunda derivada se anule.

■ **Exemplo 3.19** Consideremos a função $x \mapsto f(x) = x^4$, para todo $x \in \mathbb{R}$. As derivadas de primeira e segunda ordens são dadas por $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$. Assim, $f''(x) \geq 0$ e

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Recorrendo ao gráfico, visualizamos que f é convexa em $\mathbb{R}$ e satisfaz $f''(0) = 0$. ■

Definição 3.4.2 Sejam f uma função de classe C^2 em $I_1 \cup I_2$ com $I_1 \cap I_2 = \{x_0\}$. Diz-se que $P = (x_0, f(x_0))$ é ponto de inflexão do gráfico de f se f é convexa em I_1 e côncava em I_2 ou f é côncava em I_1 e convexa em I_2.

■ **Exemplo 3.20** Consideremos a função $x \mapsto f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. As derivadas de primeira e segunda ordens são dadas por $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$. Assim,

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Fazendo o quadro de concavidades:

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$

concluímos que $(0,0)$ é ponto de inflexão do gráfico de f. ■

Contudo, o gráfico de uma função f pode admitir um ponto de inflexão $P = (x_0, f(x_0))$ e a segunda derivada de f em x_0 não existir ou mesmo ser infinita.

■ **Exemplo 3.21** Consideremos a função $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. As derivadas de primeira e segunda ordens são dadas por $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$. Assim,

$$f''(x) \neq 0$$

Fazendo o quadro de concavidades:

x		0	
$f''(x)$	$+$	$n.d$	$-$
$f(x)$	$\cup$	0	$\cap$

concluímos que $(0,0)$ é ponto de inflexão do gráfico de f uma vez que f é convexa em $]-\infty, 0]$ mas côncava em $[0, +\infty[$. ■

Desafio 3.11 — Exercício de Revisão. Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em todos os pontos

do seu domínio, e $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ a função definida pontualmente por $g(x) = f(\arccos(x))$.

a) Determine uma expressão analítica para g' e g'' em termos de f' e f''.

b) Se $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ são pontos estacionários de f, quais são os pontos estacionários de g?

c) Supondo que $\frac{\pi}{4}$ é um máximo local de f e $\frac{\pi}{3}$ um mínimo local de f, determine os extremos locais de g. Classifique-os quanto à sua natureza (máximo/mínimo local).

d) Supondo agora que $f(0) = f(\pi)$, mostre pelo *Teorema de Rolle* (**Teorema 3.3.1**) que existe um $c \in]-1, 1[$ tal que:

i) $f'(\arccos(c)) = 0$.

ii) $g''(c) = \frac{1}{|1-c^2|} f''(\arccos(c))$.

3.5 Limites: Regra de L' Hôpital

Teorema 3.5.1 — Regra de L' Hôpital (Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Sejam f e g diferenciáveis num intervalo aberto I contendo c com excepção eventualmente de c.
Se $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos então

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que exista $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ideia da demonstração. Segue da sequência de igualdades

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\\
&= \lim_{x\to c}\frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}\\
&= \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

■

✓ Este resultado ainda é válido se em vez do real c estiver $+\infty$ ou $-\infty$.

3.5.1 Limites envolvendo indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$

■ **Exemplo 3.22 — Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.** O limite abaixo

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x\ln|x|}$$

envolve uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Porém, recorrendo a propriedades de limites temos

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x\ln|x|} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{x}\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\ln|x|} = -\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\ln|x|}$$

Para aplicar a regra de L'Hôpital, observe que as funções

$$f(x) = x^2-1 \quad \text{e} \quad g(x) = \ln|x|$$

satisfazem as regras de derivação

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2)'-1'\\
&= 2x
\end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Das igualdades

$f'(-1) = -2$ e $g'(-1) = -1$ segue pelo **Teorema 3.5.1** que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x\ln|x|} &= (-1)\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)'}{(\ln|x|)'} \\
&= (-1)\lim_{x\to -1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} \\
&= (-1)2 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

■

3.5.2 Limites envolvendo indeterminações do tipo $\infty - \infty$

■ **Exemplo 3.23 — Indeterminação do tipo $\infty - \infty$.** O limite abaixo

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{x}{\ln|x|} - \frac{1}{x\ln|x|} \right)$$

envolve uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$, uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{x}{\ln|x|} &= -\infty \\
\lim_{x\to -1} \frac{1}{x\ln|x|} &= -\infty
\end{aligned}$$

Aos reescrevermos a função $\dfrac{x}{\ln|x|} - \dfrac{1}{x\ln|x|}$ na forma de fração:

$$\frac{x}{\ln|x|} - \frac{1}{x\ln|x|} = \frac{x^2-1}{x\ln|x|}.$$

passamos de uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$ a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, que corresponde precisamente ao limite calculado no no **Exemplo 3.22** pela regra de L'Hôpital. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \left(\frac{x}{\ln|x|} - \frac{1}{x\ln|x|} \right) &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x\ln|x|} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

■

Desafio 3.12 — Indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Calcule o limite da função

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \cot(x) \right)$$

usando a regra de L'Hôpital.

3.5.3 Limites envolvendo indeterminações do tipo $0 \times \infty$

■ **Exemplo 3.24 — Indeterminação do tipo $0 \times \infty$.** Voltemos novamente a nossa atenção para o cálculo do limite do **Exemplo 3.4**:

$$\lim_{x\to a^+} (x-a)\ln(x-a)$$

Para calcularmos o limite acima pela regra de L'Hôpital, reescrevemos a função $(x-a)\ln(x-a)$ na forma

$$(x-a)\ln(x-a) = \frac{\ln(x-a)}{\frac{1}{x-a}}$$

para passarmos a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Segue então que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+}(x-a)\ln(x-a) &= \lim_{x\to a^+}\frac{\ln(x-a)}{\frac{1}{x-a}}\\
&= \lim_{x\to a^+}\frac{(\ln(x-a))'}{\left(\frac{1}{x-a}\right)'}\\
&= \lim_{x\to a^+}\frac{\frac{1}{x-a}}{-\frac{1}{(x-a)^2}}\\
&= \lim_{x\to a^+}-(x-a)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

3.5.4 Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital

■ **Exemplo 3.25 — Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital.** Ao aplicarmos uma vez a regra de L'Hôpital para calcular o limite abaixo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2(\pi x)-1}{(x-1)^2}$$

obtemos, após alguns cálculos auxiliares, a igualdade abaixo

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2(\pi x)-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin(2\pi x)}{2(x-1)}$$

que continua a nos dar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando mais uma vez a regra de L'Hôpital, concluímos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin(2\pi x)}{2(x-1)} &= \lim_{x\to 1}\frac{-2\pi^2\cos(2\pi x)}{2}\\
&= \pi^2.
\end{aligned}$$

Em suma, aplicámos duas vezes a regra de L'Hôpital para concluir que

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2(\pi x)-1}{(x-1)^2} = \pi^2.$$

■

Desafio 3.13 — Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital (ii). Calcule o limite abaixo usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1}{(x-3)^3}$$

Desafio 3.14 — Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital (iii). Calcule o limite abaixo

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{(f(x)-1)^2}$$

sabendo que f é uma função duas vezes diferenciável em $x_0=-3$ que satisfaz as seguintes condições:

$$f(-3)=1,\quad f'(-3)=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad f''(-3)=\sqrt{3}.$$

Desafio 3.15 — Para revisão do Corolário 3.2.5. Supondo que f é uma função invertível e diferenciável em $]a,b[$, e que

$$y = c + \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

corresponde à equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,c)$, determine o valor do limite

$$\lim_{x\to c} \frac{x-c}{f^{-1}(x)}.$$

3.5.5 Limites envolvendo a função exponencial-potência

Recordemos que a função exponencial-potência h é definida por

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln[f(x)]}.$$

Suponhamos agora que h é diferenciável num intervalo do tipo $]a,c[\cup]c,b[$, contido no domínio

$$D_h = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}.$$

Então

$$\lim_{x\to c} h(x) = \lim_{x\to c} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{\lim_{x\to c}[g(x)\ln(f(x))]}$$

uma vez que a exponencial é uma função contínua. Assim, no cálculo do limite $\lim_{x\to c} h(x)$ podem surgir três tipos de indeterminações:

$$(0^+)^0 \quad ; \quad 1^{(\pm\infty)} \quad ; \quad (+\infty)^0$$

que resultam das indeterminações associadas ao limite de um produto de funções: $\lim_{x\to c}[g(x)\ln(f(x))]$. Vejamos as três possibilidades:

- Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ então $\lim_{x\to c}[g(x)\ln(f(x))]$ é uma indeterminação do tipo $0\times(-\infty)$;
- Se $\lim_{x\to c} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ então $\lim_{x\to c}[g(x)\ln(f(x))]$ é uma indeterminação do tipo $\pm\infty\times 0$;
- Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ então $\lim_{x\to c}[g(x)\ln(f(x))]$ é uma indeterminação do tipo $0\times(+\infty)$.

■ **Exemplo 3.26 — Prova de limite notável usando L'Hôpital.** Mostre-se que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}$$

para toda a constante $\alpha \in \mathbb{R}$ e não-nula.
Observe-se que o domínio é determinado através de

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \quad \wedge \quad 1+\frac{\alpha}{x} > 0\}.$$

Para $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) obtém-se

$$D =]-\infty, -\alpha[\cup]0,+\infty[\text{ (resp. } D =]-\infty,0[\cup]-\alpha,+\infty[).$$

Reescrevendo tem-se

$$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}$$

Começando por converter a indeterminação $(+\infty)\times 0$ em $\frac{0}{0}$ vem

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{x^{-1}}$$

Aplicando a regra de L' Hôpital obtém-se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\alpha}{x(x+\alpha)}}{(-1)x^{-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x}{x+\alpha} = \alpha$$

por conseguinte,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)} = e^{\alpha}.$$

■

Desafio 3.16 — Aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital (iv). Considere a função exponencial potência f definida por $x^{\sin(x)}$.

(i) Aplique uma vez a regra de L'Hôpital para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin(x)}.$$

De seguida, use o **Corolário 2.1.10** para concluir que o limite acima vale e – número de Neper.

(ii) Use sucessivamente a regra de L'Hôpital para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin(x)}.$$

O que conclui?

3.6 Extremos Relativos e Absolutos

Definição 3.6.1 — Máximos e Mínimos Relativos. Sejam f uma função contínua em $[a,b]$ e $c\in]a,b[$. Diz-se que:

- f atinge um máximo relativo (ou local) em c, de valor $f(c)$, se existe $\delta>0$ tal que

$$f(x)\le f(c)$$

para todo $x\in]c-\delta,c+\delta[$

- f atinge um mínimo relativo (ou local) em c, de valor $f(c)$, se $\delta>0$ tal que

$$f(x)\ge f(c)$$

para todo $x\in]c-\delta,c+\delta[$ com $\delta>0$.

Aos máximos e aos mínimos relativos de f chamam-se extremos relativos (ou extremos locais) da função.

3.6.1 Estudo de pontos críticos/estacionários

Definição 3.6.2 — Pontos críticos da função. Sejam f uma função de domínio D e $c\in D$. Diz-se que:

- c é ponto estacionário de f se f é diferenciável em c e $f'(c)=0$.
- c é ponto singular de f se f não é diferenciável em c, ou seja, se ou não existe $f'(c)$ ou $f'(c)=+\infty(-\infty)$

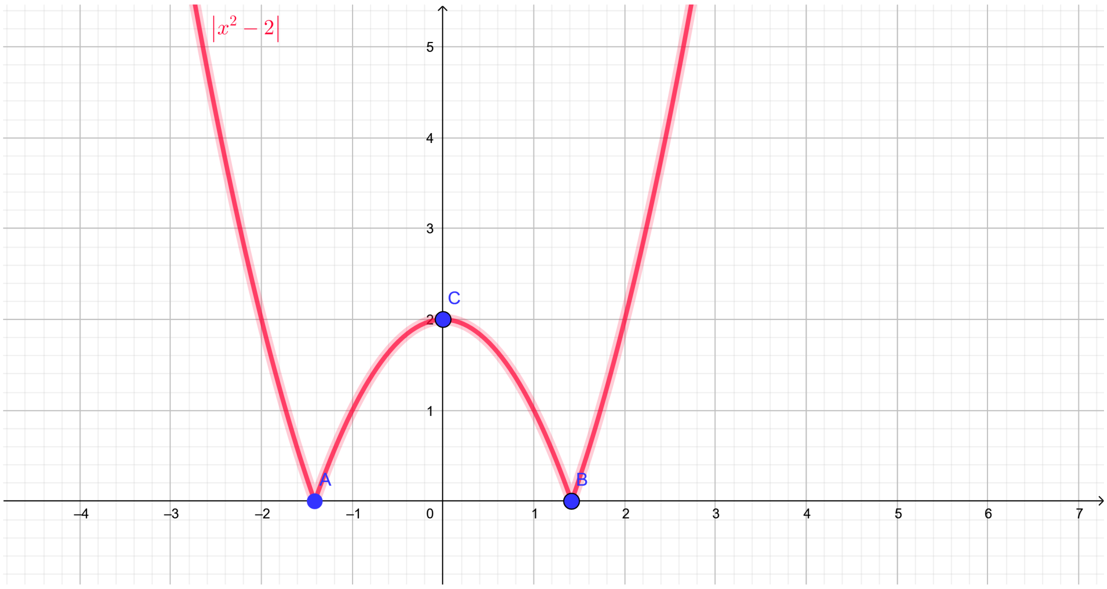


Figura 3.6: Interpretação gráfica do **Exemplo 3.27**. Os pontos singulares são as abscissas de $A=(-\sqrt{2},0)$ e $B=(\sqrt{2},0)$. O ponto estacionário é a abscissa de $C=(0,2)$.

■ **Exemplo 3.27** Seja f a função $x \mapsto f(x)=|x^2-2|$. Esta função é diferenciável em $\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$. Além disso, temos

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$$

Assim, f tem três pontos críticos. ■

Teorema 3.6.1 — Condição Necessária para a existência de um extremo. Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e $c\in]a,b[$.
Se f tem um extremo relativo em c então c é um ponto crítico de f.

Corolário 3.6.2 — Teorema de Fermat. Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função regular e $c\in]a,b[$.
Se f tem um extremo relativo em c então c é um ponto estacionário de f.

Contudo, uma função regular pode não atingir um extremo num ponto estacionário.

■ **Exemplo 3.28** Consideremos a função cúbica definida por $f(x)=x^3$. É claro que f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Resolvendo

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow 3x^2=0 \Longleftrightarrow x=0$$

obtemos um único ponto estacionário, $c=0$. Fazendo o quadro de variação:

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

concluímos que a função é estritamente crescente. ■

3.6.2 Determinação e classificação de extremos relativos

Assim, após a determinação de pontos estacionários é necessário classificá-los. Podemos classificar esses pontos recorrendo ao quadro de variação ou então aplicar o teste da derivada de segunda ordem.

■ **Exemplo 3.29** Consideremos a função exponencial por $f(x) = xe^{-2x^2}$. Esta é diferenciável em $\mathbb{R}$. Os pontos estacionários são as soluções da seguinte equação:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 2^{-1}$$

Do quadro de variação:

x		$-1/2$		$1/2$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\searrow$

concluímos que a função tem um máximo relativo de valor $M = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ e um mínimo relativo de valor $m = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$.

■

Teorema 3.6.3 — Teste da Derivada de segunda ordem. Suponhamos que f'' existe num intervalo aberto contendo c e que $f'(c) = 0$.
1. Se $f''(c) > 0$ então f atinge um mínimo relativo em c
2. Se $f''(c) < 0$ então f atinge um máximo relativo em c

Contudo o teste é inconclusivo no caso em que $f''(c) = 0$.

■ **Exemplo 3.30** Consideremos a função quadrática definida por $f(x) = x^2$. É claro que f é de classe C^2 em $\mathbb{R}$. Resolvendo

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x = 0 \Longleftrightarrow 2x = 0$$

obtemos um único ponto estacionário, $x = 0$. De seguida, usamos o teste da derivada de ordem 2 para classificá-lo. Assim,

$$f''(x) = 2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $f''(0) > 0$, logo f atinge um mínimo relativo em $x = 0$ de valor $f(0) = 0$. Além disso, $f(0) = 0$ é mesmo o mínimo absoluto de acordo com a próxima definição pois verifica

$$f(x) \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Definição 3.6.3 — Máximos e Mínimos Absolutos. Sejam f uma função de domínio D e $c \in D$. Diz-se que:
- f atinge um máximo absoluto em c, de valor $f(c)$, se verifica

  $$f(x) \leq f(c)$$

  para todo $x \in D$;
- f atinge um mínimo absoluto em c, de valor $f(c)$, se

  $$f(x) \geq f(c)$$

para todo $x \in D$.
Aos máximos e aos mínimos absolutos chamam-se extremos absolutos.

Teorema 3.6.4 Se f é uma função convexa (resp. côncava) em $[a,b]$, então todo o mínimo (resp. máximo) relativo é mínimo (resp. máximo) absoluto.

Desafio 3.17 Classifique os pontos críticos da função $x \mapsto |x^2 - 2|$ do **Exemplo 3.27**.

Desafio 3.18 Averigue se os extremos relativos da função $x \mapsto xe^{-2x^2}$ do **Exemplo 3.29** também são absolutos.

Sugestão: Determine o contradomínio da função.

3.6.3 Determinação de extremos absolutos num intervalo fechado

Toda a função contínua num intervalo fechado $[a,b]$ tem um máximo absoluto M e um mínimo absoluto m pelo teorema de Weierstrass – vide **Teorema 2.2.9** do capítulo **2 Limites e Continuidade**.

Para calcular esses valores é necessário determinar o contradomínio da função. Assim:

- Se f é estritamente monótona em $[a,b]$ então temos $D' = [f(a), f(b)]$ ou $D' = [f(b), f(a)]$, logo $m = f(a)$ e $M = f(b)$ ou $M = f(a)$ e $m = f(b)$, respectivamente.

No caso em que f não é monótona, descrevemos o procedimento para obter os extremos absolutos:

Passo 1: Determinar os pontos críticos, bem como as suas imagens por f;
Passo 2: Calcular $f(a)$ e $f(b)$;
Passo 3: De entre as imagens calculadas atrás, o maior valor M e o menor valor m representam, respectivamente, o máximo absoluto e o mínimo absoluto de f.

Desafio 3.19 Determine os extremos absolutos da função f definida por $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x^5}$ no intervalo $[-1,2]$.

3.7 Esboço de gráficos baseado no estudo completo de funções

Para fazer um esboço do gráfico duma função é conveniente seguir o seguinte plano:

- Determinar o domínio;
- Analisar a simetria e a periodicidade;
- Calcular os pontos de intersecção com os eixos coordenados;
- Estudar a continuidade e determinar as assímptotas;
- Determinar os intervalos de monotonia, extremos relativos/absolutos e contradomínio;
- Determinar os intervalos de concavidade/convexidade e pontos de inflexão.

3.8 Aplicações: Taxas de Variação em Economia

A taxa de variação média de uma função f num intervalo fechado $[x, x+\Delta x]$ é igual a

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3.5}$$

Quando Δx tende para zero, o limite desse quociente é igual precisamente à derivada de f no ponto x, sendo interpretado como a taxa de variação de f no ponto x. Por exemplo, quando a variável independente é o tempo é sobejamente conhecido que, a velocidade corresponde à taxa de variação do espaço percorrido e a aceleração corresponde à taxa de variação da velocidade. A utilização das taxas de variação de uma quantidade relativamente a outra quantidade, que não seja necessariamente o tempo, ocorre variadíssimas vezes em diferentes ciências. Em Economia, o custo marginal, a receita marginal e o lucro marginal constituem exemplos de aplicação de taxas de variação.

Representando por $C(x)$ o custo total em relação à quantidade de unidades produzidas x então o custo marginal em x é definido pela função derivada de $C(x)$, $C'(x)$. Na prática os economistas estão interessados em saber qual é que é a variação do custo total de produção associado à produção de uma unidade adicional. Em termos matemáticos, isso corresponde a uma taxa de variação média de $C(x)$ no intervalo $[x, x+1]$. Como se pode relacionar a taxa de variação média de $C(x)$ com o custo marginal $C'(x)$?

Teoricamente, os economistas definem custo marginal como sendo a taxa de variação do custo total $C(x)$ em relação à quantidade de unidades produzidas x. Assim sendo, pode-se afirmar que o custo marginal fornece uma boa estimativa para a taxa de variação média de $C(x)$ no intervalo $[x, x+1]$ porque

$$C(x+1) - C(x) \approx C'(x)$$

Desafio 3.20 Suponha que o custo total de produção em unidades monetárias (u.m) é dado por

$$C(x) = 0,1x^3 - 5x^2 + 500x + 200$$

em relação ao número de unidades produzidas x. Então

(i) Calcule o acréscimo de custo correspondente a um aumento de produção de 3 para 4 unidades.
(ii) Determine o custo marginal correspondente a 3 unidades de produção.
(iii) Interprete os resultados obtidos.

3.8.1 O Princípio da Minimização do Custo Médio

Uma empresa que produz um único produto pretende minimizar o custo médio para um determinado volume de produção de x unidades. O custo total no processo de produção é decomposto em duas parcelas: o custo fixo e o custo variável. O primeiro representa a despesa expressa em unidades monetárias, independentemente da quantidade produzida, por exemplo o custo de armazenamento, o preço do equipamento e outros custos de distribuição e de gestão. O segundo está diretamente relacionado com a produção efectiva, por exemplo, o preço das matérias-primas e o salário dos trabalhadores e dos gestores.

Vamos admitir que o custo total é representado pela expressão $C(x)$, onde $C : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, isto é, uma função contínua cujas primeira e segunda derivadas são também contínuas em $[0, +\infty[$. Enquanto o custo médio é definido por

$$M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

o custo marginal é definido pela derivada do custo total $C(x)$, $C'(x)$. Refira-se que o custo marginal $C'(x)$ é aproximadamente igual ao custo adicional correspondente à produção de mais uma unidade de x, isto é,

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$$

Suponhamos que os custos de produção satisfazem os seguintes pressupostos económicos:

(i) O custo fixo é positivo;
(ii) O custo total aumenta à medida que a produção aumenta;
(iii) Para níveis de produção baixos, o custo marginal diminui à medida que a produção aumenta;
(iv) Para níveis de produção altos, o custo marginal aumenta à medida que a produção aumenta.

Então a empresa age segundo o seguinte princípio económico:

(v) O custo médio M tem um mínimo que ocorre no nível de produção para o qual o custo marginal coincide com o custo médio.

Os pressupostos económicos sobre os custos conduzem aos seguintes resultados matemáticos:

- Existe um único ponto estacionário de M, $x = x_*$, que é solução da equação

$$M'(x) = 0 \Longleftrightarrow C'(x) = M(x)$$

  Basta notar que

$$M'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x) - M(x)}{x}$$

- A função M atinge um mínimo absoluto em $x = x_*$ conforme se pode verificar pelo quadro de variação de M:

x	0		x_*	$+\infty$
$M'(x)$	$n.d$	-	0	+
$M(x)$	$n.d$	$\searrow$	$M(x_*)$	$\nearrow$

  onde $M(x_*)$ é o custo médio mínimo. Notemos que

  (i) Para os valores de x tais que $x < x_*$ temos

$$M'(x) < 0 \Longleftrightarrow C'(x) < M(x)$$

  (ii) Para os valores de x tais que $x > x_*$ temos

$$M'(x) > 0 \Longleftrightarrow C'(x) > M(x)$$

Desafio 3.21 Sabendo que x_* é o único ponto estacionário da função custo médio M, mostre que

$$M''(x_*) = \frac{C''(x_*)}{x_*}$$

Utilize ainda esse resultado para provar que x_* é um minimizante de M.

3.8.2 O Princípio da Maximização do Lucro

Consideremos uma empresa que pretende maximizar o lucro para um determinado volume de produção de x unidades de um produto. O lucro é definido como uma diferença entre receitas e custos.

Por um lado, o custo total no processo de produção é decomposto em duas parcelas: o custo fixo e o custo variável. O primeiro representa a despesa expressa em unidades monetárias, independentemente da quantidade produzida, por exemplo o custo de armazenamento, o preço do equipamento e outros custos de distribuição e de gestão. O segundo está directamente relacionado com a produção efectiva, por exemplo, o preço das matérias-primas e o salário dos trabalhadores e dos gestores. Admitamos que o custo total, $C(x)$, é expresso por uma função real de variável real de classe C^2 no intervalo $[0, +\infty[$, isto é, uma função contínua cujas primeira e segunda derivadas são também contínuas. Sendo o custo marginal definido pela derivada $C'(x)$ do custo total $C(x)$, supomos então que os custos satisfazem os seguintes pressupostos económicos:

- O custo fixo é positivo
- O custo total aumenta à medida que o volume de produção aumenta
- A níveis de produção baixos, a um aumento do volume de produção corresponde uma diminuição do custo marginal
- A níveis de produção altos, o custo marginal aumenta à medida que o volume de produção aumenta

Por outro lado, se $p(x)$ indicar o preço unitário de mercado quando se produzem x unidades de um produto, então a receita total proveniente da venda de x unidades é dada por

$$R(x) = xp(x)$$

Sendo a função lucro definida por

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

a empresa age segundo o seguinte princípio económico: a função lucro tem um máximo que ocorre no nível de produção para o qual a receita marginal coincide com o custo marginal. Note-se que a receita marginal e o lucro marginal representam a função derivada da receita e do lucro, respectivamente, em relação à quantidade de unidades vendidas.

Os pressupostos económicos conduzem aos seguintes resultados matemáticos:

- Existe um único ponto estacionário de L, $x = x^*$, que verifica

$$L'(x) = 0 \Longleftrightarrow R'(x) = C'(x)$$

  Basta notar que

$$L'(x) = R'(x) - C'(x)$$

- A função L atinge um mínimo absoluto em $x = x^*$ conforme se pode verificar pelo quadro de variação de L:

x	0	x^*	$+\infty$
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$	$\nearrow$	$L(x^*)$	$\searrow$

  onde $L(x^*)$ é o lucro máximo.

3.8.3 Elasticidade Preço da Procura

Consideremos a função procura:

$$\begin{array}{rccc} D: & I \subseteq]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & y = D(x) \end{array}$$

onde $y > 0$ representa a quantidade procurada de um bem por parte dos consumidores ao preço unitário de $x > 0$ unidades monetárias (u.m.). Em geral, supomos que:

- D é positiva, diferenciável e estritamente decrescente em I.

A sua representação gráfica, designada por curva de procura, satisfaz

$$y = D(x) \Longleftrightarrow x = D^{-1}(y)$$

sendo D^{-1} a função inversa de D. **A monotonia de D resulta do pressuposto económico de que a quantidade procurada de um bem varia no sentido inverso do seu preço.** De facto, à medida que o preço aumenta a quantidade procurada diminui e vice-versa.
Então a elasticidade preço da procura é uma função $\varepsilon_D : I \to]-\infty, 0[$ que toma valores negativos, cuja expressão é definida por

$$\varepsilon_D(x) = \frac{xD'(x)}{D(x)}.$$

O valor da elasticidade preço da procura é o rácio entre a variação relativa (ou percentual) da quantidade procurada e a variação relativa (ou percentual) do preço. É por esta razão que o conceito de elasticidade se tornou tão popular entre os economistas pois desta forma a elasticidade não depende das unidades de medida das respectivas variáveis.

Desafio 3.22 Verifique que a função receita marginal, definida como a primeira derivada da função receita total R – vide subseção **3.8.2 O Princípio da Maximização do Lucro** – pode ser expressa como

$$R'(x) = p(x)(1+\varepsilon_p(x)),$$

onde $x \mapsto \varepsilon_p(x)$ denota a função de elasticidade associada ao preço de produção unitário.

Que condição teremos de impor à função de elasticidade de modo a que a receita total aumente com o aumento da produção do número de peças?

Desafio 3.23 Assumindo que x^* é o número óptimo de peças que nos permite maximizar a função lucro $x \mapsto L(x)$ introduzida na subseção, **3.8.2 O Princípio da Maximização do Lucro**, determine o valor do preço unitário $p(x^*)$ para produzir x^* peças em função do custo marginal $C'(x^*)$ de produção de x^* peças.

3.8.4 Tempo de Retenção Ideal em Compra e Venda de Imóveis

Suponha que possui um imóvel, cujo valor de mercado será de $V(x)$ euros em x anos. Supondo que a taxa de juro permanece constante ($J\%$), então o seu valor de mercado ao longo dos anos pode ser calculado pela função

$$W(x) = V(x)e^{-\frac{J}{100}x} \quad (x \geq 0).$$

A teoria económica sugere que o tempo ideal para vender um imóvel corresponde à maximização da função $x \mapsto W(x)$.

Das condições de primeira ordem e da igualdade anterior, segue que

$$\begin{aligned} W'(x^*) = 0 \quad &\iff \quad \underbrace{e^{-\frac{J}{100}x^*}}_{>0}\left(V'(x^*) - \frac{J}{100}V(x^*)\right) = 0 \\ &\iff \quad \frac{V'(x^*)}{V(x^*)} = \frac{J}{100} \end{aligned}$$

Das condições de 2^a ordem, segue que

$$\begin{aligned} W''(x^*) < 0 \quad &\iff \quad e^{-\frac{J}{100}x^*}\left(V''(x^*) - \frac{2J}{100}V'(x^*) + \left(\frac{J}{100}\right)^2 V(x^*)\right) < 0 \\ &\iff \quad \underbrace{e^{-\frac{J}{100}x^*}V(x^*)}_{>0}\left(\frac{V''(x^*)}{V(x^*)} - \left(\frac{J}{100}\right)^2\right) < 0 \\ &\iff \quad \frac{V''(x^*)}{V(x^*)} < \left(\frac{J}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

Finalmente, a sequência de igualdades

$$\frac{V''(x^*)}{V(x^*)} = \frac{V''(x^*)}{V'(x^*)}\frac{V'(x^*)}{V(x^*)} = \frac{J}{100}\frac{V''(x^*)}{V'(x^*)}$$

permite-nos concluir que o **ano ideal para venda do imóvel** está correlacionado com as seguintes condições de primeira e 2^a ordem, associadas às derivadas logarítmicas de V e V':

$$\frac{V'(x^*)}{V(x^*)} = \frac{J}{100} \quad \text{e} \quad \frac{V''(x^*)}{V'(x^*)} < \frac{J}{100}.$$

Desafio 3.24 — Maximização do valor de mercado de um imóvel. Sendo V_0 o preço de compra de um imóvel (em euros) a uma construtora, suponha que o seu valor de mercado, a uma taxa de 6% ao ano, é dado pela função

$$W(x) = V_0 e^{\sqrt[3]{x^2}} e^{-0.06x}.$$

Determine ao fim de quantos anos será atingido o lucro máximo com a venda do imóvel.

3.9 Exercícios Propostos

26. Considere f definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} .$$

(a) Indique o ponto de descontinuidade de f e classifique-o.
(b) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.
(c) Mostre que: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.
(d) Defina a função derivada de f, explicitando o domínio e a expressão analítica.
(e) Determine as assímptotas ao gráfico de f e estude a monotonia e as concavidades de f.
(f) Faça um esboço gráfico de f.

27. Considere f e g definidas por

$$f(x) = \sinh x \quad , \quad g(x) = \ln x .$$

(a) Mostre que:

$$(g \circ f)(x) = \ln(e^{2x} - 1) - x - \ln 2 \, , \, x > 0.$$

(b) Calcule a derivada de $g \circ f$ em x de duas formas distintas através de:
  (i) um produto de derivadas, ou seja, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$;
  (ii) alínea (a).

28. Seja f a função definida por $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$.
(a) Usando a monotonia, mostre que f é invertível.
(b) Determine a de modo que $(4, a)$ pertença ao gráfico de f^{-1}.
(c) Após a determinação de a, compare os declives das rectas tangentes aos gráficos de f e de f^{-1} em $(a, 4)$ e em $(4, a)$, respectivamente.
(d) Determine o domínio e a expressão analítica da função inversa de f, f^{-1}.

29. Recorrendo à regra de L' Hôpital, calcule os seguintes limites:

(**a**) $\displaystyle\lim_{x\to a^2}\frac{\sqrt{x}-a}{x-a^2}$, $a>0$ (**b**) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin x}$

(**c**) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(x/3)}$ (**d**) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{tg} x)$

(**e**) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\operatorname{tg} x)$ (**f**) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

(**g**) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ (**h**) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}$

(**i**) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^{-1/2}-2^{-1}}{x-4}$ (**j**) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}$

(**k**) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{\cosh x}$ (**l**) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2\operatorname{arctg}(2x)-\pi)\,e^x$

30. Verifique que não pode aplicar a regra de L' Hôpital e calcule os seguintes limites:

(**a**) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x}$ (**b**) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$

31. Para um parâmetro real $a>0$, considere a função $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{a+x}{\sqrt{ax}}\,.$$

(a) Determine o extremo relativo de f.

(b) Use a alínea anterior para mostrar que a média geométrica de dois reais positivos a e b não é superior à respectiva média aritmética, isto é,

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\,.$$

32. Considere a função quadrática f definida por $f(x)=x^2$.

(a) Se a variável x sofrer uma variação desde um valor fixo a até $x=a+\Delta x$ então qual a correspondente variação de f:

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)\,?$$

(b) Calcule, dy, o diferencial de f em $x=a$ relativamente ao acréscimo Δx.

(c) Mostre que Δy é aproximadamente igual a dy quando Δx tender para zero.

(d) Considerando $f(a)$ como a área de um quadrado de lado a, dê uma interpretação geométrica de Δy e de dy.

(e) Calcule um valor aproximado de $(1.003)^2$.

33. Seja f a função irracional definida por $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

(a) Calcule as derivadas laterais de f em $x=0$.

(b) Estude a monotonia e as concavidades de f tendo em vista o esboço do gráfico de f.

(c) Calcule o diferencial de f no ponto $a=1$ relativamente ao acréscimo Δx.

(d) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

(e) Mostre que

$$\sqrt[3]{(1+\Delta x)^2}\approx 1+\frac{2}{3}\Delta x$$

sempre que Δx esteja suficientemente próximo de 0 . A este resultado chama-se regra de aproximação incremental de f em torno de $x=0$.

(f) Use o resultado anterior para o cálculo aproximado dos valores $\sqrt[3]{1.0201}$, $\sqrt[3]{1.21}$ e $\sqrt[3]{0.56}$.

34. Seja f a função definida por $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
(a) Indique o domínio de f.
(b) Calcule
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{x-1}.$$
(c) Estude a monotonia de f e indique os extremos globais de f.
(d) Mostre que:
$$f''(x) = -\frac{1}{f^3(x)}\,,\ |\,x\,| > 1\,.$$
(e) Mostre que:
$$0 \le f(x) \le |\,x\,|$$
para todo o x pertencente ao domínio.
(f) Esboce o gráfico de f.

35. Sabendo que as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são definidas, respectivamente, por
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
para todo o real x.
(a) Mostre que:
(**i**) $\cosh x + \sinh x = e^x$ (**ii**) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
(**iii**) $\cosh x > \sinh x$ (**iv**) $\dfrac{\sinh x}{\cosh x} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$
(b) Verifique que: $(\cosh x)' = \sinh x$ e $(\sinh x)' = \cosh x$.
(c) Trace os gráficos dessas funções, após a análise dos seguintes ítens:
- Simetria;
- Pontos de intersecção com os eixos coordenados;
- Assímptotas verticais, horizontais e oblíquas;
- Intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos, contradomínio;
- Concavidades e pontos de inflexão.

36. Considere mais duas funções trigonométricas, designadas por secante e co-secante, respectivamente, definidas por
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$
(a) Indique os respectivos domínios.
(b) Justifique que ambas as funções são periódicas de período 2π.
(c) Mostre que:
(**i**) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ (**ii**) $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$
(**iii**) $\sec x \operatorname{cosec} x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ (**iv**) $\dfrac{\sec x}{\operatorname{cosec} x} = \operatorname{tg} x$
(d) Verifique que: $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$ e $(\operatorname{cosec} x)' = -\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{tg} x}$.
(e) Calcule
$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\sec x \quad \text{e} \lim_{x\to 0^+}\operatorname{cosec} x.$$

(f) Estude os ítens referidos no exercício anterior tendo em vista o esboço dos gráficos dessas funções.
(g) Resolva a equação $\sec x = \operatorname{cosec} x$.

37. Suponha que uma empresa para produzir x unidades de um produto estimou o seguinte custo total, em unidades monetárias (u. m.):

$$C(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 500x + 200\,.$$

(a) Qual o acréscimo de custo correspondente a um aumento de produção de 3 para 4 unidades ?
(b) Indique, recorrendo ao cálculo diferencial, um valor aproximado para o acréscimo de custo referido em (**a**).
(c) Interprete os resultados obtidos.

38. Suponha que o custo total de produção é dado, em unidades monetárias (u. m.), por

$$C(x) = 0.5x^3 - 9x^2 + 60x + 100$$

sendo x a quantidade de unidades produzidas de um produto.
(a) Estude a monotonia e as convavidades da função custo total.
(b) Interprete economicamente os resultados obtidos em (**a**).
(c) Calcule o custo médio e o custo marginal correspondente a x unidades de produção.
(d) Determine o número de unidades produzidas que minimiza a função custo médio e indique o valor do custo médio mínimo.
(e) Esboce os gráficos das funções custo total, custo marginal e custo médio.

39. Suponha que o custo total de produção de x unidades de um produto é dado, em unidades monetárias (u. m.), por

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 100\,.$$

Assumindo que o número total de unidades produzidas é igual à procura de mercado, então na venda de x unidades pratica-se um preço unitário, em unidades monetárias (u. m.), por

$$p(x) = x^2 - 18x + 108\,,\ 0 < x < 9\,.$$

(a) Calcule o custo marginal correspondente a x unidades de produção.
(b) Calcule a receita marginal correspondente a x unidades de produção.
(c) Determine o número de unidades que maximiza a função lucro e indique o valor do lucro máximo.

40. Seja $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função positiva e diferenciável. Então a elasticidade de f em cada ponto x define-se por

$$\varepsilon_f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}\,.$$

Mostre que:
(a) Se f é crescente então a elasticidade de f não é negativa em $\mathbb{R}^+$;
(b) Se f é decrescente em então a elasticidade de f não é positiva em $\mathbb{R}^+$;
(c) A elasticidade de f também pode ser calculada através de

$$\varepsilon_f(x) = \frac{[\ln(f(x))]'}{(\ln x)'}\,.$$

41. Suponha que a procura de q unidades de um bem relativamente ao seu preço unitário p em unidades monetárias (u. m.) é descrita por

$$q(p) = 70 - 5p \quad , 0 < p < 14 .$$

(a) Qual a quantidade vendida ao preço de 8 u. m.?
(b) Determine a elasticidade da função procura quando o preço é de 8 u. m..
(c) Interprete economicamente o resultado obtido na alínea anterior.
(d) Para que preço a elasticidade da função procura é igual a - 1?
(e) Determine a elasticidade, em valor absoluto, da função procura relativamente ao preço.
(f) Esboce o gráfico do módulo da elasticidade da função procura relativamente ao preço.

42. Sendo m um número racional positivo e diferente de um, considere a função $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^m$.
Mostre que:
(a) Se $m > 1$ então $f'_+(0) = 0$;
(b) Se $m < 1$ então $f'_+(0) = +\infty$;
(c) A função f é estritamente crescente;
(d) A elasticidade de f é constante para todos os valores de $x > 0$, sendo sempre igual a m.

4. Primitivação

4.1 Definições e propriedades

Seja f uma função definida num intervalo aberto $]a,b[$. Queremos resolver o problema matemático:

Dada a função f, qual é a função diferenciável F cuja derivada verifica

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in]a,b[$?

À função F, se existir, chama-se uma **primitiva de** f ou uma antiderivada de f. Caso exista, a primitiva de f não é única, como já tínhamos verificado anteriormente no capítulo **3 Derivadas e Aplicações** – vide **Corolário 3.3.3** e **Corolário 3.3.4**.

Isto quer dizer que, quaisquer duas primitivas de uma mesma função f diferem numa constante, igual para todos os valores de x.

Notação 4.1 Sendo C uma constante real e arbitrária, ao conjunto de todas as primitivas de f escritas na forma

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

chama-se **integral indefinido** de f e à função f chama-se **função integranda**.

Ao processo que consiste em determinar uma primitiva e somar-lhe uma constante arbitrária de modo a obter o integral indefinido de uma função chama-se primitivação. À constante C chamamos constante de primitivação.

Exemplo 4.1 — Primitivação da função constante. O integral indefinido da função constante, definida por $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, é dado por

$$\int a\,dx = ax + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, uma vez que $(ax+C)' = a$. ■

Porém, a derivada da função constante é dada por $f'(x) = 0$ para todo x, logo

$$\int 0\,dx = C$$

Reparemos que, após a derivação de $f(x) = a$, se primitivarmos podemos não recuperar $f(x) = a$.
Deste modo, podemos afirmar que primitivação e derivação são processos inversos, a menos de uma constante, ou seja,

- $$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \tag{4.1}$$
- $$\int f'(x)\,dx = f(x) + C \tag{4.2}$$

  onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

A primitivação pode ser simplificada se recorrermos às seguintes propriedades:

- Se cada uma das funções f e g admite uma primitiva então

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{4.3}$$

- Se a função f admite uma primitiva então

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \tag{4.4}$$

  para todo real $k \neq 0$.

Exemplo 4.2 — Primitivação da função afim. A função afim é definida por $f(x) = ax+b$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ são constantes fixas. O seu integral indefinido é dado por

$$\int (ax+b)\,dx = \int ax\,dx + \int b\,dx = a\int x\,dx + \int b\,dx = a\frac{x^2}{2} + bx + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

O conceito de integral indefinido de f pode interpretar-se geometricamente, pois representa uma família de funções, em que o declive das rectas tangentes aos respectivos gráficos em diferentes pontos com abcissa x é o mesmo.

Exemplo 4.3 — Declive da recta tangente. Suponha que o declive da recta tangente ao gráfico de uma certa função F em cada ponto $P = (x, F(x))$ é igual ao simétrico da abcissa de P, ou seja,

$$F'(x) = -x$$

Esta condição é válida para a família de funções quadráticas:

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + C$$

sendo C uma constante real e arbitrária . Além disso, se fixarmos o ponto $P = (0,1)$ então existe uma única função F, cujo gráfico contém o ponto. Esta está definida por

$$F_1(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$$

■

Admitindo que conhecemos $f(x)$ e $F(x)$, se quisermos mostrar que

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

podemos derivar F para recuperar a função integranda f.

■ **Exemplo 4.4** Sem recorrer à primitivação, vamos verificar a seguinte fórmula de primitivação:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C \tag{4.5}$$

Derivando obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C\right)' &= \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+x(1+x^2)^{-1/2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Atendendo a que a primitivação é o processo inverso da derivação a menos de uma constante, concluímos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C \tag{4.6}$$

■

✓ Note que a primitiva da função $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ é, a menos da constante C, a inversa da função hiperbólica $x \mapsto \sinh(x)$, denotada por

$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

no **Desafio 1.50** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**.

Desafio 4.1 — Derivada da função logística. Para a função logística f do **Desafio 1.51** – vide capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**:

$$f(x) = \frac{1}{1+a^{-x}}$$

verifique que

$$f'(x) = \ln(a)a^x\,(1 - f(x))^2.$$

Use a fórmula acima para determinar as primitivas abaixo, envolvendo derivadas de ordem superior – vide seção **3.4 Derivadas de** 2^a **ordem e Derivadas de ordem superior** do capítulo **3 Derivadas e Aplicações**:

$$\int f''(x)\,dx \quad \& \quad \int f'''(x)dx.$$

4.2 Regras de Primitivação Imediata

4.2.1 Exemplos

Começamos por apresentar regras de primitivação imediata para algumas funções elementares. Em primeiro lugar, consideremos as funções potência de base x e as funções exponenciais de expoente x.

■ **Exemplo 4.5 — Primitivação da função potência definida por** $f(x) = x^{-1}$**.** Dada $f(x) = \frac{1}{x}$ procuramos encontrar $F(x)$ cuja derivada verifique $F'(x) = \frac{1}{x}$. Recorrendo ao cálculo de derivadas podemos escolher $F(x) = \ln|\,x\,|$ uma vez que

$$F(x) = \ln|\,x\,| \Longrightarrow F'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Assím concluímos que

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|\,x\,| + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 4.6 — Primitivação de funções potência definidas por** $f(x) = x^n$**,** $n \neq -1$**.** Seja $f(x) = x^n$, $n \neq -1$. Procuramos $F(x)$ cuja derivada verifique $F'(x) = x^n$. Usando a regra de derivação da potência vem

$$g(x) = x^{n+1} \Longrightarrow g'(x) = (n+1)x^n\,.$$

Podemos escolher $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ uma vez que

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Longrightarrow F'(x) = x^n\,.$$

Daí resulta

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{4.7}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 4.7 — Primitivação das funções exponenciais definidas por** $f(x) = a^x$**.** Seja $f(x) = a^x$, $a \in]0,1[$ ou $a \in]1,+\infty[$. Procuramos $F(x)$ cuja derivada verifique $F'(x) = a^x$. Recordamos a fórmula de derivação

$$g(x) = a^x \Longrightarrow g'(x) = a^x \ln a\,.$$

Vamos escolher $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ dado que

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} \Longrightarrow F'(x) = a^x\,.$$

Daí resulta

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{4.8}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

Consideremos as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

■ **Exemplo 4.8 — Primitivação das funções hiperbólicas.** Recorrendo ao cálculo de derivadas ilustrado no **Desafio 3.5** do capítulo **3 Derivadas e Aplicações**:

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad \wedge \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

obtemos, respetivamente

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C \quad \wedge \quad \int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

Consideremos agora as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente e secante.

■ **Exemplo 4.9 — Primitivação das funções trigonométricas usuais.** Recorrendo ao cálculo de derivadas vem

$$(\sin x)' = \cos x \quad \wedge \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Daí obtemos respetivamente

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \quad \wedge \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. De modo análogo, prova-se que

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \quad \wedge \quad \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, uma vez que

$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad \wedge \quad (\sec x)' = \sec x \tan x$$

■

Desafio 4.2 — **Primitivas envolvendo funções cotangente e cosecante.** Determine as funções f, g e h para as quais

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \operatorname{cotg}(x) + C_1, \\
\int g(x)\,dx &= \operatorname{cosec}(x) + C_2, \\
\int h(x)\,dx &= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cosec}(x) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{cotg}(x) + C_3,
\end{aligned}$$

onde $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Por fim, consideremos duas funções trigonométricas inversas arcoseno e arcotangente, e um exemplo análogo, envolvendo a derivação de funções hiperbólicas inversas.

■ **Exemplo 4.10 — Primitivação das funções trigonométricas inversas.** Aplicando a fórmuda da derivada da função inversa prova-se que

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \wedge \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Daí obtemos respetivamente

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \quad \wedge \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 4.11 — Revisão da fórmula de derivação da função inversa.** Suponhamos agora que pretendemos determinar a função f tal que

$$\int f(x)\,dx = \cosh^{-1}(x) + C \tag{4.9}$$

onde $\cosh^{-1} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ denota a inversa da função cosseno hiperbólico.

Primeiramente, observe que o **Teorema 3.2.4** abordado no capítulo **3 Derivadas e Aplicações** permite-nos escrever

$$(\cosh^{-1})'(x) = \frac{1}{\cosh'(y)}, \quad \text{onde} \quad y = \cosh^{-1}(x).$$

Da equivalência

$$y = \cosh^{-1}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cosh(y)$$

e das identidades

$$\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1 \quad \text{e} \quad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

obtemos, para valores de $x > 1$ que

$$\begin{aligned}(\cosh^{-1})'(x) &= \frac{1}{\cosh'(y)} \\ &= \frac{1}{\sinh(y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(y) - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

Portanto, a família de funções $x \mapsto \cosh^{-1}(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) fornece-nos uma família de primitivas para função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

■

✓ À semelhança do raciocínio adoptado na seção **3.2.5 Derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas** do capítulo **3 Derivadas e Aplicações**, não foi necessário em momento algum determinar uma fórmula explícita de $\cosh^{-1} : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ para calcular a sua derivada. Apenas precisámos de garantir a monotonia do gráfico, via o estudo da primeira derivada de $x \mapsto \cosh(x)$ – a função $x \mapsto \sinh(x)$ – e de excluir os pontos $x = \cosh(y)$, para os quais $\sinh(y) \neq 0$.

Para tal, recorremos exclusivamente aos resultados já abordados no **Desafio 1.48** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos**, e no **Desafio 3.5** do capítulo **3 Derivadas e Aplicações**.

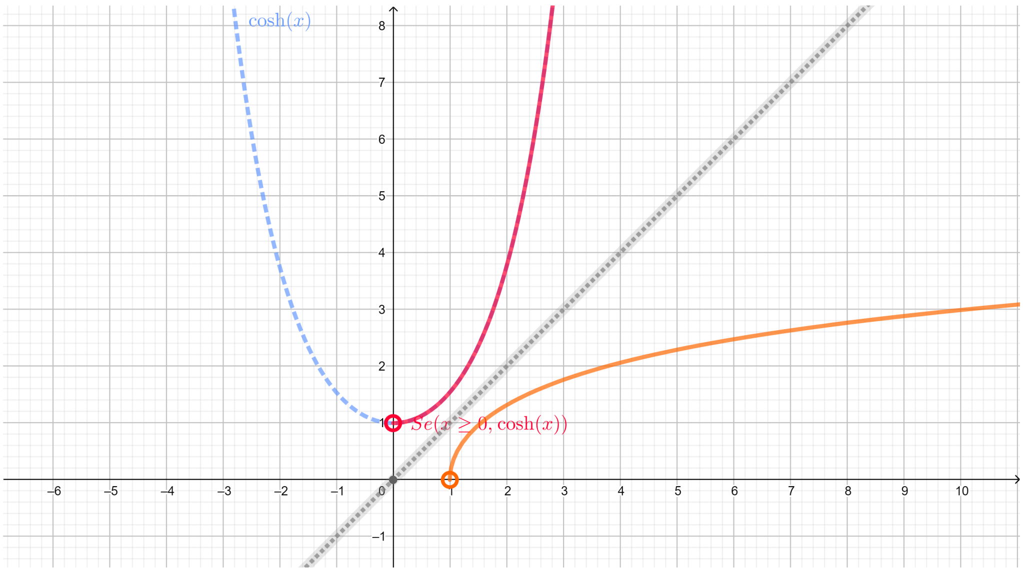


Figura 4.1: Ilustração gráfica do **Exemplo 4.11** com recurso **Corolário 1.4.6**. Para determinar graficamente a **inversa da função cosseno hiperbólico** como sendo o gráfico representado a laranja, obtido por reflexão do gráfico a magenta relativamente à recta $y = x$ (recta pontilhada a cinza) considerámos apenas os valores de $x \geq 0$ – que correspondem aos valores em que $x \mapsto \cosh(x)$ é estritamente crescente (gráfico a magenta), de modo a garantirmos a injectividade. Adicionalmente, para determinarmos a derivada da função inversa, excluímos o ponto y para o qual $\sinh(y) = 0$. Da equação $x = \cosh(y)$ retirámos que o ponto $(0,1) = (0, \cosh(0))$ – ponto aberto aberto a magenta –do gráfico da função cosseno hiperbólico deverá ser excluído no cálculo da derivada da função inversa via **Teorema 3.2.4**. Com esta restrição garantimos automaticamente a exclusão do o ponto $(1,0) = (1, \cosh^{-1}(1))$ – ponto aberto aberto a laranja – do cálculo da derivada $(\cosh^{-1})'(x)$.

4.2.2 Tabela de Primitivação Imediata

Quando se pretende determinar o integral indefinido de f, é preciso procurar outra função F cuja derivada F' seja igual à função integranda f. A função encontrada é então igual, a menos de uma constante, ao integral indefinido de f. Este procedimento decorre imediatamente das definições de primitiva e de integral indefinido de f. Assim parece óbvio que a partir de uma tabela com regras de derivação se obtém uma tabela correspondente com regras de primitivação e vice-versa. A tabela constituída por um conjunto de primitivas e construída dessa forma diz-se tabela de primitivação imediata.

Tabela 4.1: Regras de primitivação imediata

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C$
x^p	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sinh x$	$\cosh x+C$
$\cosh x$	$\sinh x+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\operatorname{tg} x$	$\ln\|\sec x\|+C$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x+C$
$\sec x \operatorname{tg} x$	$\sec x+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$

4.2.3 Regras de Primitivação Imediata Generalizadas

Consideremos agora uma mudança de escala na variável independente.

■ **Exemplo 4.12 — Primitiva envolvendo a função cosseno.** Seja $f(x) = \cos(\alpha x)$, $\alpha \neq 0$. Procuramos $F(x)$ cuja derivada verifique $F'(x) = \cos(\alpha x)$. Recorrendo ao cálculo de derivadas vem

$$(\sin(\alpha x))' = \alpha \cos(\alpha x)$$

Daí obtemos

$$\int \alpha \cos(\alpha x)\, dx = \sin(\alpha x) + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.
Reparemos que podemos multiplicar uma expressão por uma constante não nula α e pelo seu inverso $1/\alpha$, isto é,

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\alpha f(x).$$

Então temos

$$\int \cos(\alpha x)\, dx = \int \frac{1}{\alpha}\alpha \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int \alpha \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + C.$$

■

✓ De modo análogo, prova-se que

$$\int \sin(\alpha x)\, dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Desafio 4.3 — Primitivas envolvendo funções trigonométricas. Calcule as seguintes primitivas:

$$\int \sin(\alpha x + \beta)\, dx \quad \& \quad \int \cos(\alpha x + \beta)\, dx.$$

■ **Exemplo 4.13 — Primitiva envolvendo função arco tangente.** Seja $f(x) = \dfrac{1}{\beta^2 + x^2}$, $\beta \neq 0$. Procuramos $F(x)$ cuja derivada verifique $F'(x) = f(x)$. Recorrendo ao cálculo de derivadas vem

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{\beta}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{\beta^2 + x^2}{\beta^2}} = \frac{\beta}{\beta^2 + x^2}$$

Daí obtemos

$$\int \frac{\beta}{\beta^2 + x^2}\, dx = \arctan\left(\frac{x}{\beta}\right) + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.
Reparemos que podemos multiplicar uma expressão por uma constante não nula β e pelo seu inverso $1/\beta$, isto é,

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\beta f(x).$$

Então temos

$$\int \frac{1}{\beta^2 + x^2}\, dx = \int \frac{1}{\beta}\frac{\beta}{\beta^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x}{\beta}\right) + C.$$

■

✓ De modo análogo, para $\beta > 0$ prova-se que

$$\int \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{\beta}\right) + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Desafio 4.4 — Primitiva envolvendo função arco cosseno. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$, determine a função f tal que

$$\int f(x)dx = \arccos\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

O que pode concluir sobre a primitiva

$$\int f'(x)\,dx?$$

4.3 Primitação envolvendo composição de funções

Teorema 4.3.1 Dada a função integranda f, suponhamos que existem funções deriváveis u e g tais que

$$f(x) = u'(x)g'(u(x)).$$

Então a função composta F, definida por $F(x) = g(u(x))$, é uma primitiva de f e

$$\int f(x)\,dx = g(u(x)) + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Demonstração. Com efeito, pela regra da derivação da função composta temos

$$F'(x) = (g \circ u)'(x) = u'(x)g'(u(x)) = f(x)$$

■

Para cada escolha apropriadas de g obtemos uma fórmula de primitivação.

Corolário 4.3.2 — Primitivação envolvendo a função arco tangente. Por exemplo, fazendo $g(x) = \arctan x$ temos

$$f(x) = u'(x)\frac{1}{1+u^2(x)} = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

uma vez que

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Logo

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(u(x)) + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Desafio 4.5 — Primitiva envolvendo a equação da parábola. Verifique que

$$\int \frac{1}{a(x-h)^2+k}dx = \frac{1}{\sqrt{ak}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{k}}(x-h)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

desde que as constantes $a,b\in\mathbb{R}$ satisfaçam as condições $a\neq 0$ e $\frac{a}{k}>0$.

De seguida, use a igualdade acima para determinar a primitiva

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx.$$

4.3.1 Primitação envolvendo a derivada logarítmica

Suponhamos que queremos determinar

$$\int \tan x\,dx\,.$$

Tendo em conta que

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{(-\sin x)}{\cos x}=-\frac{(\cos x)'}{\cos x}$$

precisamos de uma fórmula para determinar a primitivação do quociente entre a derivada da função e a própria função.

Corolário 4.3.3 — Primitivação do quociente entre a derivada e a função. Seja u uma função derivável. Então

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\ln|\,u(x)\,|+C$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Demonstração. Usando o **Teorema 4.3.1** com $g(x)=\ln|\,x\,|$ vem

$$f(x)=u'(x)\frac{1}{u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

■

■ **Exemplo 4.14 — Primitivação da função tangente.** Verificamos que

$$\int \tan x\,dx=\int -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx=-\ln|\,\cos x\,|+C$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Atendendo a que $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ podemos escrever

$$\int \tan x\,dx=\ln|\,\sec x\,|+C\,.$$

■

■ **Exemplo 4.15 — Primitivação envolvendo funções racionais.** Verificamos que

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx=\int \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante real arbitrária. ■

Desafio 4.6 — Primitivas envolvendo funções hiperbólicas. Para valores de $\alpha\neq 0$ e $\beta\in\mathbb{R}$ determine a primitiva de

$$\int \frac{\cosh(\alpha x+\beta)}{\sinh(\alpha x+\beta)+\beta-\alpha}\,dx.$$

Desafio 4.7 — Primitivas envolvendo a função logaritmo e a função arco tangente. Determine a função f para a qual se tem a igualdade

$$\int \frac{f(x)}{x^2+2x+2}\,dx=\ln\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\arctan(x+1)+C,$$

onde C é uma constante real arbitrária.

4.3.2 Primitivação de funções potência

Corolário 4.3.4 — Primitivação do produto entre a função e a sua derivada. Seja u uma função derivável. Então

$$\int u'(x)u(x)\,dx = \frac{1}{2}u^2(x)+C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Demonstração. Aplicando a regra da derivada do produto $u \times u$ obtemos

$$(u\times u)'(x) = 2u'(x)u(x) \iff \frac{1}{2}(u\times u)'(x) = u'(x)u(x) \iff \left(\frac{1}{2}u^2\right)'(x) = u'(x)u(x)$$

■

■ **Exemplo 4.16 — Primitivação envolvendo funções hiperbólicas.** As propriedades de derivação das funções hiperbólicas ilustradas no **Desafio 3.5** do **Capítulo 3 Derivadas e Aplicações** permitem-nos obter duas fórmulas distintas de primitivação:

$$\int \sinh x \cosh x\,dx = \int \sinh x(\sinh x)'\,dx = \frac{\sinh^2 x}{2} + C_1$$

$$\int \sinh x \cosh x\,dx = \int (\cosh x)' \cosh x\,dx = \frac{\cosh^2 x}{2} + C_2$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Adicionalmente, a propriedade

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

ilustrada no **Desafio 1.48** do **Capítulo 1 Funções Elementares e Gráficos**, permite-nos concluir que ambas as primitivas diferem pela constante $C = \frac{1}{2}$, uma vez que

$$\frac{\cosh^2 x}{2} = \frac{\sinh^2 x}{2} + \frac{1}{2},$$

o que atesta que ambas as primitivas determinadas satisfazem as condições do **Corolário 3.3.4** do **Capítulo 3 Derivadas e Aplicações**. ■

✓ Poderia ter também considerado a identidade $\sinh x \cosh x = \frac{1}{2}\sinh(2x)$ para concluir que a função

$$x \mapsto \frac{\cosh(2x)}{4}$$

também é uma primitiva de $x \mapsto \sinh x \cosh x$ – neste caso, imediata.

■ **Exemplo 4.17** Verificamos que

$$\int \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\frac{\arcsin^2 x}{2} + C = \arcsin^2 x + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

A propriedade acima ilustrada pode ser ainda generalizada para funções potência de ordem p, com $p \neq -1$.

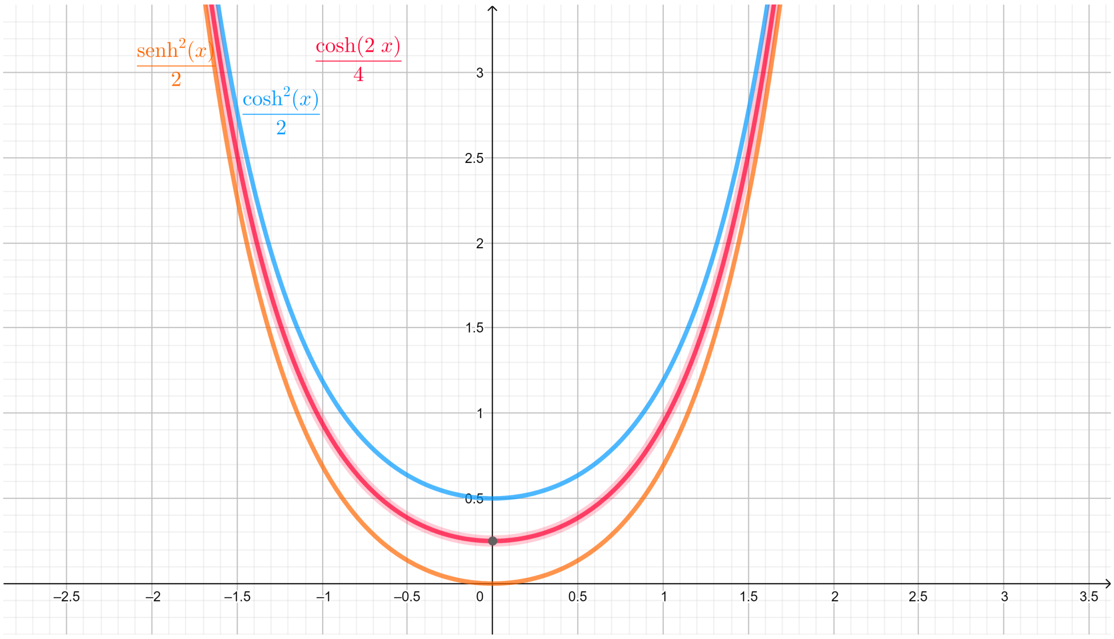


Figura 4.2: Representação gráfica das primitivas obtidas **Exemplo 4.16**, e da primitiva imediata – gráfico a magenta – caso tivéssemos usado a identidade identidade $\sinh x \cosh x = \frac{1}{2}\sinh(2x)$.

Corolário 4.3.5 — Primitivação de funções potência. Seja u uma função derivável. Se $p \neq -1$ então

$$\int u'(x)u^p(x)\,dx = \frac{u^{p+1}(x)}{p+1} + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Demonstração. Usando a proposição com $g(x) = \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ vem

$$f(x) = u'(x)\frac{1}{p+1}(p+1)u^p(x) = u'(x)u^p(x).$$

■

■ **Exemplo 4.18** Verificamos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{x^3}+3x+3\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \\
&= \int \left(x^{3/2}+3x+3x^{1/2}+1\right)x^{-1/3}\,dx \\
&= \int x^{7/6}+3x^{2/3}+3x^{1/6}+x^{-1/3}\,dx \\
&= \frac{6}{13}x^{13/6}+\frac{9}{5}x^{5/3}+\frac{18}{7}x^{7/6}+\frac{3}{2}x^{2/3}+C \\
&= \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C
\end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

4.3.3 Primitivação de funções exponenciais

Corolário 4.3.6 — Primitivação de exponenciais. Seja u uma função derivável. Se $a \in (]0,1[\cup]1,+\infty[)$ então

$$\int u'(x)a^{u(x)}\,dx = a^{u(x)} + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Demonstração. Usando a proposição com $g(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$ vem

$$f(x) = u'(x)\frac{1}{\ln a}a^{u(x)}\ln a = u'(x)\frac{a^{u(x)}}{\ln a}$$

■

■ **Exemplo 4.19** Verificamos que

$$\begin{aligned}
\int e^x \cosh x\,dx &= \int e^x \frac{(e^x + e^{-x})}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x} + 1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx \\
&= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

4.3.4 Tabela de Primitivação Generalizada

A tabela abaixo corresponde a uma tabela de primitivação imediata generalizada, obtida a partir do **Teorema 4.3.1**.

Tabela 4.2: Regras de primitivação generalizadas

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$u'(x)[u(x)]^p$	$\frac{[u(x)]^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\mid u(x)\mid +C$
$\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$	$\arctan[u(x)]+C$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$	$\arcsin[u(x)]+C$
$u'(x)\sin[u(x)]$	$-\cos[u(x)]+C$
$u'(x)\cos[u(x)]$	$\sin[u(x)]+C$
$u'(x)\tan[u(x)]$	$\ln\mid\sec[u(x)]\mid +C$
$u'(x)\cot[u(x)]$	$\ln\mid\sin[u(x)]\mid +C$
$u'(x)\sec^2[u(x)]$	$\tan[u(x)]+C$
$u'(x)\csc^2[u(x)]$	$-\cot[u(x)]+C$
$u'(x)\sec[u(x)]\tan[u(x)]$	$\sec[u(x)]+C$
$u'(x)\csc[u(x)]\cot[u(x)]$	$-\csc[u(x)]+C$
$u'(x)a^{u(x)}$	$\frac{a^{u(x)}}{\ln a}+C$
$u'(x)\sinh[u(x)]$	$\cosh[u(x)]+C$
$u'(x)\cosh[u(x)]$	$\sinh[u(x)]+C$

4.4 Métodos de Primitivação

4.4.1 Método de Primitivação por Partes

O integral indefinido de um produto de funções não é igual ao produto dos integrais indefinidos, isto é,

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$$

Qual é então o desenvolvimento de

$$\int f(x)g(x)\,dx?$$

Seja g uma função derivável e f uma função que tenha uma primitiva $F(x)$. Aplicando a regra de derivação para o produto $F(x)g(x)$ vem

$$(F(x)g(x))' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

sendo equivalente a

$$\int [F'(x)g(x) + F(x)g'(x)]\,dx = F(x)g(x)$$

Usando a propriedade da soma, vem ainda

$$\int F'(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx = F(x)g(x)$$

Atendendo a $F'(x) = f(x)$ temos

$$\int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx = F(x)g(x)$$

Em geral, quando quiser primitivar um produto de duas funções f e g, pode aplicar o método de primitivação por partes:

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx \tag{4.10}$$

sendo F uma primitiva de f.
Tendo em vista a implementação do método, deve escolher-se de modo mais conveniente a função f a primitivar. Nesse sentido, vamos estabelecer algumas regras para o cálculo da primitiva do produto por esse método.

1. Quando se conhece a primitiva de apenas uma das funções, inicia-se o processo começando pela primitivação da própria.

   ■ **Exemplo 4.20**

$$\begin{aligned}\int x\ln^2 x\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

■

2. Registe-se que o método também se desenvolve para obter a primitivação de uma única função. Basta escolher $f(x) = 1$ para começar a primitivar.

   ■ **Exemplo 4.21**

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= \int 1.\arcsin x\,dx\\ &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

■

3. Quando ambas as funções têm primitiva, o processo deve arrancar com a primitivação da função que menos se simplifica por derivação.

■ **Exemplo 4.22**

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}\,dx &= \int x(x+1)^{-3/4}\,dx \\
&= 4x(x+1)^{\frac{1}{4}} - \int 4(x+1)^{\frac{1}{4}}\,dx \\
&= 4x(x+1)^{\frac{1}{4}} - \frac{16}{5}(x+1)^{\frac{5}{4}} + C \\
&= 4x\sqrt[4]{x+1} - \frac{16}{5}(x+1)\sqrt[4]{x+1} + C \\
&= \frac{4}{5}(x-4)\sqrt[4]{x+1} + C
\end{aligned}$$

■

Agora suponhamos que quer determinar a primitiva de um produto de um polinómio por uma função transcendente. Assim

(i) Se a derivada da função transcendente ainda é uma função transcendente então deve-se primitivar a própria.

■ **Exemplo 4.23**

$$\begin{aligned}
\int x\cosh x\,dx &= x\sinh x - \int \sinh x\,dx \\
&= x\sinh x - \cosh x + C
\end{aligned}$$

■

(ii) Se a derivada da função transcendente já não é uma função transcendente então deve-se primitivar o polinómio.

■ **Exemplo 4.24**

$$\begin{aligned}
\int x\arctan x\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x - \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

■

4. Primitivando por partes duas vezes consecutivas pode acontecer que regresse à primitiva de origem. Nessa situação deve tratar a igualdade como uma equação em que a incógnita é precisamente a primitiva desconhecida. Encontrará a solução se isolar a primitiva num dos membros da equação.

■ **Exemplo 4.25** Primitivando por partes duas vezes obtém-se

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C \tag{4.11}$$

Começamos por escolher, por exemplo $f(x) = e^{ax}$, e desenvolvemos

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

Por outro lado, escolhendo novamente $f(x) = e^{ax}$, temos

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \cos bx\, dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx \right) \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx\, dx
\end{aligned}$$

donde

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx \tag{4.12}$$

ou seja,

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx \tag{4.13}$$

que é equivalente a,

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \cos bx\, dx &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx \right) \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2} (a e^{ax} \cos bx + b e^{ax} \sin bx) \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)
\end{aligned}$$

■

4.4.2 Método de Primitivação por Substituição

Tem também ao seu dispor um outro método, conhecido por método de primitivação por substituição:

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) g'(t)\, dt = F(g(t)) + C = F(x) + C \tag{4.14}$$

Esclareça-se que este método se desenvolve por diferentes fases:

1. A mudança de variável por meio de $x = g(t)$
2. A diferenciação da variável x origina $dx = g'(t)dt$
3. A substituição de x e dx dá origem a uma nova função de t

$$(F \circ g)'(t) = f[g(t)]g'(t)$$

4. O cálculo de uma primitiva de $(F \circ g)'(t)$ vai originar $(F \circ g)(t)$
5. O regresso à variável x por meio de $x = g(t)$

✓ Este método de primitivação é complementar à primitivação envolvendo a composição de funções – vide **Teorema 4.3.1**.

Em geral é utilizado em casos em que não é imediato obter uma fórmula fechada com base na tabela ilustrada na subseção **4.3.4 Tabela de Primitivação Generalizada**.

■ **Exemplo 4.26 — Composição de funções vs. substituição.** A primitiva

$$\int (5x^3-4)^7 x^2 dx$$

pode ser calculada de dois modos distintos:

Via composição de funções. Observando que

$$(5x^3-4)' = 15x^2$$

segue que

$$\begin{aligned}\int (5x^3-4)^7 x^2 dx &= \frac{1}{15}\int (5x^3-4)^7 15x^2 dx\\ &= \frac{1}{15}\int (5x^3-4)^7 (5x^3-4)' dx\\ &= \frac{1}{15}\times\frac{1}{8}\int 8(5x^3-4)^{8-1}(5x^3-4)' dx\\ &= \frac{1}{120}(5x^3-4)^8 + C,\end{aligned}$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

Via substituição. Tome-se $t = 5x^3-4$. Segue então que

$$dt = (5x^3-4)' dx = 15x^2 dx.$$

ou equivalentemente,

$$x^2 dx = \frac{1}{15} dt.$$

Logo

$$\int (5x^3-4)^7 x^2 dx = \int \frac{1}{15} t^7 dt.$$

Usando agora a tabela da subseção **4.2.2 Tabela de Primitivação Imediata** concluímos que

$$\int \frac{1}{15} t^7 dt = \frac{1}{120} t^8 + C,$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Recuperando a mudança de variável $t = (5x^3-4)^7$, concluímos que

$$\int (5x^3-4)^7 x^2 dx = \frac{1}{120}(5x^3-4)^8 + C,$$

como pretendido. ■

■

Desafio 4.8 Determine

$$\int \frac{e^{3x-1}}{\sqrt{1-e^{6x}}} dx$$

por dois métodos distintos:

1. Via derivação da função composta;
2. Via método da substituição.

■ **Exemplo 4.27 — Por partes vs substituição.** A família de primitivas

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$$

terá de ser forçosamente calculada por substituição. Começemos por verificar que o método de primitivação por partes não é a melhor escolha neste contexto:

Usando primitivação por partes. Primeiramente,

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int F(x)g(x)dx,$$

onde

$$F(x) = e^x \text{ e } g(x) = \tfrac{e^x}{1+e^x},$$

Segue então que

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx \quad = \quad F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx,$$

onde G é uma primitiva de g.

Usando agora o facto que g corresponde à derivada logarítmica de $x \mapsto e^x + 1$, i.e.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} \\ &= (\ln(1+e^x))', \end{aligned}$$

segue então, para a escolha $G(x) = \ln(1+e^x)$ que

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = e^x \ln(1+e^x) - \int e^x \ln(1+e^x)dx.$$

Agora, para continuarmos a calcular

$$\int e^x \ln(1+e^x)dx$$

teríamos que forçosamente considerar a substituição $t = e^x$ para transformarmos numa primitiva mais fácil de calcular por partes:

$$\begin{aligned} \int e^x \ln(1+e^x)dx &= \int \ln(1+t)dt \\ &= \int t' \ln(1+t)dt \\ &= \ldots \\ &= \text{(conclua, como exercício).} \end{aligned}$$

■

Por substituição. Ao começarmos por fazer a mudança de variável $e^x = t$, podemos facilmente verificar, após calcularmos o diferencial[1] dx:

$$dx = \frac{1}{t}dt$$

[1] Note que $e^x = t$ é equivalente a $x = \ln(t)$.

que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t}\,dt \\
&= \int \frac{t}{1+t}\,dt \\
&= \int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= t-\ln(1+t)+C \\
&= e^x-\ln(1+e^x)+C.
\end{aligned}
$$

■

■

■ **Exemplo 4.28 — Por partes ou por substituição.** Vamos calcular a primitiva

$$\int x\sqrt{3-x}\,dx$$

por dois métodos distintos. Deixamos ao cargo do leitor a verificação de que ambas as primitivas ($C_1=C_2=0$), após algumas simplificações coincidem com

$$2(x-3)(x+2)\frac{\sqrt{3-x}}{5}.$$

Para mais detalhes, vide os cálculos simbólicos realizados no GeoGebra:

`https://www.geogebra.org/calculator/bandxkkm`

Por partes.

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{3-x}dx &= \int x(3-x)^{\frac{1}{2}}dx \\
&= -\frac{2}{3}x(3-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\int(3-x)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= -\frac{2}{3}x(3-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(3-x)^{\frac{5}{2}}+C_1,
\end{aligned}
$$

onde $C_1\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

Substituição. Para a substituição $x=3-t^2$, o diferencial dx é dado por

$$dx=-2t\,dt.$$

Segue então que

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{3-x}dx &= \int(3-t^2)\,t.(-2t\,dt) \\
&= \int(-6t^2+2t^4)dt \\
&= -2t^3+\frac{2}{5}t^5+C_2 \\
&= -2(3-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}}+C_2
\end{aligned}
$$

onde $C_2\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

■

Desafio 4.9 — Substituição. Use o que aprendeu nos exemplos anteriores para calcular as primitivas abaixo:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{5+x}}dx$;
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{5+x}}dx$.

■ **Exemplo 4.29 — Por partes e por substituição.** À semelhança do **Exemplo 4.21**, podemos também adoptar primitivação por partes para começar a calcular $\int \arccos(5x-3)dx$ por partes:

$$\begin{aligned}
\int \arccos(5x-3)dx &= \int x' \arccos(5x-3)dx \\
&= x\arccos(5x-3) - \int x\frac{-5}{\sqrt{1-(5x-3)^2}}dx \\
&= x\arccos(5x-3) + \int \frac{5x}{\sqrt{1-(5x-3)^2}}dx
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t = 5x-3$, segue que

$$5x = t+3 \quad \& \quad dx = \frac{1}{5}\,dt.$$

Esta substituição conduz-nos à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x}{\sqrt{1-(5x-3)^2}}dx &= \int \frac{t+3}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{5}dt \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{3}{5}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt
\end{aligned}$$

Esta última envolve a soma de duas primitivas [quase] imediatas, se nos lembrarmos das seguintes regras de derivação:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= (-\arccos(t))', \\
(-\sqrt{1-t^2})' &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.
\end{aligned}$$

Concluímos então, após recuperarmos a mudança de variável $t = 5x-3$, que

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1-(5x-3)^2}}dx = -\frac{1}{5}\sqrt{1-(5x-3)^2} - \frac{3}{5}\arccos(5x-3) + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Portanto,

$$\int \arccos(5x-3)dx = \left(x - \frac{3}{5}\right)\arccos(5x-3) - \frac{3}{5}\sqrt{1-(5x-3)^2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitrária.}$$

■

O início do processo de primitivação poderia-se ter iniciado com a substituição $t = 5x - 3$:

$$\int \arccos(5x-3)dx = \frac{1}{5}\int \arccos(t)\ dt$$

seguido por primitivação por partes:

$$\frac{1}{5}\int \arccos(t)\ dt = \frac{t}{5}\arccos(t) + \frac{1}{5}\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Deixamos ao cargo do leitor a conclusão dos cálculos auxiliares em falta.

Desafio 4.10 — Substituição por arco seno. Use a substituição $t = \arcsin(x^2)$ para determinar a primitiva abaixo:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}\,(25+\arcsin^2(x^2))}dx$$

4.5 Primitivação de Funções Racionais

Definição 4.5.1 Funções Racionais

Sejam $n \geq 0$, $m > 0$ inteiros e $a_i\,(i = 0,\dots,n)$, $b_j\,(j = 0,\dots,m)$ números reais tais que $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$.

Diz-se que f é uma função racional se

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} \end{array}$$

onde $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

A função racional diz-se que:

- É própria se $n < m$;
- É imprópria se $n \geq m$. Neste caso, podemos efetuar a divisão de polinómios. Assim, obtemos $s(x)$ e $r(x)$ tais que
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$
onde o grau de r é inferior ao grau de q e o grau de s é $n - m$.

4.5.1 Frações parciais envolvendo polinómios de grau 1

Suponhamos que temos uma função racional definida por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde q é um polinómio de grau 1, ou seja $q(x) = ax + b$, $a \neq 0$. O seu domínio é $D = \mathbb{R} - \{-\frac{b}{a}\}$.

Como determinar $\displaystyle\int \frac{p(x)}{ax+b}dx$?

Se p é constante, isto é, $p(x) = k \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D$ então a primitivação é imediata. Temos

$$\int \frac{k}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Caso contrário, o grau de p é superior ou igual a 1. Assim é necessário efetuar a divisão de p por q. Daí resulta um polinómio $s(x)$ e uma constante r tais que

$$\frac{p(x)}{ax+b} = s(x) + \frac{r}{ax+b}$$

onde o o grau de s é $n-1$. Primitivando agora vem

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{ax+b}\,dx &= \int \left(s(x)+\frac{r}{ax+b}\right)\,dx\\ &= \int s(x)\,dx+\int \frac{r}{ax+b}\,dx\\ &= \int s(x)\,dx+\frac{r}{a}\ln|ax+b|\end{aligned}$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

4.5.2 Frações parciais envolvendo polinómios de grau 2

Suponhamos agora que temos uma função racional definida por $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde q é um polinómio de grau 2, ou seja $q(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. O seu domínio é dado por $D=\{x\in\mathbb{R}: ax^2+bx+c\neq 0\}$.
Como determinar $\displaystyle\int \frac{p(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$?
Se p é um polinómio de grau 1 ou de grau 0, isto é, $p(x)=cx+d$, então temos

$$\begin{aligned}\int \frac{cx+d}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{cx}{ax^2+bx+c}\,dx+\int \frac{d}{ax^2+bx+c}\,dx\\ &= c\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx+d\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx\end{aligned}$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Caso contrário, o grau de p é superior ou igual a 2. Assim é necessário efetuar a divisão de p por q. Daí resulta dois polinómio $s(x)$ e $r(x)$ tais que

$$\frac{p(x)}{ax^2+bx+c}=s(x)+\frac{r(x)}{ax^2+bx+c}$$

onde o o grau de s é $n-2$ e o grau de r é inferior a 2. Primitivando vem

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \left(s(x)+\frac{r(x)}{ax^2+bx+c}\right)\,dx\\ &= \int s(x)\,dx+\int \frac{r(x)}{ax^2+bx+c}\,dx\\ &= \int s(x)\,dx+\frac{r}{a}\ln|ax+b|+C\end{aligned}$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.
Nos próximas duas proposições mostramos como determinar a primitivação de

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} \quad \text{e} \quad \frac{x}{ax^2+bx+c}.$$

Teorema 4.5.1 Dado o polinómio de grau 2, $q(x)=ax^2+bx+c$, consideremos $f(x)=\frac{1}{q(x)}$.

1. Se q tiver apenas uma raíz real r então

$$q(x)=a(x-r)^2$$

Logo

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{a(x-r)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int (x-r)^{-2}\,dx = -\frac{1}{a(x-r)} + C \tag{4.15}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

2. Se q admite duas raizes reais distintas r e s então

$$q(x) = a(x-r)(x-s)$$

A correspondente fracção racional pode decompor-se em dois elementos simples

$$f(x) = \frac{1}{a(x-r)(x-s)} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-s}$$

sendo A e B constantes reais a determinar.
Reduzindo ambas as fracções ao mesmo denominador comum obtemos

$$\frac{1}{a(x-r)(x-s)} = \frac{aA(x-s)+aB(x-r)}{(x-r)(x-s)}$$

o que implica

$$1 = aA(x-s) + aB(x-r)$$

Fazendo primeiro $x = r$ e depois $x = s$ vem

$$A = \frac{1}{a(r-s)} \quad \wedge \quad B = \frac{1}{a(s-r)}$$

respetivamente, logo

$$\frac{1}{a(x-r)(x-s)} = \frac{1}{a(r-s)}\left(\frac{1}{x-r} - \frac{1}{x-s}\right)$$

e por consequência

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a(x-r)(x-s)}\,dx &= \int \frac{1}{a(r-s)}\left(\frac{1}{x-r} - \frac{1}{x-s}\right)dx \\
&= \frac{1}{a(r-s)}\left(\ln|\,x-r\,| - \ln|\,x-s\,|\right) + C \\
&= \frac{1}{a(r-s)}\ln\left|\frac{x-r}{x-s}\right| + C
\end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

3. Se q admite duas raízes complexas conjugadas $p+qi$ e $p-qi$ podemos escrever

$$q(x) = a[(x-p)^2 + q^2]$$

A primitiva de f pode determinar-se fazendo a substituição $x-p=qt$.

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{1}{a[(x-p)^2+q^2]}\,dx \\
&= \int \frac{q}{a[(qt)^2+q^2]}\,dt \\
&= \int \frac{1}{aq(t^2+1)}\,dt \\
&= \frac{1}{aq}\arctan t + C \\
&= \frac{1}{aq}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right)+C
\end{aligned}$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Teorema 4.5.2 Dado o polinómio de grau 2, $q(x)=ax^2+bx+c$, consideremos $f(x)=\frac{x}{q(x)}$.

1. Se q tiver apenas uma raíz real r então

   $$q(x)=a(x-r)^2$$

   Logo

   $$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{a(x-r)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int x(x-r)^{-2}\,dx \tag{4.16}$$

   Aplicando a fórmula de primitivação por partes vem

   $$\int x(x-r)^{-2}\,dx = -\frac{x}{x-r} - \int -\frac{1}{x-r}\,dx = -\frac{x}{x-r} + \ln|\,x-r\,| + C$$

   Por fim, obtemos

   $$\int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int x(x-r)^{-2}\,dx = -\frac{x}{a(x-r)} + \frac{\ln|\,x-r\,|}{a} + C$$

   onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.
2. Se q admite duas raizes reais distintas r e s então

   $$q(x)=a(x-r)(x-s)$$

   A correspondente fracção racional pode decompor-se em dois elementos simples

   $$f(x)=\frac{x}{a(x-r)(x-s)} = \frac{A}{x-r}+\frac{B}{x-s}$$

   sendo A e B constantes reais a determinar.
   Reduzindo ambas as fracções ao mesmo denominador comum obtemos

   $$\frac{x}{a(x-r)(x-s)} = \frac{aA(x-s)+aB(x-r)}{(x-r)(x-s)}$$

o que implica

$$x = aA(x-s) + aB(x-r)$$

Fazendo primeiro $x = r$ e depois $x = s$ vem

$$A = \frac{r}{a(r-s)} \quad \wedge \quad B = \frac{s}{a(s-r)}$$

respetivamente, logo

$$\frac{x}{a(x-r)(x-s)} = \frac{1}{a(r-s)}\left(\frac{r}{x-r} - \frac{s}{x-s}\right)$$

e por consequência

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{a(x-r)(x-s)}\,dx &= \int \frac{1}{a(r-s)}\left(\frac{r}{x-r} - \frac{s}{x-s}\right)dx \\ &= \frac{1}{a(r-s)}\left(r\ln|\,x-r\,| - s\ln|\,x-s\,|\right) + C \end{aligned}$$

3. Se q admite duas raízes complexas conjugadas $p+qi$ e $p-qi$ então

$$q(x) = a[(x-p)^2 + q^2]$$

Fazendo a substituição $x - p = qt$ obtemos

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int \frac{x}{a[(x-p)^2+q^2]}\,dx \\ &= \int \frac{(qt+p)q}{a[(qt)^2+q^2]}\,dt \\ &= \int \frac{q^2t}{aq^2(t^2+1)}\,dt + \int \frac{pq}{aq^2(t^2+1)}\,dt \\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \frac{p}{aq}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{2a}\ln(t^2+1) + \frac{p}{aq}\arctan t + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{(x-p^2)+q^2}{q^2}\right) + \frac{p}{aq}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right) + C \end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

4.5.3 Exemplos de primitivação envolvendo frações parciais

■ **Exemplo 4.30** A fracção racional

$$\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3}$$

é própria porque o grau do numerador é inferior ao grau do denominador. O denominador tem uma raíz real, $x = 2$, de multiplicidade algébrica três, por isso decompõe-se em três elementos simples

$$\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{(x-2)^3} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-2}$$

Reduzindo o segundo membro da equação ao mesmo denominador comum e igualando os numeradores das fracções obtém-se

$$x^2 - 6x + 3 = A_1 + A_2(x-2) + A_3(x-2)^2$$

Fazendo $x = 2$ vem $A_1 = -5$.
Substituindo A_1 tem-se

$$\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3} = \frac{-5}{(x-2)^3} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-2}$$

o que implica que

$$x^2 - 6x + 3 = A_3x^2 + (-4A_3 + A_2)x + (4A_3 - 2A_2 - 5)$$

Da igualdade de polinómios resulta o sistema

$$\begin{cases} A_3 &= 1 \\ -4A_3 + A_2 &= -6 \\ 4A_3 - 2A_2 - 5 &= 3 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $A_2 = -2$ e $A_3 = 1$. Portanto

$$\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3} = \frac{-5}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2}$$

Agora a primitivação da fracção racional torna-se imediata

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3}\,dx &= \int \left(\frac{-5}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= -5\int (x-2)^{-3}\,dx - 2\int (x-2)^{-2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= \frac{5}{2}(x-2)^{-2} + 2(x-2)^{-1} + \ln|\,x-2\,| + C \\ &= \frac{5}{2(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \ln|\,x-2\,| + C \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.31** A fracção racional própria decompõe-se em dois elementos simples

$$\frac{x^3-1}{(x^2+1)^2} = \frac{A_1x + b_1}{(x^2+1)^2} + \frac{A_2x + b_2}{x^2+1}$$

Multiplicando ambos os membros por $(x^2+1)^2$ obtém-se

$$x^3 - 1 = A_1x + b_1 + (x^2+1)(A_2x + b_2)$$

e ainda

$$x^3 - 1 = A_2x^3 + b_2x^2 + (A_1 + A_2)x + b_1 + b_2$$

Da igualdade de polinómios resulta o sistema

$$\begin{cases} A_2 &= 1 \\ b_2 &= 0 \\ A_1 + A_2 &= 0 \\ b_1 + b_2 &= -1 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $A_1 = -1$, $A_2 = 1$, $b_1 = -1$ e $b_2 = 0$. Logo

$$\frac{x^3-1}{(x^2+1)^2} = \frac{-x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}$$

e

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{-x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}\right) dx \\
&= \int \frac{-x-1}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \\
&= -\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\ln x^2+1 \\
&= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{-x^2+1+x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \arctan x \\
&= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + C
\end{aligned}$$

Finalmente, tem-se

$$\int \frac{x^3-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan x + C \tag{4.17}$$

■

■ **Exemplo 4.32** A fracção racional definida por

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^4}{x^4-1}$$

é imprópria porque os polinómios p e q têm o mesmo grau. Por isso deve-se efectuar a divisão entre os polinómios obtendo-se

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x^4-1}$$

A parte própria da fracção racional pode-se decompor em três elementos simples

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{cx+D}{x^2+1}$$

Reduzindo ao mesmo denominador comum vem

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A(x^2+1)(x+1) + B(x^2+1)(x-1) + (cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

o que implica que

$$1 = A(x^2+1)(x+1) + B(x^2+1)(x-1) + (cx+D)(x^2-1)$$

Fazendo sucessivamente $x = 1$, $x = -1$ e $x = i$ vem

$$A = \frac{1}{4} \quad \wedge \quad B = -\frac{1}{4} \quad \wedge \quad c = 0 \quad \wedge \quad D = -\frac{1}{2}$$

Tem-se

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x^4-1}\right) dx \\
&= x + \int \frac{1}{x^4-1}\,dx \\
&= x + \int \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx \\
&= x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= x + \frac{1}{4}\ln|\,x-1\,| - \frac{1}{4}\ln|\,x+1\,| - \frac{1}{2}\arctan x + C \\
&= x + \frac{1}{4}\ln|\left(\frac{x-1}{x+1}\right)| - \frac{1}{2}\arctan x + C
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.33** A fracção racional definida por

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 + x^2}$$

é imprópria visto que o grau de p é superior ao grau de q. Efectuando a divisão entre os polinómios obtém-se

$$h(x) = x - 2 + \frac{1}{x^4 + x^2}$$

A parte própria da fracção racional pode-se decompor em três elementos simples

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$$

Reduzindo ao mesmo denominador comum vem

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1(x^2+1) + A_2(x^2+1)x + (Bx+c)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

o que implica que

$$1 = A_1(x^2+1) + A_2(x^2+1)x + (Bx+c)x^2$$

Fazendo sucessivamente $x = 0$ e $x = i$ vem

$$A_1 = 1 \quad \wedge \quad B = 0 \quad \wedge \quad c = -1$$

Substituindo tem-se

$$1 = x^2 + 1 + A_2(x^2 + 1)x - x^2$$

e daí retira-se que necessariamente $A_2 = 0$. Logo

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

e

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 + x^2}\, dx &= \int \left(x - 2 + \frac{1}{x^4 + x^2} \right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{1}{x^4 + x^2}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{1}{x^2}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{x} - \arctan x + C
\end{aligned}$$

■

4.6 Primitivação de Potências de Funções Trigonométricas

Pretendemos ainda primitivar potências de funções trigonométricas.
No caso das potências de seno e cosseno a técnica de primitivação é diferente consoante o expoente n é par ou ímpar.

4.6.1 Primitivas imediatas

■ **Exemplo 4.34** Utilizando as fórmulas trigonométricas

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \quad \wedge \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int 1 dx + \int \cos(2x)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int 1dx - \int \cos(2x)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.35** Utilizando a fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int \cos x\,dx - \int \sin^2 x \cos x\,dx \\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx \\ &= \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

■

4.6.2 Fórmulas de recorrência

Nas potências de expoente n ímpar, $n \geq 3$, começamos por destacar o fator $\sin x$ e substituímos $\sin^2 x$ no fator resultante usando a fórmula fundamental, ou seja,

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x$$

onde $n = 2k+1$, $k \geq 2$. Após esta simplificação, a primitivação de $\int \sin^n x\,dx$ é imediata.

Sendo o expoente $n \geq 3$ ímpar, como devemos proceder para determinar $\int \cos^n x\,dx$?
Porém, para primitivar potências pares de seno e coseno com expoente $n \geq 4$ recomendamos a utilização das fórmulas de recorrência enunciadas na próxima proposição.

Teorema 4.6.1 Se $n \geq 4$ então

(i) $\displaystyle\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

(ii) $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

No caso das potências de tangente a primitivação não depende da paridade do expoente n.

■ **Exemplo 4.36** Utilizando a fórmula trigonométrica

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

vem

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \int \sec^2 x\,dx - \int 1\,dx \\
&= \tan x - x + C
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan x \tan^2 x\,dx \\
&= \int \tan x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C
\end{aligned}$$

■

Podemos generalizar para qualquer potência da tangente de expoente n, $n \geq 4$. Assim, começamos por destacar o fator $\tan^2 x$ e substituímo-lo por $\sec^2 x - 1$, ou seja,

$$\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x = \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1) = \tan^{n-2} x \sec^2 x - \tan^{n-2} x$$

Após a simplificação vem

$$\begin{aligned}
\int \tan^n x\,dx &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx \\
&= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx
\end{aligned}$$

Deste modo obtivémos uma fórmula de recorrência.

No caso das potências da secante a primitivação depende da paridade do expoente n.

■ **Exemplo 4.37** Utilizando a fórmula de primitivação por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\,dx &= \int \sec^2 x \sec x\,dx \\
&= \tan x \sec x - \int \tan x \sec x \tan x\,dx \\
&= \tan x \sec x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \tan x \sec x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx \\
&= \tan x \sec x - \int \sec^3 x\,dx + \log|\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

Daí resulta

$$2\int \sec^3 x\,dx = \tan x \sec x + \log|\sec x + \tan x|$$

isto é,

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\log|\sec x + \tan x| + C$$

■

Nas potências de expoente n ímpar, $n \geq 4$, começamos por destacar o fator $\sec^2 x$. Aplicando a técnica de primitivação por partes podemos obter a seguinte fórmula de recorrência

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$$

■ **Exemplo 4.38** Utilizando a fórmula trigonométrica

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

vem

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 x\,dx &= \int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx \\
&= \int \sec^2 x\,dx + \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx \\
&= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C
\end{aligned}$$

■

Nas potências de expoente n par, $n \geq 4$, começamos por destacar o fator $\sec^2 x$ e substituímos $\sec^2 x$ no fator resultante, ou seja, fazendo $n = 2k+2$, $k \geq 1$ temos

$$\sec^{2k+2} x = \sec^2 x \sec^{2k} x = \sec^2 x (1+\tan^2 x)^k$$

■ **Exemplo 4.39**

$$\begin{aligned}
\int (\sec x \tan x)^3\,dx &= \int \sec x \tan x (\sec x \tan x)^2\,dx \\
&= \int \sec x \tan x \sec^2 x (\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \int \sec x \tan x (\sec^4 x - \sec^2 x)\,dx \\
&= \int \sec x \tan x \sec^4 x\,dx - \int \sec x \tan x \sec^2 x\,dx \\
&= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

■

Seção abaixo será adicionada em breve.

4.7 Substituição Trigonométrica

4.7.1 Substituição $x = \rho \sin(t)$

4.7.2 Substituição $x = \rho \tan(t)$

4.7.3 Substituição $x = \rho \sec(t)$

4.8 Exercícios Propostos

43. Verifique as seguintes fórmulas de primitivação:

(**a**) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = -\ln(e^{-x}+1)+C$ (**b**) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$

(**c**) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C$ (**d**) $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx = \arcsin(x/\sqrt{5})+C$

(**e**) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$ (**f**) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x})+C$

44. Determine a primitiva F da função f cujo gráfico contém o ponto P:

(**a**) $f(x) = 2x-2$, $P=(2,1)$ (**b**) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P=(-e,1)$

(**c**) $f(x) = -x^{-2}$, $P=(1/3,2)$ (**d**) $f(x) = \sin x$, $P=(0,-1)$

45. Calcule, recorrendo à tabela de primitivação imediata, as seguintes primitivas:

(**a**) $\int \left(2-x+\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ (**b**) $\int (x-\sqrt{x})^3\,dx$ (**c**) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

(**d**) $\int \left(e^{3x}+\frac{2}{e^x}-\sqrt{e^x}\right)dx$ (**e**) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ (**f**) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1}\,dx$

(**g**) $\int \frac{\ln|x|}{x}\,dx$ (**h**) $\int \sinh x\cosh x\,dx$ (**i**) $\int \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

(**j**) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$ (**k**) $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}\,dx$ (**l**) $\int \frac{1}{x\ln|x|}\,dx$

(**m**) $\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ (**n**) $\int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\,dx$ (**o**) $\int \frac{\sinh x}{1+\sinh^2 x}\,dx$

(**p**) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$ (**q**) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ (**r**) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(**s**) $\int \frac{1}{1-\sin^2 x}\,dx$ (**t**) $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,dx$ (**u**) $\int (e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg}^2 x+e^{\operatorname{tg} x})\,dx$

46. Use as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos^2 x-\sin^2 x &= \cos(2x)\\ \cos^2 x+\sin^2 x &= \sin(2x)\end{aligned}$$

e $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ para calcular as primitivas abaixo:

(**a**) $\int \sin^2 x\,dx$ (**b**) $\int \cos^2 x\,dx$

(**c**) $\int (\sin x+\cos x)^2\,dx$ (**d**) $\int (\sin x\cos x)^2\,dx$

47. Sabendo que $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x+C$, calcule:

(**a**) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ (**b**) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

48. Calcule as seguintes primitivas de funções racionais:

(**a**) $\int \frac{2x+3}{3x+2}\,dx$ (**b**) $\int \frac{3x-4}{x^2+1}\,dx$ (**c**) $\int \frac{(x-1)^3}{x^2+4}\,dx$

(**d**) $\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ (**e**) $\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$ (**f**) $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$

(**g**) $\int \frac{1}{x^2+x}\,dx$ (**h**) $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ (**i**) $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

(**j**) $\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$ (**k**) $\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)}\,dx$ (**l**) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)^2}\,dx$

49. Calcule, usando a fórmula de primitivação por partes, as seguintes primitivas:

(**a**) $\int x\ln|x|\,dx$ (**b**) $\int xe^{-x}\,dx$ (**c**) $\int x^3e^{x^2}\,dx$

(**d**) $\int x^2\sinh x\,dx$ (**e**) $\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx$ (**f**) $\int \sin x e^{-x}\,dx$

(**g**) $\int \sin x\cos(2x)\,dx$ (**h**) $\int \frac{\ln(x^2-1)}{x^3}\,dx$ (**i**) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

50. Usando a regra da primitivação da função inversa, calcule:

(**a**) $\int \ln x\,dx$ (**b**) $\int \arcsin x\,dx$ (**c**) $\int \operatorname{arctg}(1/x)\,dx$

(**d**) $\int \arccos(3x+1)\,dx$ (**e**) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$ (**f**) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

51. Utilizando a fórmula de primitivação por substituição, calcule:

(**a**) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ (**b**) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$ (**c**) $\int \frac{1}{\sinh x}\,dx$

(**d**) $\int \frac{2\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,dx$ (**e**) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ (**f**) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$

52. Calcule:

(**a**) $\int e^x\sinh x\,dx$ (**b**) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ (**c**) $\int \frac{1+x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(**d**) $\int \sec^3 x\,dx$ (**e**) $\int \ln^2 x\,dx$ (**f**) $\int \frac{x-\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

53. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{2\cosh x}$.

(a) Verifique que $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ para todo o real x.

(b) Mostre que $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \operatorname{arctg}(e^x)+C$.

(c) Fazendo a mudança de variável $x = -\ln t$, mostre que

$$\int f(x)\,dx = -\operatorname{arctg}(e^{-x})+C.$$

(d) Esboce o gráfico da função definida por $g(x) = \operatorname{arctg}(e^x)$. Diga, justificando, se pode obter o gráfico de h, definida por $h(x) = -\operatorname{arctg}(e^{-x})$, a partir do gráfico de g.

II Equações Diferenciais de Primeira Ordem

5. Tipos de Equações Diferenciais (EDO's)

5.1 Introdução às EDO's

Definição 5.1.1 — EDO. Diz-se que uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação constituída por termos que envolvem uma função desconhecida y de variável independente x, uma ou mais das suas derivadas, algumas funções de x e constantes.

Definição 5.1.2 — Ordem da EDO. Diz-se que a equação diferencial ordinária (EDO) é de ordem $n \in \mathbb{N}$ se a enésima derivada de y relativamente a x for a derivada de maior ordem que aparece na equação.

■ **Exemplo 5.1** Quanto à ordem, podemos classificar as seguintes EDOs:
i) $y' - \frac{x+1}{y} = 0$ é de primeira ordem;
ii) $y'' - y = x$ é de segunda ordem;
iii) $y' - y^2 = x$ é de primeira ordem.

■

Definição 5.1.3 — Solução da EDO. Seja $y' = g(x,y)$ uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem. Uma dada função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial em $I \subseteq \mathbb{R}$ se f é diferenciável em I e se verifica a respectiva equação, isto é, a equação reduz-se a uma identidade ao substituir y por $f(x)$ e y' por $f'(x)$.

■ **Exemplo 5.2** Consideremos a EDO de primeira ordem: $xy' = y - b$, sendo $b \in \mathbb{R}$ uma constante. A função afim f tal que $f(x) = mx + b$ é diferenciável em $I = \mathbb{R}$ e

$$xy' = y - b \iff x(mx+b)' = (mx+b) - b \iff xm = mx$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Está assim provado que f é solução da EDO.
Porém a função quadrática g tal que $g(x) = x^2 + b$ não é solução da EDO visto que

$$xy' = y - b \iff x(x^2+b)' = (x^2+b) - b \iff 2x^2 = x^2 \iff x = 0$$

Assim sendo, não há nenhum intervalo I onde g e a sua derivada verifique a EDO. ■

O conjunto de soluções representadas por uma expressão com uma constante arbitrária C designa-se por solução geral (ou integral geral) da equação diferencial.
Se atribuirmos um valor concreto à constante obtemos uma solução, chamada solução particular da equação.
Por vezes, existem ainda outras soluções para além das já referidas, as soluções singulares.

O estudo das equações diferenciais, no que diz respeito à determinação de soluções, pode ser feito seguindo as seguintes abordagens:

- Analítica, que consiste em encontrar as soluções por via analítica.
- Geométrica, baseada na descrição do comportamento qualitativo das soluções usando as propriedades do conceito de derivada.
- Numérica, caracterizada por usar meios computacionais na busca de uma dada solução, solução aproximada.

Um dos objectivos principais deste capítulo é a resolução de diferentes tipos de equações diferenciais de primeira ordem pois para cadas um deles existe um método de resolução apropriado.

5.2 Equações de Variáveis Separadas e Separáveis

Definição 5.2.1 Sejam f e h expressões de uma única variável. Diz-se que

$$h(y)y' = f(x)$$

é uma equação de variáveis separadas.

Método de Resolução:
Basta usar a primitivação, ou seja, a solução geral da EDO é obtida através de

$$\int h(y)y'\,dx = \int f(x)\,dx$$

✓ Em particular, se $h(y) = 1$ a EDO reduz-se a $y' = f(x)$. Neste caso, o conjunto de soluções da EDO obtém-se por primitivação, i.e,

$$y = \int f(x)\,dx$$

■ **Exemplo 5.3** Consideremos a EDO:

$$y^{-2}y' = -1.$$

Trata-se de uma equação de variáveis separadas com $h(y) = y^{-2}$ e $f(x) = -1$. Primitivando membro a membro, isto é,

$$\int y^{-2}y'\,dx = \int -1\,dx$$

vem

$$-\frac{1}{y} = -x - C$$

donde a solução geral da equação, escrita na forma explícita, é dada por

$$y = \frac{1}{x+C}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

Definição 5.2.2 Sejam f, g e h expressões de uma única variável. Diz-se que

$$h(y)y' = f(x)g(y)$$

é uma equação de variáveis separáveis.

Método de Resolução:
Multiplicando por $\frac{1}{g(y)}$, para $g(y) \neq 0$, obtemos uma equação de variáveis separadas

$$\frac{h(y)y'}{g(y)} = f(x)$$

A solução geral resulta de

$$\int \frac{h(y)y'}{g(y)}\,dx = \int f(x)\,dx$$

■ **Exemplo 5.4** Consideremos a EDO:

$$y' = e^{y-x}.$$

Trata-se de uma equação de variáveis separáveis com $h(y) = 1$, $g(y) = e^y$ e $f(x) = e^{-x}$. Para $y \neq 0$, temos uma equação de varáveis separadas:

$$e^{-y}y' = e^{-x}$$

Primitivando membro a membro, isto é,

$$\int e^{-y}y'\,dx = \int e^{-x}\,dx$$

vem

$$-e^{-y} = -e^{-x} + C$$

donde a solução geral da equação, escrita na forma explícita, é dada por

$$y = -\ln\left(e^{-x} - C\right)$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Note que $y = 0$ não é solução da equação diferencial. ■

5.3 Equação Linear

Definição 5.3.1 Dadas as expressões $p(x)$ e $q(x)$, diz-se que

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{5.1}$$

é uma equação linear.
No caso particular, em que $p(x) = a$ e $q(x) = b$ são constantes reais, diz-se que (5.1) é uma equação linear com coeficientes constantes. No caso contrário, (5.1) é uma equação linear com coeficientes variáveis.

5.3.1 Equação Linear com Coeficientes Constantes

Consideremos a equação linear com coeficientes constantes:

$$y' + ay = b\,. \tag{5.2}$$

Se $a = 0$, esta equação reduz-se a $y' = b$. Por primitivação obtemos a sua solução geral:

$$y(x) = bx + C\,, C \in \mathbb{R}\,.$$

Teorema 5.3.1 Se $a \neq 0$ então a solução geral de (5.2) é dada por

$$y(x) = \frac{b}{a} + Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Neste caso, a EDO reduz-se a uma equação de variáveis separáveis pois

$$y' + ay = b \iff y' = b - ay.$$

Para $y \neq \frac{b}{a}$,

$$\frac{y'}{b - ay} = 1.$$

Primitivando membro a membro vem

$$\int \frac{y'}{b - ay}\, dx = \int 1\, dx$$

ou seja,

$$-\frac{1}{a} \ln|b - ay| = x + C_1$$

donde,

$$\ln|b - ay| = -ax + C_2$$

logo,

$$b - ay = Ce^{-ax}$$

por fim,

$$y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Note-se que $y = \frac{b}{a}$ também é uma solução de (5.2). ■

Corolário 5.3.2 Se $a \neq 0$ e $b = 0$ então a solução geral de (5.2) é dada por

$$y(x) = Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}.$$

5.3.2 Equação Linear com Coeficientes Variáveis

No caso particular, em que $q(x) = 0$, então (5.1) reduz-se a uma equação de variáveis separáveis:

$$y' + p(x)y = 0 \iff y' = -p(x)y$$

Por primitivação obtemos a sua solução geral:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\, dx}, C \in \mathbb{R}.$$

■ **Exemplo 5.5** Consideremos

$$y' - \frac{\alpha y}{x} = 0\,,\, x > 0$$

sendo α um parâmetro não-nulo. Trata-se de uma equação linear com $p(x) = -\frac{\alpha y}{x}$ e $q(x) = 0$. Para $y \neq 0$ temos

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

Primitivando obtemos
$$\ln|y| = \alpha \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow |y| = e^{\alpha \ln x + C_1}$$
Então
$$y = Cx^{\alpha}, C \in \mathbb{R}$$
representa a solução geral. Note-se que $y = 0$ também é uma solução da equação. ■

■ **Exemplo 5.6** Consideremos
$$y' + 2xy = 0$$
Trata-se de uma equação linear com $p(x) = 2x$ e $q(x) = 0$. Para $y \neq 0$ temos
$$\frac{y'}{y} = -2x$$
Primitivando membro a membro, isto é,
$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int -2x\,dx$$
vem
$$\ln|y| + C_1 = -x^2 + C_2$$
donde a solução geral da equação é dada por
$$y = Ce^{-x^2}, C \in \mathbb{R}.$$
Verifique que $y = 0$ também é uma solução da equação dada. ■

Vamos agora resolver uma equação linear com $p(x) = 1/x$ e $q(x) \neq 0$.

■ **Exemplo 5.7** Consideremos
$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}\,,\ x \in]0, +\infty[$$
Trata-se de uma equação linear com $p(x) = 1/x$ e $q(x) = \sqrt{x}$. A equação é equivalente a
$$xy' + y = x\sqrt{x}$$
ou seja,
$$(yx)' = x^{3/2}$$
Por primitivação vem
$$yx = \int x^{3/2}\,dx + C \Leftrightarrow xy = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$
donde
$$y = \frac{2}{5}x\sqrt{x} + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$$
é a solução geral da equação. ■

Vejamos agora que podemos resolver qualquer equação linear (5.1) aplicando o método que consiste em multiplicarmos a equação por uma função de x apropriada, $\nu(x)$, a que se chama factor integrante. Assim, multiplicando a equação (5.1) por $\nu(x) \neq 0$ obtemos
$$\nu(x)y' + \nu(x)p(x)y = \nu(x)q(x)$$

Se $v(x) \neq 0$ satisfaz $v'(x) = v(x)p(x)$ então

$$v(x)y' + v'(x)y = v(x)q(x)$$

ou seja,

$$(v(x)y)' = v(x)q(x)$$

dado que

$$(v(x)y)' = v(x)y' + v'(x)y.$$

Definição 5.3.2 — Factor Integrante. A expressão $v(x) \neq 0$ é um factor integrante para a EDO linear (5.1) se satisfaz $v'(x) = v(x)p(x)$.

Se $v_1(x) \neq 0$ é um factor integrante então $v_2(x) = kv_1(x)$, para todo $k \neq 0$, também é um factor integrante.

Teorema 5.3.3 — Determinação do factor integrante. Então v definida por

$$v(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

é um factor integrante para a equação linear (5.1).

Demonstração. Por definição, temos

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = p(x).$$

Primitivando

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)}\,dx = \int p(x)\,dx$$

obtemos

$$\ln|v(x)| = \int p(x)\,dx.$$

Segue então que

$$v(x) = e^{\int p(x)\,dx},$$

como pretendido. ■

Do teorema anterior, o seguinte resultado é deveras imediato:

Corolário 5.3.4 — Factor Integrante vs. Equação Linear Homogénea. Nas condições do **Teorema 5.3.3**, tem-se que toda a função f definida por $f(x) = \frac{C}{v(x)}$, $C \neq 0$, é solução da EDO linear homogénea

$$y' + p(x)y = 0.$$

Demonstração. Da igualdade

$$\frac{C}{v(x)} = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

obtém-se a regra de derivação

$$\left(\frac{C}{v(x)}\right)' = -p(x)Ce^{-\int p(x)\,dx} = -p(x)\frac{C}{v(x)}.$$

Segue então que $f(x) = \frac{C}{v(x)}$ é solução da EDO homogénea $y' + p(x)y = 0$, como pretendido. ■

Método de Resolução: Método do Factor Integrante para a EDO (5.1)

Passo 1. Cálculo de um factor integrante $\nu(x)$;
Passo 2. Multiplicação da equação pelo factor integrante;
Passo 3. Soma dos termos do primeiro membro da equação, isto é,

$$\nu(x)y' + \nu'(x)y = (\nu(x)y)'$$

visto que o factor integrante verifica $\nu'(x) = \nu(x)p(x)$;
Passo 4. Primitivação de ambos os membros da equação, isto é, $\int (\nu(x)y)'\,dx = \int q(x)\nu(x)\,dx + C$;
Passo 5. Obtenção da solução geral da equação:

$$y = \frac{1}{\nu(x)}\left(\int q(x)\nu(x)\,dx + C\right).$$

Teorema 5.3.5 — Solução geral de EDO's lineares. A solução geral da EDO linear (5.1) é dada por

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int q(x)\nu(x)\,dx + C\right)$$

Corolário 5.3.6 — Resolução via a equação homogénea. Considere a EDO linear (5.1). Se y_h é a solução geral de (5.1) com $q(x) = 0$ e y_p é uma solução particular de (5.1) então a solução geral da EDO linear (5.1) é dada por

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

Demonstração. Por hipótese, y_h e y_p verificam

$$y_h' + p(x)y_h = 0$$

e

$$y_p' + p(x)y_p = q(x).$$

Logo

$$y_h' + y_p' + p(x)y_h + p(x)y_p = q(x)$$

ou seja,

$$(y_h + y_p)' + p(x)\,(y_h + y_p) = q(x).$$

Assim, $y = y_h(x) + y_p(x)$ satisfaz a EDO linear (5.1). ■

Observe que no caso de $q(x) = 0$, o **Teorema 5.3.5** dá-nos essencialmente o resultado já obtido no **Corolário 5.3.4**. Esta corresponde à solução homogénea $(y_h(x))$, mencionada no **Corolário 5.3.6**.

■ **Exemplo 5.8 — Aplicação do Teorema 5.3.5.** Consideremos para valores de $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ a equação diferencial

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin x$$

Trata-se de uma equação linear com $p(x) = \mathrm{tg}\,x$ e $q(x) = \sin x$. Um factor integrante[1] é

$$\nu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \mathrm{tg}\,x\,dx} = e^{\ln|\sec x|} = |\sec x| = \sec x$$

[1]Para valores de $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, temos $\cos(x) > 0$. Segue então que $|\sec(x)| = \frac{1}{|\cos(x)|} = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$.

Ao multiplicar a equação pelo factor integrante obtemos

$$(y\sec x)' = \operatorname{tg} x$$

Primitivando vem

$$y\sec x = \int \operatorname{tg} x\, dx + C \Leftrightarrow y\sec x = \ln|\sec x| + C$$

donde

$$y = \cos x \ln|\sec x| + C\cos x$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ■

■ **Exemplo 5.9 — Aplicação do Corolário 5.3.6.** Considere a função f definida por $f(x) = e^{-2x}$.
Usando a regra de derivação

$$f'(x) = -2e^{-2x} = -2f(x)$$

segue que, por exemplo, $y_p(x) = \dfrac{1}{4}e^{-2x}$ é uma solução particular da EDO linear

$$-y' + 2y = e^{-2x}.$$

Por outro lado, pode-se concluir que $y_h(x) = Ce^{2x}$ ($C \in \mathbb{R}$ constante arbitrária) é solução da EDO linear homogénea

$$-y' + 2y = 0.$$

Portanto,

$$y(x) = Ce^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}$$

é a solução geral da equação diferencial. ■

Desafio 5.1 Verifique a solução do **Exemplo 5.9** com recurso ao método do factor integrante – vide **Teorema 5.3.5**.

5.4 Equação de Bernoulli

Definição 5.4.1 Dadas as expressões $p(x)$ e $q(x)$ e dado um racional $n \neq 0$, diz-se que

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

é uma equação de Bernoulli.

Casos Particulares:

- Se $n = 1$ então temos uma EDO de variáveis separáveis:

$$y' + p(x)y = q(x)y \Longleftrightarrow y' = (q(x) - p(x))y$$

- Se $p(x) = a$, $q(x) = b$ então

$$y' + ay = by^n \Leftrightarrow y' = by^n - ay$$

  é de variáveis separáveis.

Método de Resolução:

Seja $n \neq 1$.

1. Multiplicação da equação por y^{-n}: $y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x)$
2. Mudança de variável dependente através de $z = y^{1-n}$

3. Transformação numa equação linear atendendo a que

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}z'$$

4. Resolução da equação linear em z:

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x) \Longleftrightarrow z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

5. Regresso à variável inicial y através de $y = z^{1/(1-n)}$

■ **Exemplo 5.10** Consideremos a seguinte equação de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

Supondo $y \neq 0$ podemos multiplicar a equação por y^{-3}

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x$$

Efectuando a mudança de variável dependente

$$z = y^{-2}$$

a equação de Bernoulli transforma-se numa equação linear. Com efeito, derivando z em relação a x vem

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

logo substituindo $y^{-3}\frac{dy}{dx}$ e y^{-2} na equação anterior passamos a ter uma nova equação

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + z = x$$

ou seja

$$\frac{dz}{dx} - 2z = -2x$$

Multiplicando agora pelo factor integrante

$$e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

vem

$$e^{-2x}\frac{dz}{dx} - 2e^{-2x}z = -2xe^{-2x}$$

sendo equivalente a

$$(e^{-2x}z)' = -2xe^{-2x}$$

Primitivando

$$e^{-2x}z = \int -2xe^{-2x}\,dx,$$

$$e^{-2x}z = e^{-2x}x + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

e

$$z = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

Regressando à variável inicial obtemos

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

estando a solução geral definida sob a forma implícita. Acresce que $y = 0$ também é solução da equação diferencial. ■

5.5 Problema de valor inicial

Nos modelos representados por equações diferenciais (veremos mais à frente) é preciso resolver o seguinte problema matemático.

Definição 5.5.1 Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante e $a \in I \subseteq \mathbb{R}$. Ao problema

$$\begin{cases} y' = g(x,y)\ , x \in I \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

chama-se problema de valor inicial (ou problema de Cauchy).

Relativamente ao problema de valor inicial colocam-se as questões sobre:

- Existência de solução
- Unicidade de solução
- A sensibilidade da solução a pequenas alterações na condição inicial (ou dado inicial).

Para um problema de valor inicial existem vários teoremas que garantem a existência e a unicidade de solução, sendo o teorema de Cauchy o mais conhecido.

■ **Exemplo 5.11** Consideremos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = -2xy\ , x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Em primeiro lugar, resolvendo a EDO obtemos

$$y = Ce^{-x^2}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. De seguida, usamos a condição inicial para determinar C. Vejamos que

$$y(0) = 3 \Longleftrightarrow Ce^0 = 3 \Longleftrightarrow C = 3$$

Desta forma, concluímos que o problema de valor inicial tem solução única, sendo dada por

$$y = 3e^{-x^2}.$$

■

Desafio 5.2 — Aplicação do Corolário 5.3.6. Verifique que $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ é uma solução particular da EDO linear
$$-y' + y = e^{-x}.$$

Use esta solução para:

1. Determinar, via **Corolário 5.3.6**, a solução geral da EDO $-y' + y = e^{-x}$.
2. Verificar que a função $x \mapsto \cosh(x)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} -y' + y = e^{-x}, x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

5.6 Exercícios Propostos

54. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y' = xe^{-x}$ (b) $y' = e^{-y}$ (c) $y' = 3y$

(d) $y' = \dfrac{1-y}{x^2}$ (e) $y' = \dfrac{(1-x)y}{x}$ (f) $y' = y^2\sqrt{x}$

(g) $y' = 2x\sqrt{y-1}$ (h) $y' = 1 + y^2$ (i) $y' = y - y^2$

55. Considere a seguinte equação diferencial $y' = -2y + 4$.
    - **(a)** Determine uma função constante que seja solução da equação.
    - **(b)** Justifique que se trata quer de uma equação de variáveis separáveis quer de uma equação linear.
    - **(c)** Calcule a solução geral da equação.
    - **(d)** Mostre que a solução geral y da equação se pode decompor em $y = 2 + y_h(x)$ sendo y_h a solução geral de $y' + 2y = 0$.
    - **(e)** Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$.
    - **(f)** Determine a solução particular da equação que verifica $y(0) = 4$.
56. Considere a seguinte equação diferencial: $xy' + y = 1$, $x > 0$.
    - **(a)** Determine uma função constante que seja solução da equação.
    - **(b)** Verifique que $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ também é uma solução da equação.
    - **(c)** Calcule a solução geral da equação.
    - **(d)** Diga, justificando, se f é uma solução particular ou uma solução singular da equação.
57. Resolva as seguintes equações lineares pelo método do factor integrante:

(a) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$ (b) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$

(c) $y' - y\operatorname{tg} x = x$ (d) $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{x}{\sec x}$

(e) $y' - y = e^{2x}$ (f) $y' + y = 2e^{-x}$

(g) $y' - \dfrac{y}{x} = x^3$ (h) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3 + x^2$

58. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(**a**) $y' = -\dfrac{y^2}{x} \wedge y(-2) = 1$ (**b**) $y' = -\dfrac{x}{y} \wedge y(1) = -1$

(**c**) $y' = \dfrac{1+x}{x^2 - yx^2} \wedge y(1) = 2$ (**d**) $y' = \dfrac{y + \sqrt{x}}{3x} \wedge y(1) = -2$

(**e**) $y' = x\left(1 - \dfrac{y}{x^2-1}\right) \wedge y(2) = 1$ (**f**) $y' = 2xy + x^3 \wedge y(0) = 1/2$

59. Dadas as funções p e q e dado o número racional $n \neq 0$, diz-se que: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ é uma equação diferencial de Bernoulli.
(a) Em particular para $n = 1$ justifique que a equação se reduz a uma equação de variáveis separáveis.
(b) Fazendo a mudança de variável dependente $z = y^{1-n}$ para $n \neq 1$, calcule z'.
(c) Mostre que $z = y^{1-n}$ permite transformar essa equação na seguinte equação linear

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)\,.$$

(d) Resolva a equação $y' + y = e^x y^2$.

6. Modelação Matemática Utilizando EDO's

6.1 Modelos representados por EDO's

Um modelo é a descrição matemática de uma situação real, como por exemplo, a observação de um dado fenómeno ou a ocorrência de um certo acontecimento.
Sendo evidente que um modelo matemático não reproduz exactamente a realidade, pode então ser visto como uma projecção da realidade que deve visar um certo objectivo. Para alcancá-lo constrói-se um processo que permita interações entre ambos, designado por modelação matemática. Este processo pode ser constituído pelas seguintes etapas:

1. Formulação do problema.
2. Resolução matemática.
3. Intrepretação dos resultados.

A primeira etapa de apreensão da realidade inicia-se com a elaboração de conhecimentos para formular uma teoria de acordo com leis e pressupostos. Em qualquer caso, são postuladas relações entre variáveis e eventualmente parâmetros, usando os dados disponíveis, provenientes de observações ou de deduções. A análise efectuada, algo delicada e complexa, pode originar uma versão simplificada em face da verdadeira natureza do problema. Porém, essa redução de informação pode tornar o modelo funcional. Uma vez formulado o problema, passa-se à sua representação matemática, escolhendo as técnicas e os instrumentos mais adequados para o resolver. Depois de obter a solução, resta compreender as propriedades e os comportamentos e testá-la perante os dados. Se o modelo não respeitar os dados, tem que sofrer ajustamentos devendo por isso o processo de modelação reiniciar-se. Desta forma, pode-se obter a versão final do modelo após um certo número de iterações. Assim a principal questão não é saber se o modelo é correcto ou não, mas sim se é útil, servindo para compreender a realidade tendo em conta as decisões tomadas inicialmente em função dos objectivos delineados.

6.1.1 Modelo de Crescimento Populacional de Malthus

Consideremos que a evolução do número de indivíduos de uma população ao longo do tempo t, $t \geq 0$, é representada pela função $t \mapsto y = f(t)$. No período de tempo $I = [t, t + \Delta t]$, o acréscimo do tamanho da população é dado por

$$\Delta y = f(t+\Delta t) - f(t).$$

Assim, a população cresce em I se $\Delta y > 0$ mas decresce em I se $\Delta y < 0$.
Além disso, a taxa de variação relativa de $y(t)$ (i.e, por indivíduo) em I é definida por

$$r(t) = \frac{\Delta y}{y(t)}.$$

Por hipótese, suponhamos que existe uma constante $k \neq 0$ tal que

$$r(t) = k\Delta t$$

em I. Assim sendo, temos

$$\frac{\Delta y}{y(t)} = k\Delta t \Longleftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky(t)$$

Fazendo $\Delta t \to 0$ vem

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky(t)$$

i.e, $y(t)$ satisfaz a equação diferencial:

$$y'(t) = ky(t)$$

ou seja, podemos afirmar que a taxa de variação relativa de $y(t)$ no instante t é constante,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \Longleftrightarrow r(t) = k$$

Teorema 6.1.1 Seja $y(t)$ o número de indivíduos de uma população ao longo do tempo t, $t \geq 0$. Suponhamos que a taxa de variação de $y(t)$ no instante t é proporcional ao tamanho da população ao longo do tempo t, isto é,

$$y' = ky(t) \ , t \geq 0$$

onde $k \neq 0$ é a constante de proporcionalidade. Então a evolução da população é dada por

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

sendo $y_0 > 0$ a população inicial.

Tratam-se de modelos de crescimento exponencial se $k > 0$ e de decaimento exponencial se $k < 0$.

Para a população da espécie humana Thomas Malthus introduziu um modelo de crescimento populacional baseado na hipótese de que:

- A taxa de variação da população em cada instante t é proporcional ao tamanho da população, ou seja $y' = ky(t)$, onde $k > 0$.

A constante k pode ser interpretada como a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade. Pelo teorema anterior o modelo de crescimento de T. Malthus prevê crescimento exponencial para a população.

6.1.2 Modelo de Crescimento Logístico

Suponhamos que uma população $y(t)$ pode crescer num meio-ambiente ao longo do tempo t de forma sustentável até ao limite de b membros. A taxa de crescimento da população satisfaz

$$y'(t) = ky(b-y(t))\ ,\ t \geq 0$$

sendo $k>0$. Esta lei de crescimento é chamada lei logística, tendo sido proposta por Verhulst em 1837.

Teorema 6.1.2 — Crescimento logístico. Suponha que a taxa de crescimento da população $y(t)$ satisfaz

$$y'(t) = ky(b-y(t))\ ,\ t \geq 0 \tag{6.1}$$

sendo $k>0$ e $b>0$. Então a população evolui de acordo com

$$y(t) = \frac{b}{1+\left(\frac{b}{y_0}-1\right)e^{-kbt}}$$

sendo $y_0>0$ a população inicial.

Corolário 6.1.3 Considere a função logística definida por

$$f(t) = \frac{b}{1+\left(\frac{b}{y_0}-1\right)e^{-kbt}}$$

solução do problema de valor inicial:

$$y'(t) = ky(b-y) \quad \wedge \quad y(0) = y_0.$$

Então
(i) O sinal de $f'(t)$ pode determinar-se através do sinal de $b-f(t)$;
(ii) o valor t^* é solução de $f''(t)=0$ se e só se t^* é solução de $f(t)=b/2$;
(iii) O sinal de $f''(t)$ pode determinar-se a partir do sinal de $b-2kf(t)$.

Demonstração. Por definição de solução $f(t)$ verifica a EDO (6.1), i.e, f é uma função diferenciável em $[0,+\infty[$ que verifica

$$f'(t) = kf(t)(b-f(t)) \tag{6.2}$$

Sendo f uma função positiva e $k>0$ então $f'(t)$ e $b-f(t)$ têm o mesmo sinal.
Derivando (6.2) pela regra do produto obtemos

$$\begin{aligned} f''(t) &= kf'(t)(b-f(t)) - kf(t)f'(t) \\ &= kf'(t)(b-2f(t)) \end{aligned}$$

Daí temos

$$f''(t) = 0 \Longleftrightarrow b-2kf(t) = 0 \Longleftrightarrow f(t) = \frac{b}{2k}$$

Além disso, O sinal de $f''(t)$ depende do sinal de $f'(t)$ e do sinal de $b-2f(t)$ pois sabemos que $k>0$. ■

Desafio 6.1

Considerando os parâmetros $k = 2$ e $b = 1$:

(a) Determine as funções constantes que são soluções da equação diferencial (6.1).

(b) Justifique que se trata quer de uma equação de variáveis separáveis quer de uma equação de Bernoulli.

(c) Determine a solução geral da equação diferencial (6.1).

(d) Determine a solução do problema de valor inicial para $y_0 = 0.1$, $y = f(t)$.

(e) Mostre que $y = f(t)$ satisfaz as propriedades enunciadas acima.
Sugestão: Utilize o Corolário 6.1.3

(f) Utilizando a calculadora, trace o gráfico de f.

(g) Utilizando a calculadora, trace os gráficos de f e da função derivada de f, f', no mesmo referencial cartesiano.

Desafio 6.2 Considere a função logística definida por

$$f(t) = \frac{b}{1+\left(\frac{b}{y_0}-1\right)e^{-kbt}}$$

solução do problema de valor inicial:

$$y'(t) = ky(b-y) \quad \wedge \quad y(0) = y_0.$$

Mostre que para $0 < y_0 < b/2$, esta função possui as seguintes propriedades:

- f é regular em $[0,+\infty[$
- f é positiva em $[0,+\infty[$
- f é estritamente crescente em $[0,+\infty[$
- Existe $t^* > 0$ para o qual f é convexa em $[0,t^*[$ e côncava em $]t^*,+\infty[$
- O seu gráfico tem uma assímptota horizontal de equação $y = b$, isto é, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = b$

6.1.3 Modelo de Capitalização Contínua de Juros Compostos

Quando um cliente de uma instituição bancária pede dinheiro emprestado paga um juro sobre o montante devido e quando deposita dinheiro, por exemplo, numa conta poupança, recebe um juro sobre o montante do depósito. O juro é determinado como o produto do capital por uma taxa, durante um período acordado entre as partes. Assim, o juro é uma variável, referida ao período de capitalização, mas só disponível no vencimento que, geralmente coincide com o fim do período. Mas, o capital é uma variável, referida a um momento (início ou fim do período de capitalização). A capitalização é a transformação ao longo do tempo do capital em capital e juro de acordo com uma dada taxa de juro.
No regime de juros compostos, o stock de capital cresce de vencimento para vencimento; há juros de juros no interior do próprio processo de capitalização; os juros, mal se vencem, passam a ser capital para contagem do juro do período seguinte.
Suponhamos que um dado capital inicial, C_0 unidades monetárias, é aplicado durante um ano a uma taxa de juro anual fixa de r por cento. Admitamos ainda que a capitalização desse capital se efectua em n períodos iguais durante o ano. Então o capital acumulado no final do ano é dado por

$$C = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

Na tabela observemos que o capital acumulado vai aumentando à medida que aumenta o número de períodos de capitalização, mas de forma sucessivamente mais lenta.
Como seria o aumento do capital se fosse possível capitalizar em períodos cada vez mais curtos ou mesmo capitalizar momentaneamente?

Tabela 6.1: Capital inicial $C_0 = 1000$ unidades monetárias e taxa de juro $r = 7$ por cento

n	C
1	$1000(1+0,07) = 1070,00$
2	$1000(1+0,07/2)^2 = 1071,22$
4	$1000(1+0,07/4)^4 = 1071,86$
12	$1000(1+0,07/12)^{12} = 1072,29$
52	$1000(1+0,07/52)^{52} = 1072,46$
365	$1000(1+0,07/365)^{365} = 1072,50$

Teorema 6.1.4 — Fórmula de juros compostos com capitalização contínua. Sejam $C(t)$ o stock de capital no instante $t \geq 0$ e r por cento a taxa de juro fixa. Suponhamos que o investimento, ou seja, a taxa de variação de $C(t)$, é proporcional ao stock de capital em cada instante t, i.e,

$$C'(t) = rC(t)\ , t \geq 0.$$

Então a dinâmica do stock de capital é dada por

$$C(t) = C_0 e^{kt}$$

sendo $C_0 > 0$ o capital inicial.

Demonstração. Consideremos o período de tempo $[t, t+\Delta t]$ para Δt suficientemente pequeno. Sendo a taxa de juro no período calculada através de $r\Delta t$, o juro obtido é $C(t)r\Delta t$. Então o capital obtido no instante $t+\Delta t$ é

$$C(t+\Delta t) = C(t) + C(t)r\Delta t$$

ou seja,

$$\frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} = rC(t)\,.$$

Fazendo $\Delta t \to 0$ vem

$$C'(t) = rC(t)$$

Sabendo que $C(0) = C_0$ é o capital inicial, resolvemos o problema de valor inicial e obtemos

$$C(t) = C_0 e^{rt}.$$

■

Desafio 6.3 Suponhamos que um capital de 2050 euros é colocado a render numa conta poupança, em regime de juros compostos, à taxa fixa anual de 5 por cento.

i) Determine o capital acumulado ao fim de um ano, considerando diferentes períodos de capitalização ao ano.

ii) Escreva a equação diferencial que representa a evolução do capital acumulado ao longo do tempo, em regime de juros compostos com capitalização contínua.

iii) Determine o capital acumulado ao fim de um ano, considerando o regime de juros compostos com capitalização contínua.

iv) Compare os resultados obtidos e explique-os.

6.1.4 Modelo de Crescimento Económico de Harrod-Domar

Consideremos uma economia fechada que produz um único bem ao longo do tempo $t \geq 0$, designado por $y(t)$, representando o produto ou o rendimento real da economia (unissectorial). O produto resulta da decomposição

$$y(t) = C(t) + I(t) + A(t)$$

sendo $C(t)$ o consumo, $I(t)$ o investimento induzido e $A(t)$ o investimento autónomo. O modelo de Harrod-Domar é usado para explicar a dinâmica do crescimento económico. Este modelo assenta nos pressupostos económicos:

- o investimento autónomo $A(t)$ é uma variável exógena (exterior ao modelo), a qual é independente do produto $y(t)$;
- O consumo $C(t)$ é uma fração do produto

  $$C(t) = ky(t)$$

  onde a constante $0 < k < 1$ representa a propensão marginal ao consumo;
- O investimento induzido $I(t)$ é proporcional à taxa de variação do produto, i.e,

  $$I(t) = \nu y'(t)$$

  onde a constante $\nu > 0$ é o chamado acelerador (ou coeficiente de investimento).

Então o produto, $y(t)$, é descrito pela equação diferencial.

$$\nu y'(t) - sy(t) = -A(t)$$

onde a constante $s = 1 - k$ é a propensão marginal à poupança.
Assume-se ainda que:

- Não há externalidades na economia, i.e, a variável exógena $A(t)$ está ausente, logo $A(t) = 0$ para todo t.

Então o modelo de Harrod-Domar é representado pela equação

$$y'(t) = \frac{s}{\nu} y(t)$$

Teorema 6.1.5 Seja $y(t)$ o produto da economia, para $t \geq 0$. Se a taxa de variação do produto é proporcional ao produto, i.e,

$$y' = \omega y(t)\ , t \geq 0$$

onde $\omega > 0$ é a constante de proporcionalidade. Então a evolução de $y(t)$ é descrita por

$$y(t) = y_0 e^{\omega t}$$

sendo $y_0 > 0$ o rendimento inicial.

Note-se que a constante $\omega = \frac{s}{\nu}$ representa a chamada taxa de crescimento tecnológica da economia.

6.1.5 Modelo de Crescimento Económico de Solow-Swan

A Economia do Crescimento é muito rica em modelos dinâmicos destinados à previsão. O modelo de Harrod-Domar de inspiração Keynesiana foi pioneiro no desenvolvimento desta teoria. O facto do crescimento da economia com pleno emprego da força de trabalho em equilíbrio, tanto a curto

como a longo prazo, ser instável no modelo originou alguma discussão e insastifação em relação a alguns pressupostos. É neste contexto que ocorre a formulação do modelo de Solow-Swan, assumindo de certa forma uma ruptura associada à problemática dos factores de crescimento, na medida em que pretende explicar o crescimento de longo prazo exclusivamente baseado no comportamento da oferta, menosprezando o valor explicativo do lado da procura.
O modelo de Solow-Swan desenvolvido por Solow e por Swan em 1956, com base em trabalhos independentes, é um modelo de crescimento de uma economia que mostra o efeito da dinâmica da acumulação de capital por trabalhador no processo de crescimento de longo prazo.
No quadro do crescimento neoclássico, o modelo considera uma economia fechada que produz um único bem, representando o rendimento real da economia. Assim, numa economia o stock de capital por trabalhador $k(t)$ é descrito ao longo do tempo pela equação:

$$k'(t) = sf(k) - (\delta + n)k\,,\, t \geq 0 \tag{6.3}$$

onde as constantes s, δ e n representam as taxas de poupança, de desvalorização do capital e de crescimento da população, respectivamente. Reparemos que o produto da economia por unidade de trabalho depende de uma função de produção agregada f que satisfaz as seguintes propriedades:

- É não-negativa e $f(0) = 0$;
- É estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e $f'(0) = +\infty$
- É côncava
- f verifica as condições de Inada:

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0$$

Teorema 6.1.6 Se a taxa de variação do stock de capital por trabalhador $k(t)$ para $t \geq 0$ satisfaz

$$k'(t) = sf(k) - (\delta + n)k\,,\, t \geq 0 \tag{6.4}$$

com $f(k) = k^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Então a evolução de $k(t)$ é descrita por

$$k(t) = \left(\frac{s}{(\delta + n + g)} + Ce^{(\alpha - 1)(\delta + n + g)t} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

onde C é uma constante arbitrária.

Demonstração. Tomando $f(k) = k^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, vamos resolver a equação não-linear (6.3) visto que se trata de uma equação de Bernoulli.
Notemos que $k(t) = 0$ é a solução trivial, logo assumindo $k(t) \neq 0$ vem

$$k^{-\alpha}(t)k'(t) + (\delta + n + g)k^{1-\alpha}(t) = s \tag{6.5}$$

Com a mudança de variável dependente

$$z(t) = k^{1-\alpha}(t)$$

vem

$$z'(t) + (1 - \alpha)(\delta + n + g)z(t) = (1 - \alpha)s \tag{6.6}$$

Multiplicando a equação pelo factor integrante

$$e^{(1-\alpha)(\delta+n+g)t}$$

vem

$$\left(e^{(1-\alpha)(\delta+n+g)t}z(t)\right)' = (1-\alpha)se^{(1-\alpha)(\delta+n+g)t} \tag{6.7}$$

Primitivando resulta

$$z(t) = \frac{s}{\delta+n+g} + Ce^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t} \tag{6.8}$$

Regressando à variável dependente inicial temos

$$k(t) = \left(\frac{s}{(\delta+n+g)} + Ce^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t}\right)^{1/(1-\alpha)} \tag{6.9}$$

onde C é uma constante arbitrária. ■

Desafio 6.4 Considerando $s = 0.3$, $\delta = 0.1$, $n = 0.2$ e a função de produção f, definida por $f(k) = \sqrt{k}$, determine:
(b.1) Diga de que tipo é a equação diferencial (6.3) ;
(b.2) Determine as funções constantes que são soluções da equação diferencial (6.3);
(b.3) Determine a solução geral da equação diferencial (6.3);
(b.4) Determine a solução particular de (6.3) que verifica $k(0) = k_0$, $y_p = k(t)$.
(b.5) Determine a evolução de $y_p = k(t)$ no longo prazo ($t \to \infty$).
(b.6) Utilizando a calculadora, trace o gráfico de y_p.

6.1.6 Modelo de Difusão de Bass

As grandes empresas incorporam a inovação nos processos de gestão. Por exemplo, dedicam particular atenção à concepção e ao desenvolvimento de novos produtos e à introdução de tecnologias visando aumentar as suas vendas.

O modelo de Bass é um modelo matemático que descreve a evolução do volume de vendas cumulativas de novos produtos desde o seu lançamento no mercado de acordo com a teoria da difusão da inovação.

A difusão da inovação envolve um ciclo de vida do produto dividido em quatro estágios: introdução, crescimento, maturação e declínio.

Pressupostos do Modelo

- O mercado é constituído por dois tipos de consumidores:
  - **(i)** Os que decidem adquirir o novo produto, independentemente das decisões dos outros consumidores, são designados por inovadores;
  - **(ii)** Os que são influenciados pela pressão social do meio, susceptíveis de serem influenciados pelos consumidores que já adquiriram o novo produto, são designados por imitadores (ou seguidores);
- Durante o ciclo de de vida do produto existem m potenciais consumidores;
- O volume de vendas acumulado da empresa no intervalo $[0,t]$ é representado por $y(t)$; o volume de vendas no instante inicial ($t = 0$) é igual a $y(0) = 0$;
- O volume de vendas no instante t é simultaneamente proporcional ao número de consumidores que já adquiriram o novo produto e ao número de consumidores que ainda não o adquiriram, $qy(t)\left(1-\frac{y(t)}{m}\right)$, onde q é o coeficiente de inovação;
- O volume de vendas no instante t também é proporcional ao número de consumidores que ainda não adquiriram o novo produto, $p(m-y(t))$, onde p é o coeficiente de imitação.

Formulação e Resolução Matemática

O volume de vendas acumulado até ao tempo t, $y(t)$, é expresso pelo problema de valor inicial:

$$y'(t) = qy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{m}\right) + p(m - y(t)) \quad \wedge \quad y(0) = 0 \tag{6.10}$$

onde p, q e m são parâmetros positivos.
Vamos resolver a equação diferencial, reescrevendo-a na forma

$$y'(t) = \left(\frac{q}{m}y(t) + p\right)(m - y(t)) \tag{6.11}$$

Efectuando, em primeiro lugar, a mudança de variável $m - y = u$, a equação (6.11) transforma-se numa equação de Bernoulli:

$$u'(t) + (p+q)u(t) = \frac{q}{m}u^2(t) \tag{6.12}$$

Aplicando nova mudança de variável $u^{-1} = z$, a equação (6.12) transforma-se numa equação linear:

$$z'(t) - (p+q)z(t) = -\frac{q}{m} \tag{6.13}$$

Resolvendo esta equação pelo método do factor integrante obtemos a sua solução geral:

$$z(t) = \frac{q}{m(p+q)} + Ce^{(p+q)t} \tag{6.14}$$

A condição inicial é $z(0) = 1/m$, que decorre de $u(0) = m$ e $y(0) = 0$. Substituindo $t = 0$ em (6.14) vem

$$\frac{1}{m} = \frac{q}{m(p+q)} + C \Longleftrightarrow C = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{q}{p+q}\right) \Longleftrightarrow C = \frac{p}{m(p+q)}$$

Substituindo o valor de C em (6.14) temos

$$z(t) = \frac{pe^{(p+q)t} + q}{m(p+q)}$$

Regressando às variáveis u e y vem

$$u(t) = \frac{m(p+q)}{pe^{(p+q)t} + q}$$

e

$$y(t) = m - \frac{m(p+q)}{pe^{(p+q)t} + q}$$

donde,

$$y(t) = \frac{mp(e^{(p+q)t} - 1)}{pe^{(p+q)t} + q}$$

e portanto

$$y(t) = \frac{m\left(1 - e^{-(p+q)t}\right)}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$

Propriedades da Solução

Teorema 6.1.7 A função $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(t)=\frac{m\left(1-e^{-(p+q)t}\right)}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$

que é solução do problema de valor inicial (6.10), apresenta as seguintes propriedades:

- É estritamente crescente;
- O gráfico de f tem uma assímptota horizontal de equação $y=m$, ou seja $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=m$;
- **(i)** Se $q>p$ então f é convexa em $]0,t^*[$ e côncava em $]t^*,+\infty[$, onde $t^*=\dfrac{\ln(q/p)}{p+q}$;

  (ii) Se $q\leq p$ então f é côncava.

Demonstração. Tendo em conta que $y=f(t)$ é solução de (6.11), basta verificar que:

$$m-y>0 \quad \wedge \quad \frac{q}{m}y+p>0$$

para todo $t\geq 0$, para concluirmos que $y'(t)>0$, o que significa que f é estritamente crescente.
É evidente que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{m\left(1-e^{-(p+q)t}\right)}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}=m$$

De (6.11) vem

$$y'(t)=pm+(q-p)y(t)-\frac{q}{m}y^2(t)$$

logo, derivando $y'(t)$ obtemos

$$y''(t)=q-p-\frac{2q}{m}y(t)\,.$$

Seja $q>p$.
Assim

$$y''(t)=0\iff y(t)=\frac{m(q-p)}{2q}$$

Então

$$\frac{m\left(1-e^{-(p+q)t}\right)}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}=\frac{m(q-p)}{2q}\iff 2pq(1-e^{-(p+q)t})=(q-p)(p+qe^{-(p+q)t})$$

isto é,

$$2pq-pq+p^2=(2pq+q^2-pq)e^{-(p+q)t}\iff p(q+p)=q(p+q)e^{-(p+q)t}$$

isto é,

$$e^{-(p+q)t}=\frac{p}{q}\iff -(p+q)t=\ln(p/q)\iff (p+q)t=\ln(q/p)\iff t=\frac{\ln(q/p)}{p+q}$$

É fácil de ver que $y''(t)>0$ para $t<t^*$ e $y''(t)<0$ para $t>t^*$, em que $t^*=\dfrac{\ln(q/p)}{p+q}$.
Seja $q\leq p$.
Então

$$y''(t)=q-p-\frac{2q}{m}y(t)<0\,,$$

para todo o $t>0$, o que significa que f é côncava.

■

6.1.7 Modelo Dinâmico do Mercado de um Bem

A Determinação do Preço de Equilíbrio

Samuelson introduziu um mecanismo dinâmico de ajustamento do preço $p(t)$ de um bem de acordo com as leis da procura e da oferta. Supondo que a taxa de variação do preço, $p'(t)$, é directamente proporcional ao excedente da procura, provou tanto a existência de um preço de equilíbrio p_e como a estabilidade desse preço.

A Estabilidade do Preço de Equilíbrio

O preço de equilíbrio p_e é estável se

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = p_e$$

A procura e a oferta de um bem são descritas por

$$D(p) = a - bp \, , \, S(p) = \alpha - \beta p$$

onde a, b, α, β são parâmetros positivos. A variação do preço ao longo do tempo é proporcional ao excedente de procura, isto é,

$$p'(t) = k(D(p) - S(p)) \Leftrightarrow p'(t) + k(b+\beta)p = k(a-\alpha)$$

onde $k > 0$. Sendo $p_e = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$, então

$$p(t) = (p(0) - p_e)e^{-k(b+\beta)t} + p_e$$

6.2 Estudo Qualitativo de EDO's

Geometricamente, já sabemos que a recta tangente ao gráfico de uma função num ponto constitui uma boa aproximação ao gráfico na vizinhança desse ponto.

Definição 6.2.1 Por cada ponto $P = (x,y)$ do plano pode passar uma solução da equação diferencial:

$$y'(x) = g(x,y)$$

cuja recta tangente tem uma inclinação, de valor $g(x,y)$. Este facto permite-nos traçar segmentos de recta para todos os pontos do plano, onde a função f está definida.
Ao conjunto de todos os segmentos de recta chama-se campo de direcções da equação diferencial.

6.2.1 Representação Gráfica do Mapa de Indiferença

Na Microeconomia neoclássica o consumidor é um agente económico, dotado de uma função de utilidade que atribui um valor numérico $u(x,y)$ a cada cabaz $P = (x,y)$ de dois bens X e Y de consumo, onde $x > 0$ e $y > 0$ são as quantidades de X e Y, respectivamente. Desta forma, o consumidor descreve as suas preferências que assentam num conjunto de axiomas de decisão racional.

No contexto da utilidade ordinal, as preferências do consumidor entre quaisquer dois cabazes $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$, obedece à seguinte classificação:
(i) $P_1 = (x_1,y_1)$ é preferido a $P_2 = (x_2,y_2)$ se e só se $u(P_1) > u(P_2)$;
(ii) $P_2 = (x_2,y_2)$ é preferido a $P_1 = (x_1,y_1)$ se e só se $u(P_2) > u(P_1)$;
(iii) $P_1 = (x_1,y_1)$ é indiferente a $P_2 = (x_2,y_2)$ se e só se $u(P_1) = u(P_2)$.
sendo $u(P_1)$ e $u(P_2)$ níveis de utilidade.

A teoria de escolha do consumidor pode ser abordada do ponto de vista geométrico, usando a construção de curvas de indiferença, que reflectem a ordenação de preferências por via da função de utilidade.

Definição 6.2.2 Sejam u uma função de utilidade e $c > 0$ um dado nível de utilidade. Diz-se que:

$$I_c = \{(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2 : u(x,y) = c\}$$

é uma curva de indiferença.

Geometricamente, a curva I_c é constituída pelo conjunto de todos os pontos $P = (x,y)$ do sistema cartesiano XoY que satisfazem $u(x,y) = c$, onde x e y são marcados nos eixos das abcissas e das ordenadas respectivamente.

No sistema cartesiano XoY, quanto mais afastada da origem estiver a curva de indiferença, maior é o nível de utilidade c do consumidor. Os economistas chamam mapa de indiferença à reunião de todas as curvas de indiferença, $\bigcup\limits_{c>0} I_c$.

Seguindo uma abordagem proposta por Pareto, Hicks e Samuelson entre outros, é possível representar o mapa de indiferença no plano XoY, utilizando a taxa marginal de substituição de um bem por outro para todos os cabazes. Neste caso, os níveis de utilidade são obtidos a partir das curvas de indiferença, ao contrário da abordagem inicial em que eram dados *a priori*.

A taxa marginal de substituição de Y por X, para um dado nível de utilidade c, é a quantidade de Y que o consumidor se dispõe a prescindir por uma unidade adicional de consumo de X. Este conceito, introduzido por Hicks, representa matematicamente uma taxa de variação média de $y = f(x)$ no intervalo $[x, x+1]$.

Definição 6.2.3 Seja I_c uma dada curva de indiferença. Supondo que $u(x,y) = c$ define y como função implícita de x, $y(x)$, então a taxa marginal de substituição de Y por X em $P = (x,y) \in I_c$ é definida por

$$\tau(x,y) = -y'(x) \tag{6.15}$$

onde $y'(x)$ é a derivada da função implícita $y(x)$ em x. Geometricamente, a taxa marginal de substituição em $P = (x,y)$ representa o simétrico do declive da curva de indiferença I_c no ponto P.

Dado um cabaz $P_1 = (x_1, y_1)$ e conhecida a taxa marginal de substituição de Y por X, $\tau(x,y)$, então o conjunto de todos os cabazes indiferentes a $P_1 = (x_1, y_1)$ para o consumidor é determinado pela solução do problema de valor inicial (ou problema de Cauchy):

$$\begin{cases} y'(x) = -\tau(x,y) \ , \ (x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

A representação gráfica da solução é a curva de indiferença que contém P_1.

De acordo com Hicks, consideremos que τ satisfaz as seguintes hipóteses:
(i) τ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}_+^2$;
(ii) τ é uma função positiva em ${\mathbb{R}_+}^2$;
(iii) $\tau_x(x,y) - \tau(x,y)\tau_y(x,y) > 0$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.
Em consequência dos pressupostos económicos sobre as preferências do consumidor, suponhamos que cada curva de indiferença é o gráfico de uma função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $y = f(x)$,

com as seguintes propriedades:

- É de classe C^2, positiva, estritamente decrescente e convexa.

1. Considere que a taxa marginal de substituição de Y por X em qualquer ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ é dada por $\tau(x, y) = \frac{y}{2x}$.
   (a) De que tipo é a equação diferencial: $y'(x) = -\tau(x, y)$?
   (b) Resolva a equação diferencial: $y'(x) = -\tau(x, y)$.
   (c) Trace a curva de indiferença que contém o cabaz P_1.
   (d) Mostre que a curva de indiferença traçada corresponde ao gráfico de uma função com as propriedades enunciadas acima.
   (e) Determine o conjunto de todos os cabazes que são indiferentes a P_2 para o consumidor.
   (f) De acordo com a classificação apresentada, classifique os cabazes P_1 e P_2.

6.3 Exercícios Propostos

60. Sendo $k > 0$ e $b > 0$ parâmetros, considere a equação diferencial $y' = ky(b - y)$ que descreve o crescimento logístico da variável dependente y ao longo do tempo t.
    (a) Determine as funções constantes que sejam soluções da equação.
    (b) Justifique que se trata quer de uma equação de variáveis separáveis quer de uma equação de Bernoulli.
    (c) Calcule a solução geral da equação.
    (d) Considerando $k = 1$ e $b = 10$:
    (d.1) Determine a solução particular y_p que verifica $y(0) = 0.01$;
    (d.2) Mostre que y_p é estritamente crescente e calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} y_p(t)$;
    (d.3) Estude as concavidades do gráfico de y_p;
    (d.4) Trace o gráfico de y_p.
61. Sendo $k > 0$ um parâmetro, à equação diferencial $y' = -ky \ln y$ que descreve o crescimento de uma dada população y ao longo do tempo t, chama-se equação de Gompertz.
    (a) Determine as funções constantes que sejam soluções da equação.
    (b) Calcule a solução geral da equação.
    (c) Considerando $k = 1$:
    (c.1) Determine a solução particular y_p que verifica $y(0) = e^{-1}$;
    (c.2) Mostre que y_p é estritamente crescente e calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} y_p(t)$;
    (c.3) Estude as concavidades do gráfico de y_p;
    (c.4) Trace o gráfico de y_p.
62. O número de bactérias em certa cultura aumenta de 600 para 1800 em duas horas. Supondo que as bactérias crescem a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em cada instante, determine o número de bactérias ao fim de seis horas.
63. Após a interrupção da campanha de publicidade, o volume de vendas mensais de uma empresa baixou de 10000 para 8500 unidades em quatro meses. Supondo que as vendas decrescem a uma taxa proporcional ao número de unidades vendidas, determine:
    (a) O volume de vendas no final do ano.
    (b) Ao fim de quanto tempo o volume de vendas se reduz a 5000 unidades.
64. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa à qual um objecto arrefece é directamente proporcional à diferença entre a temperatura do objecto e a do meio ambiente circundante. Se determinado objecto arrefece de 125 graus para 100 graus em meia hora, quando circundado por ar à temperatura de 75 graus, determine a temperatura do objecto ao fim de mais meia hora.
65. O plutónio desintegra-se a uma taxa proporcional à quantidade de plutónio presente em cada instante. O plutónio tem meia de aproximadamente 200 anos (isto é, são necessários 200

anos para passar a metade da quantidade inicial). Determine quanto tempo é necessário para que, de uma quantidade inicial de 1 Kg, restem apenas 200 g.

66. Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5000 l de água. Num dado instante começa a entrar água que contém 0.03 kg de sal por litro a uma taxa de 25 l por minuto. A solução é misturada e sai do tanque à mesma taxa. Determine a quantidade de sal que permanece no tanque ao fim de meia hora.

Cálculo Integral

7. Integral Definido

7.1 A Área como Limite de Somas

Seja f uma função contínua e não-negativa em $[a,b]$.

Como determinar a área, $A(R)$, da região

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}?$$

Começa-se por decompor $[a,b]$ em n sub-intervalos iguais de comprimento Δx com $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ através de $n+1$ pontos x_i definidos por meio de

$$x_k = a + k\Delta x, \ ,0 \leq k \leq n$$

Em seguida, constróem-se n rectângulos T_k, $1 \leq k \leq n$, de largura Δx. Então a soma das áreas de todos os rectângulos constitui uma aproximação para o valor da área. Vamos considerar dois tipos diferentes de somas:

Somas Superiores: Neste primeiro caso, os n rectângulos T_k, $1 \leq k \leq n$ têm largura Δx e altura $f(x_k)$. Então podemos dizer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

é uma aproximação por excesso para o valor da área da região R.

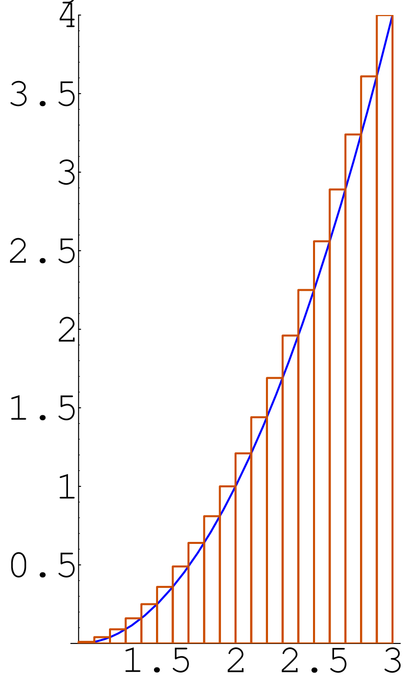
Somas Inferiores: Neste segundo caso, os n rectângulos T_k, $1 \leq k \leq n$, têm largura Δx e altura $f(x_{k-1})$. Então podemos dizer que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x$$

é uma aproximação por defeito para o valor da área da região R.

```
rtition into 20 subin
 of subinterval used

m = 2.87
ntegral = 2.66667
```

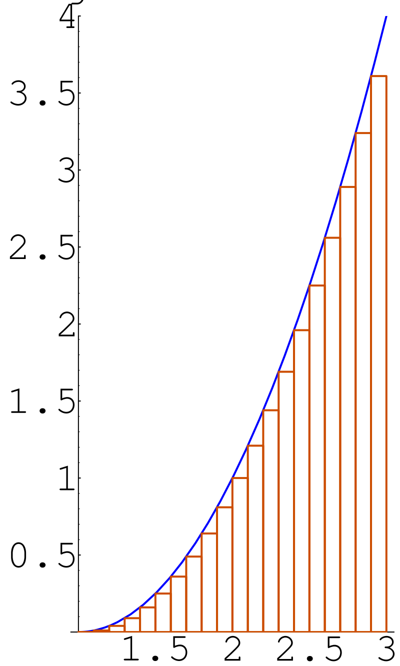


rtition into 20 subi

of subinterval used

m = 2.47

ntegral = 2.66667



■ **Exemplo 7.1 — Somas Superiores e Somas Inferiores.** Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2$ em $[1,3]$. Nas figuras, tomámos $n = 20$ sub-intervalos em ambas as somas:

Assim, para $n = 20$ a soma superior vale $S_{20} = 2.87$. Assim, para $n = 20$ a soma inferior vale $s_{20} = 2.47$. Observe que $s_{20} = S_{20} - \frac{8}{20} = S_{20} - 0,4$. ■

Vejamos que podemos obter uma expressão para ambas as somas:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{n^2}\frac{2}{n} \\ &= \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4k^2}{n^2}\frac{2}{n} \\ &= \frac{8}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2\right) \\ &= S_n - \frac{8}{n} \end{aligned}$$

Repare que tanto S_n como s_n constituem aproximações para o valor da área da região R satisfazendo

$$s_n \leq A \leq S_n$$

para todo n. Parece evidente que: Quanto maior for n melhor é a aproximação no sentido em que o valor estimado fica mais próximo do valor atribuído à área da região. Por isso, faz sentido definir a área da região através de

$$A = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

desde que esse limite exista.

■ **Exemplo 7.2** O valor da área da região

$$R = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq (x-1)^2\}$$

é dado por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{16n^3+24n^2+8n}{6n^3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

■

Este procedimento para determinar a área de uma dada região atráves de um limite de uma sucessão de somas, traduz uma situação muito particular de analisar o problema de cálculo da área. É pertinente colocar as seguintes questões:

1. A altura dos rectângulos terá necessariamente que ser igual à imagem por f da extremidade do lado direito do sub-intervalo?
2. A altura dos rectângulos terá necessariamente que ser igual à imagem por f da extremidade do lado esquerdo do sub-intervalo?
3. Os sub-intervalos não poderão ter comprimentos diferentes?

As respostas às questões serão dadas pela próxima definicão:

Definição 7.1.1 — Somas de Riemann. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ limitada em $[a,b]$. Efectue-se uma partição P de $[a,b]$, isto é, uma qualquer decomposição num número arbitrário n de sub-intervalos por meio de pontos x_i tais que $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. À maior das medidas dos sub-intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$ considerados chama-se amplitude da partição. Ao somatório

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)(x_k - x_{k-1})$$

para algum w_k, pertencente a $[x_{k-1}, x_k]$ chama-se soma de Riemann para f relativamente a P. Note-se que para cada partição existem muitas somas de Riemann possíveis.

Definição 7.1.2 — A Noção de Integral Definido . O integral definido de f no intervalo $[a,b]$ é dado por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{P\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)(x_k - x_{k-1})$$

desde que o limite exista. Também se diz que f é integrável à Riemann, ou simplesmente, integrável.
Informalmente, o integral definido representa um número real I, cuja diferença $I - S_P$ em valor absoluto se pode tornar tão pequena quanto se queira, para todas as somas de Riemann possíveis desde que o valor da amplitude da partição P seja suficientemente pequena.

7.2 A Área como Integral

Considere que um ponto P se desloca ao longo da parábola de equação $y = (x-1)^2$.
Seja $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função que faz corresponder à abcissa x_0 a área de

$$R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq x_0 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq (x-1)^2\}.$$

Repare então que o valor $A = \frac{8}{3}$ que obtivémos no exemplo anterior também pode ser igual a $F(3) - F(1)$. Vamos provar esta evidência geométrica.
Para o acréscimo h da variável x em torno de $x_0 > 0$, considere

$$F(x_0 + h) - F(x_0)$$

que representa a área da região delimitada pelas rectas $x = x_0$ e $x = x_0 + h$, pela parábola e pelo eixo dos XX.
Para $h > 0$ obtemos

$$h(x_0 - 1)^2 \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h(x_0 + h - 1)^2$$

donde $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = (x_0 - 1)^2$. Analogamente também se prova que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = (x_0 - 1)^2$$

Portanto F é diferenciável e $F'(x) = (x-1)^2$. Por primitivação obtém-se $F(x) = \frac{1+(x-1)^3}{3}$ dado que $F(0) = 0$. Finalmente, vem

$$A = F(3) - F(1) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

Teorema 7.2.1 — Teorema Fundamental do Cálculo Integral. Se f é uma função contínua em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

sendo F uma primitiva de f.

Definição 7.2.1 — Região Limitada Superiormente pelo Gráfico de f e Inferiormente pelo eixo Ox. A área da região

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

é igual a $A = \int_a^b f(x)\,dx$

7.3 Propriedades do Integral Definido

Teorema 7.3.1 — Continuidade implica integrabilidade. Toda a função contínua em $[a,b]$ é integrável nesse intervalo.

A continuidade de uma função é uma condição suficiente de integrabilidade num intervalo fechado, mas não é uma condição necessária, pois existem também funções integráveis que são descontínuas.

Apresentamos as considerações gerais sobre integrais definidos:

No integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é habitual chamar função integranda a f. Ao intervalo $[a,b]$ chama-se intervalo de integração com extremidade (ou extremo) inferior a e extremidade (ou extremo) superior b. No caso particular em que $a = b$, por convenção tem-se

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Por vezes, podem aparecer integrais em que a extremidade superior b é menor que a extremidade inferior a. Neste caso, alteramos a posição dos extremos de integração usando a igualdade:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Teorema 7.3.2 — Linearidade do Integral.

- **Propriedade da aditividade:**
  Se f e g são integráveis em $[a,b]$ então
  $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$
- **Propriedade da homogeneidade:**
  Se f é integrável em $[a,b]$ então
  $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$
  para todo o real k.
- **Propriedade da subdivisão ou Regra de Chasles :**
  Seja $c \in]a,b[$. Se f é integrável em $[a,b]$ então
  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
- **Propriedade de positividade:**
  Se f é integrável e não-negativa em $[a,b]$ então
  $$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$
- Se f e g são integráveis em $[a,b]$ tais que $g(x) \leq f(x)$ para todo o $x \in [a,b]$ então
  $$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

Corolário 7.3.3 — Integral com Sinal Negativo. Suponhamos que g é integrável em $[a,b]$ e $g(x) \leq 0$ para todo o $x \in [a,b]$. Então
$$\int_a^b g(x)\,dx \leq 0\,.$$

Demonstração. Seja f a função simétrica de g, isto é, $f(x) = -g(x)$. Como $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ e
$$\int_a^b g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$
conclui-se que
$$\int_a^b g(x)\,dx \leq 0.$$
■

7.4 Cálculo de Áreas

Definição 7.4.1 — Região Limitada Inferiormente pelo Gráfico de f e Superiormente pelo eixo Ox. A área da região

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad f(x) \leq y \leq 0\}$$

é igual a

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

■ **Exemplo 7.3** A área da região delimitada por $y = \sqrt[3]{x}$, $x = -1$ e $y = 0$ vale

$$-\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{x}\,dx = -\frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{x^4}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4}$$

■

Definição 7.4.2 — Região Limitada pelo Gráfico de módulo de f e pelo eixo Ox. Suponhamos agora que **a função f não tem sinal constante** no intervalo $[a,b]$. Então a área da região delimitada pelas rectas $x = a$ e $x = b$, pela gráfico de f e pelo eixo Ox é dada por

$$A = \int_a^b |\ f(x)\ |\ dx.$$

■ **Exemplo 7.4 — Área delimitada pelo gráfico da função seno e pelo eixo Ox.** Considere-se a região delimitada por

$$y = \sin(2x) \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad x = \pi.$$

A área é igual a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} |\sin(2x)|\,dx &= \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-1)\sin(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}[-\cos(2x)]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}[\cos(2x)]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}(-\cos\pi + \cos 0) + \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi) \\
&= 2
\end{aligned}$$

■

Definição 7.4.3 — Região Verticalmente Simples. A área da região

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b \quad \wedge \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

é igual a

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

■ **Exemplo 7.5 — Regiões Verticalmente Simples.** Constituem exemplos de regiões verticalmente simples:

1. A região determinada pelo sistema de inequações

$$0 \leq x \leq 1 \ \ \& \ \ x^n \leq y \leq \sqrt[n]{x} \ \ \text{(n natural diferente de 1)}$$

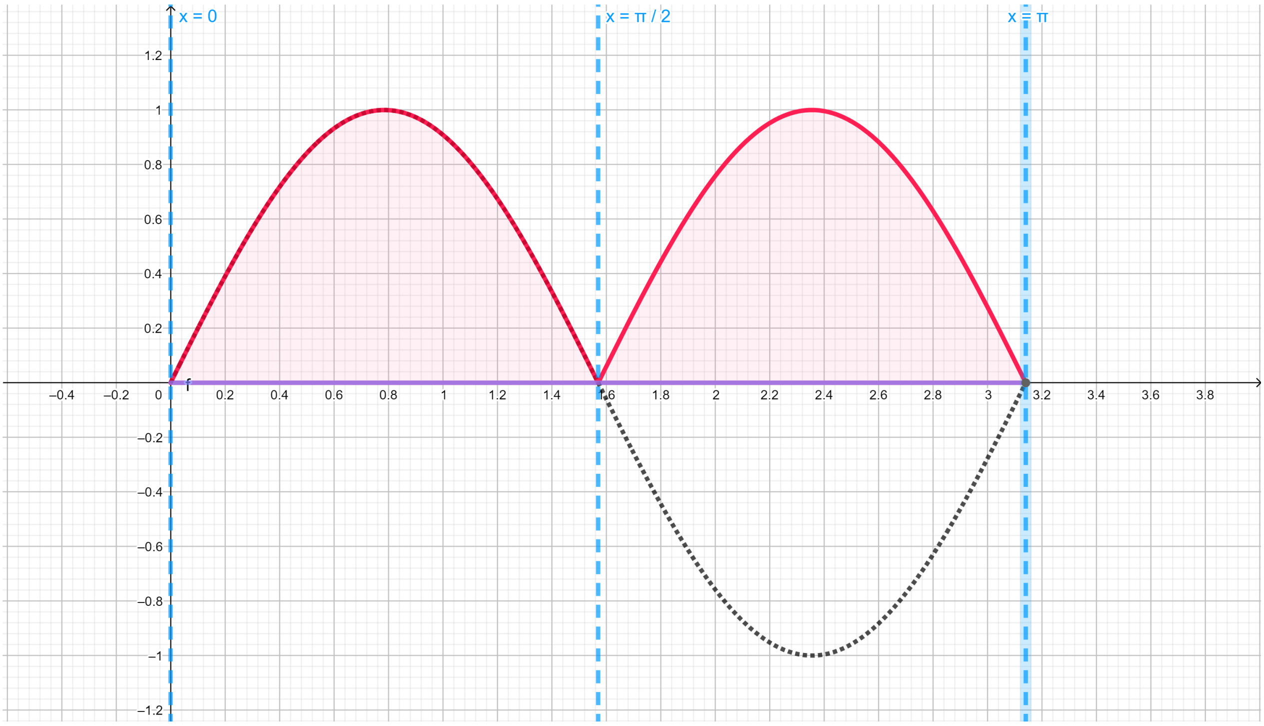


Figura 7.1: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.4**. A magenta (resp. a lilás) encontra-se representado o gráfico da função $x \mapsto |\sin(2x)|$ (resp. gráfico da recta horizontal $y = 0$) no intervalo $[0, \pi]$, e a pontilhado o gráfico da função $x \mapsto \sin(2x)$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Com recurso ao cálculo do integral $\int_0^{\pi} \sin(2x)dx$ e às propriedades de integração – mais propriamente, a propriedade da subdivisão – podemos ainda concluir que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx$.

2. A região determinada pelo sistema de inequações
$$0 \leq x \leq 1 \;\; \& \;\; e^x \leq y \leq (1+x)^n \;\; (n \geq 2)$$
3. A região compreendida entre as retas verticais $x=-r$, $x=r$ e a hipérbole de equação
$$y^2 - x^2 = r^2,$$
com $r > 0$.
4. A região dada pelo semi-círculo de equação
$$x^2 + y^2 = r^2,$$
com $r > 0$, que se encontra acima do eixo Ox.
5. A região compreendida entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 2\pi$ e os gráficos das funções seno e cosseno.

■

■ **Exemplo 7.6 — Área delimitada pelo gráfico duma recta e duma parábola.** A área da região limitada pelos gráficos das funções definidas por $y = x$ e $y = x^2$ no intervalo $[0,1]$ é dada por
$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
■

■ **Exemplo 7.7 — Continuação do Exemplo 7.6.** Suponhamos agora que pretendemos determinar a área da região limitada pelos gráficos das funções definidas por $y = x$ e $y = x^2$ no intervalo $[0,2]$ é dada pela soma dos integrais
$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |x - x^2|\,dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2)\,dx + \int_1^2 (-x + x^2)\,dx. \end{aligned}$$
A fórmula acima resultou do facto de:

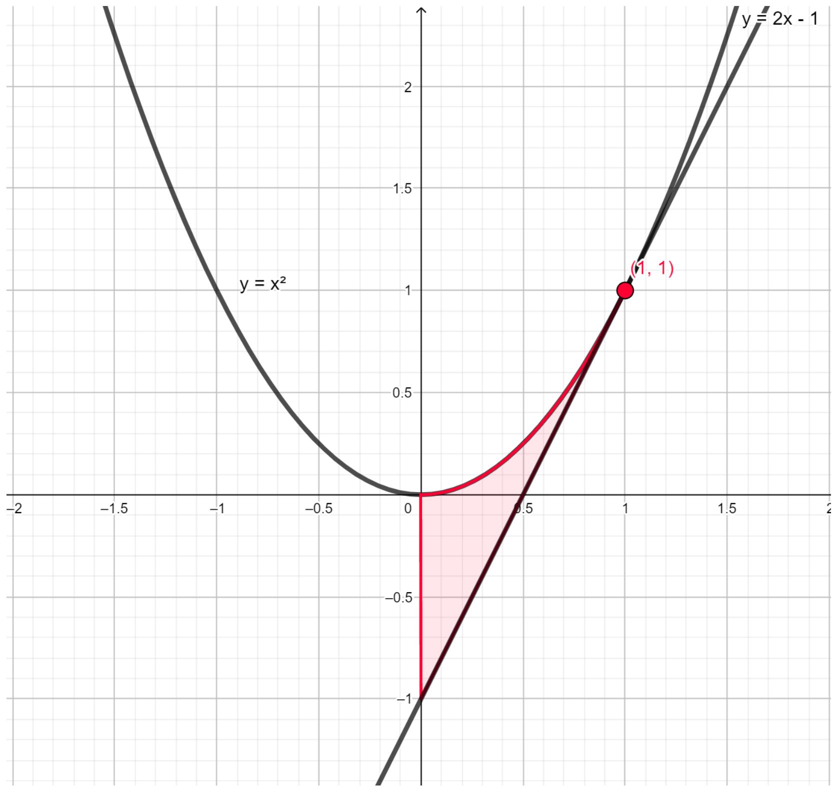
- o gráfico da parábola de equação $y = x^2$ se situar abaixo do gráfico da recta, isto é, $x^2 \leq x$, para valores de $x \in [0,1]$;
- o gráfico da parábola de equação $y = x^2$ se situar acima do gráfico da recta, isto é, $x^2 \leq x$, para valores de $x \in [1,2]$.

Deixamos ao cargo do leitor a tarefa de verificar que $A = 1$ é o valor da área pretendida.

■

■ **Exemplo 7.8 — Para revisitar a equação da recta tangente.** Suponhamos agora que pretendemos determinar a área da região delimitada entre as rectas verticais
$$x = 0 \text{ e } x = 1,$$
a parábola de equação
$$y = x^2$$
e a recta tangente ao gráfico de $x \mapsto x^2$ no ponto $P = (1,1)$. Esta última é dada pela equação $y = 2x - 1$.

Com base na representação gráfica abaixo é fácil de constatar que o gráfico de $x \mapsto x^2$ se situa sempre acima do gráfico da recta tangente, de equação $y = 2x - 1$, donde se retira que
$$A = \int_0^1 (x^2 - (2x-1))dx$$
corresponde à área da região delimitada a vermelho na figura abaixo.



Adicionalmente, com base no Teorema Fundamental do Cálculo e na identidade binomial

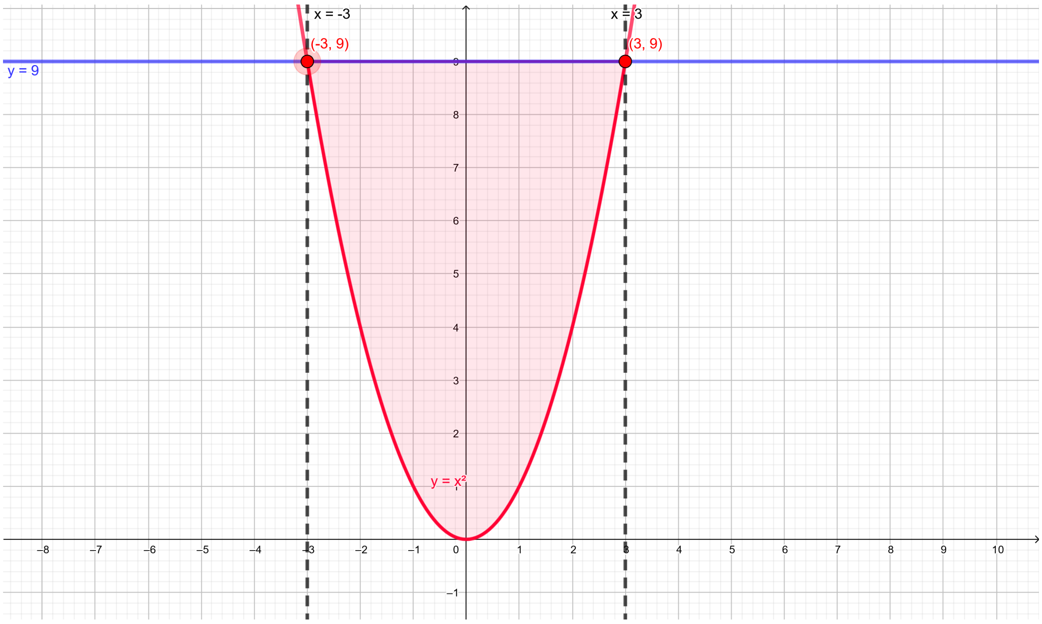
$$(x^2-(2x-1)) = x^2-2x+1 = (x-1)^2$$

é possível concluir que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x-1)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{(1-1)^3}{3}-\frac{(0-1)^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 7.9 — Igualdade de áreas.** Na figura abaixo encontra-se representado a região limitada inferiormente parábola de equação $y = x^2$ (a magenta), e superiormente pela recta horizontal $y = 9$ (a azul).



Podemos facilmente verificar que a área da região sombreada na figura acima pode ser descrita pelo integral definido

$$A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx,$$

onde os extremos de integração $x = -3$ e $x = 3$ foram determinados a partir da interseção da parábola $y = x^2$ com $y = 9$ (soluções da equação $x^2 = 9$).

Adicionalmente, é fácil de verificar via o Teorema Fundamental do Cálculo que $A = 36$.

Supondo agora que pretendemos subdividir a região a sombreado em duas áreas, separadas pela recta de equação $y = c$ $(0 < c < 9)$, poderíamos chegar às seguintes conclusões – que deverá verificar como exercício:

- O integral definido
$$A(c) = \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2)dx$$
permite-nos calcular a área limitada inferiormente parábola de equação $y = x^2$, e superiormente pela recta horizontal $y = c$;
- A diferença de integrais definidos
$$36 - A(c) = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx - \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2)dx$$
permite-nos determinar a área delimitada pela parábola $y = x^2$, e pelas rectas de equações $y = 9$ e $y = c$.
- O valor da área $A(c)$ é igual a $\frac{4}{3}\sqrt{c^3}$;
- A recta horizontal, de equação $y = c$, divide a área a sombreado acima em duas regiões de áreas iguais (i.e. $36 - A(c) = A(c) \Longrightarrow A(c) = 18$) quando $c = \frac{9}{\sqrt[3]{4}}$.

■

Desafio 7.1 — Como complemento ao Exemplo 7.8. Determine a área da região delimitada entre as rectas verticais

$$x = 1 \text{ e } x = \tfrac{3}{2},$$

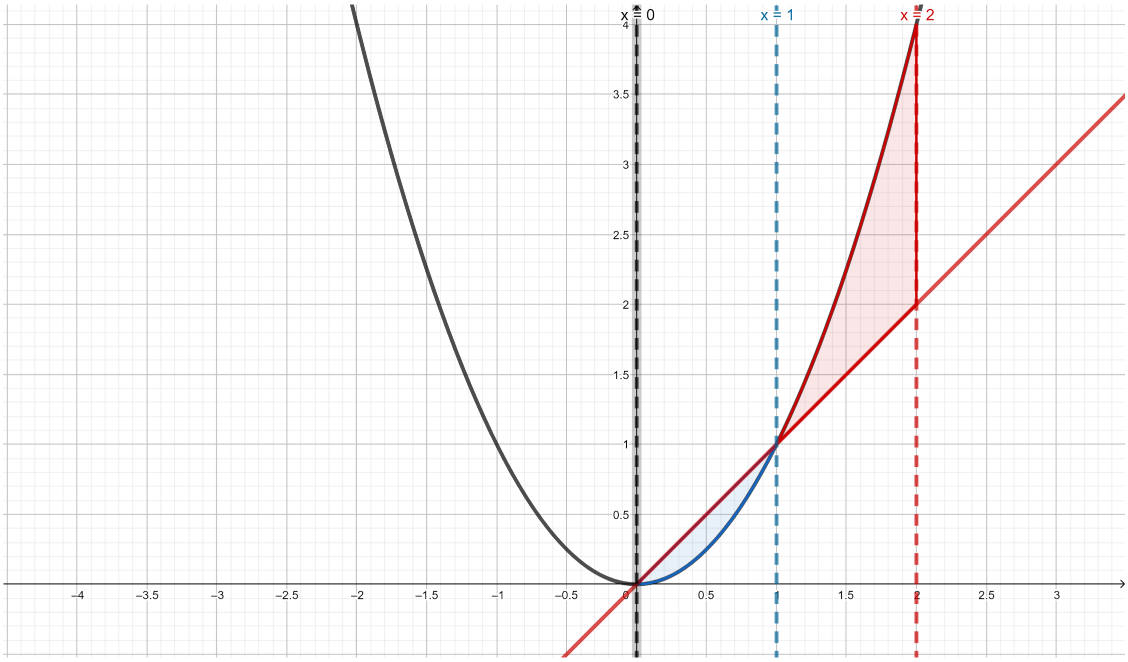


Figura 7.2: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.6** & do **Exemplo 7.7**. A área da região a azul é delimitada pelo integral $\int_0^1 (x-x^2)\,dx$. Por sua vez, o integral $\int_0^2 |x-x^2|\,dx$ corresponde à soma das áreas das regiões a azul – dada pelo integral $\int_0^1 (x-x^2)\,dx$ – e a vermelho – dada pelo integral $\int_1^2 (-x+x^2)\,dx$.

a parábola de equação

$$y = x^2$$

e a recta tangente ao gráfico de $x \mapsto x^2$ no ponto $P = (1,1)$.

Desafio 7.2 — Continuação do Exemplo 7.6 & do Exemplo 7.7. Determine, para que valores de $b \geq 1$ se verifica a igualdade

$$\int_0^b |x-x^2|dx = 2\int_0^1 (x-x^2)dx.$$

O que pode concluir acerca da área do gráfico delimitado pelo gráfico da recta $y = x$, da parábola e pelas rectas verticais $x = 1$ e $x = b$?

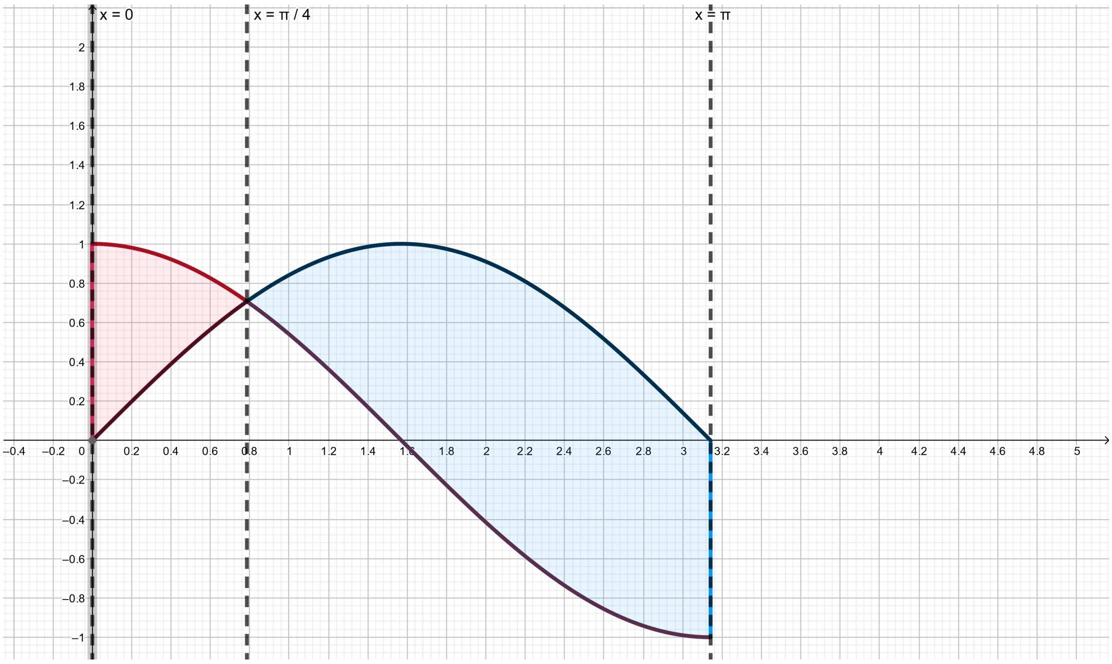


Figura 7.3: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.10**. A área sombreada a vermelho é determinada a partir do integral definido $\int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx$, ao par que a área sombreada a azul é determinada a partir do integral definido $\int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx$. Por seu turno, o integral definido $\int_{0}^{\pi} \mid \cos x - \sin x \mid\, dx$ corresponde à soma das áreas das regiões sombreadas da figura. Esta subdivisão da área do gráfico foi necessária, uma vez que a função $x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ não tem sinal constante. Esta constatação é elucidada pelo facto do gráfico da função cosseno se situar acima do gráfico da função seno no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, e de o gráfico da função seno passar a se situar acima do gráfico da função cosseno no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

■ **Exemplo 7.10 — Área compreendida entre funções trigonométricas.** A área da região compreendida entre os gráficos das funções definidas por $y = \sin x$ e $y = \cos x$ para $x \in [0, \pi]$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \mid \cos x - \sin x \mid\, dx &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \\
&+ \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx \\
&= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + \\
&+ [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi} \\
&= \sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

■

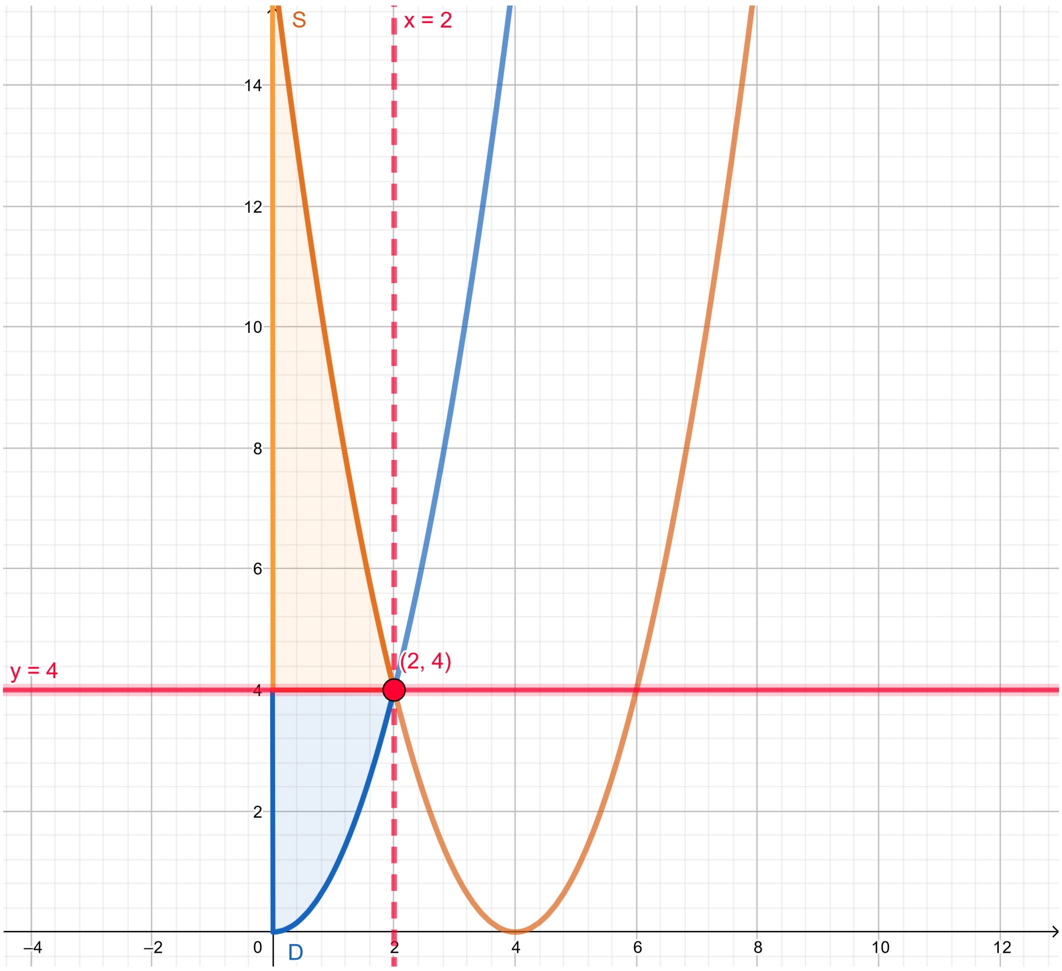
Desafio 7.3 — Vide Exemplo 2.20 do Capítulo 2. Para valores de $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, determine as áreas das regiões delimitadas entre os gráficos das funções:

1. $y = x$ e $y = \sin(x)$;
2. $y = x$ e $y = \tan(x)$;
3. $y = \sin(x)$ e $y = \tan(x)$.

■ **Exemplo 7.11 — Excedentes do Produtor e do Consumidor.** Na figura abaixo estão representadas à direita do eixo Oy duas regiões a sombreado, definidas pelas funções

$$D(x) = x^2 \text{ (a azul) e } S(x) = x^2 - 8x + 16 \text{ (a laranja),}$$

que podem ser interpretadas como o excedentes do produtor e do consumidor – vide mais à frente a subseção **7.6.1 Excedentes do Produtor e do Consumidor**.



Para determinarmos as regiões acima, começámos por determinar a interseção dos gráficos D e S – que corresponde ao ponto de equilíbrio $(x, y) = (2, 4)$.

Assim, a região a azul – que pode ser interpretada como o excedente do produtor – é determinada a partir do integral definido

$$\int_0^2 (4 - D(x))dx = 8 - \int_0^2 D(x)dx,$$

ao par que a região a laranja – que pode ser interpretada como o excedente do consumidor – é determinada a partir do integral definido

$$\int_0^2 (S(x) - 4)dx = \int_0^2 S(x)dx - 8.$$

Note ainda que em ambos os integrais acima o valor numérico 8, descrito em termos do integral definido

$$8 = \int_0^2 4dx$$

corresponde à área do rectângulo delimitado pelas rectas horizontais

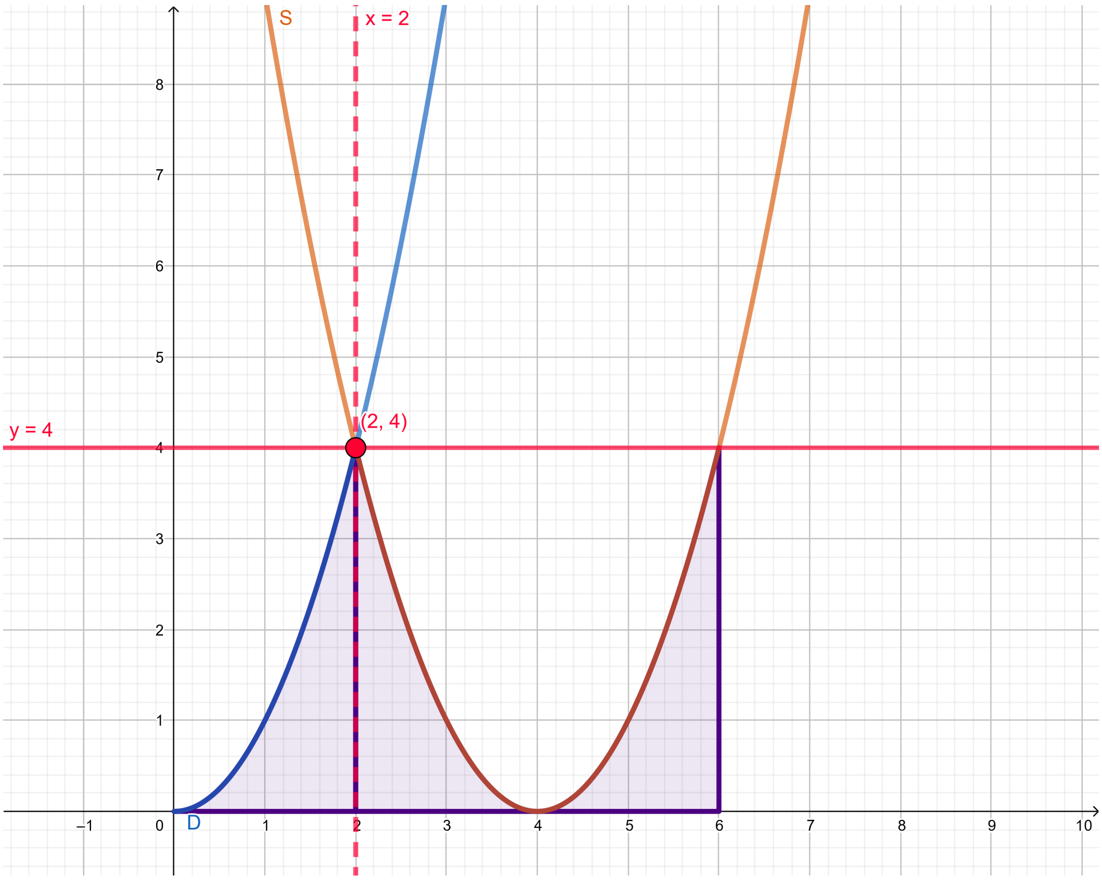
$$y = 0 \quad \& \quad y = 4,$$

e pelas rectas verticais

$$x = 0 \quad \& \quad x = 2.$$

■

Desafio 7.4 — Área da região colorida. Determine a área sombreada da figura abaixo, descrita em termos das funções D e S do **Exemplo 7.11**.



Definição 7.4.4 — Região Horizontalmente Simples. A área da região

$$R = \{(x,y) : c \leq y \leq d \quad \wedge \quad q(y) \leq x \leq p(y)\}$$

é igual a

$$A = \int_c^d (p(y) - q(y))\, dy.$$

■ **Exemplo 7.12 — Horizontalmente Simples.** Constituem exemplos de regiões horizontalmente simples:

1. A região determinada pelo sistema de inequações

$$y^n \leq x \leq \sqrt[n]{y} \ \ \& \ \ 0 \leq y \leq 1 \ \ \text{(n natural diferente de 1)}$$

2. A região determinada pelo sistema de inequações

$$0 \leq y \leq 1 \ \ \& \ \ e^y \leq x \leq (1+y)^n \ \ (n \geq 2)$$

3. A região compreendida entre as retas horizontais $y = -r$, $y = r$ e o gráfico da hipérbole, de equação

$$x^2 - y^2 = r^2,$$

com $r > 0$.

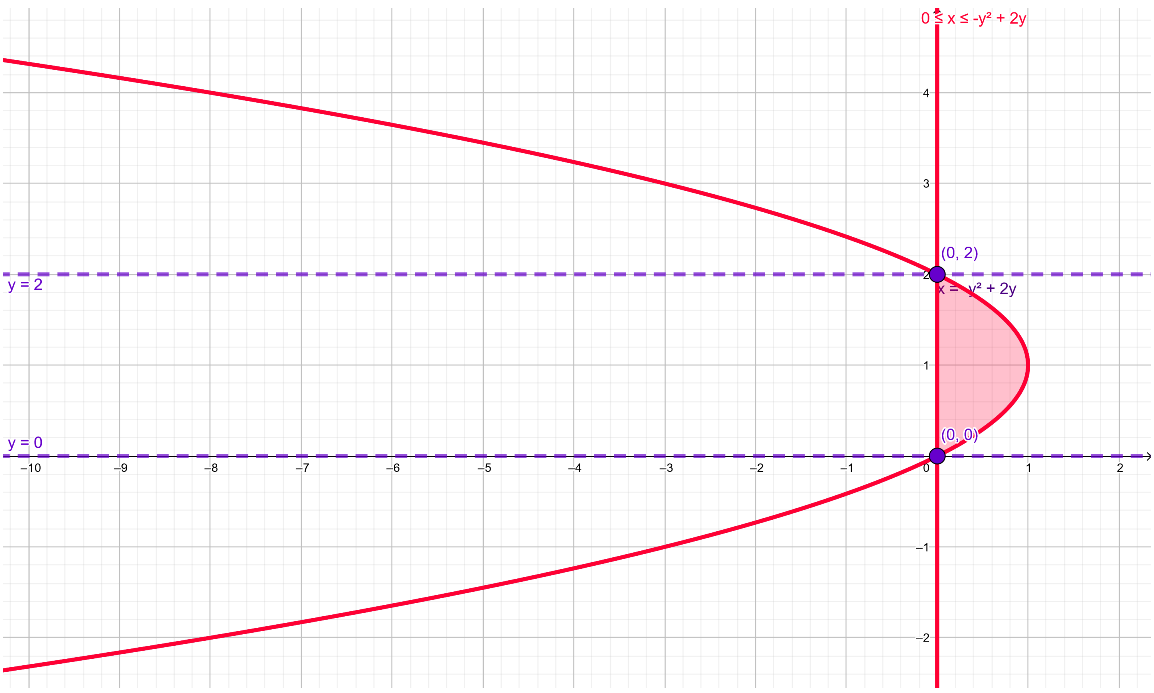
4. A região dada pelo semi-círculo de equação

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

com $r > 0$, que se encontra à esquerda do eixo Oy.

■

■ **Exemplo 7.13 — Área de região horizontalmente simples.** A área representada na figura abaixo corresponde à região situada no primeiro quadrante e limitada por $x = -y^2 + 2y$ e $x = 0$



Esta última é dada por

$$\int_0^2 \left(-y^2 + 2y\right) dy = \left[-\frac{y^3}{3} + y^2\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

Nos integral definido acima, os extremos de integração foram obtidos como a interseção dos gráficos de $x = -y^2 + 2y$ e de $x = 0$ (soluções da equação $-y^2 + 2y = 0$).

■

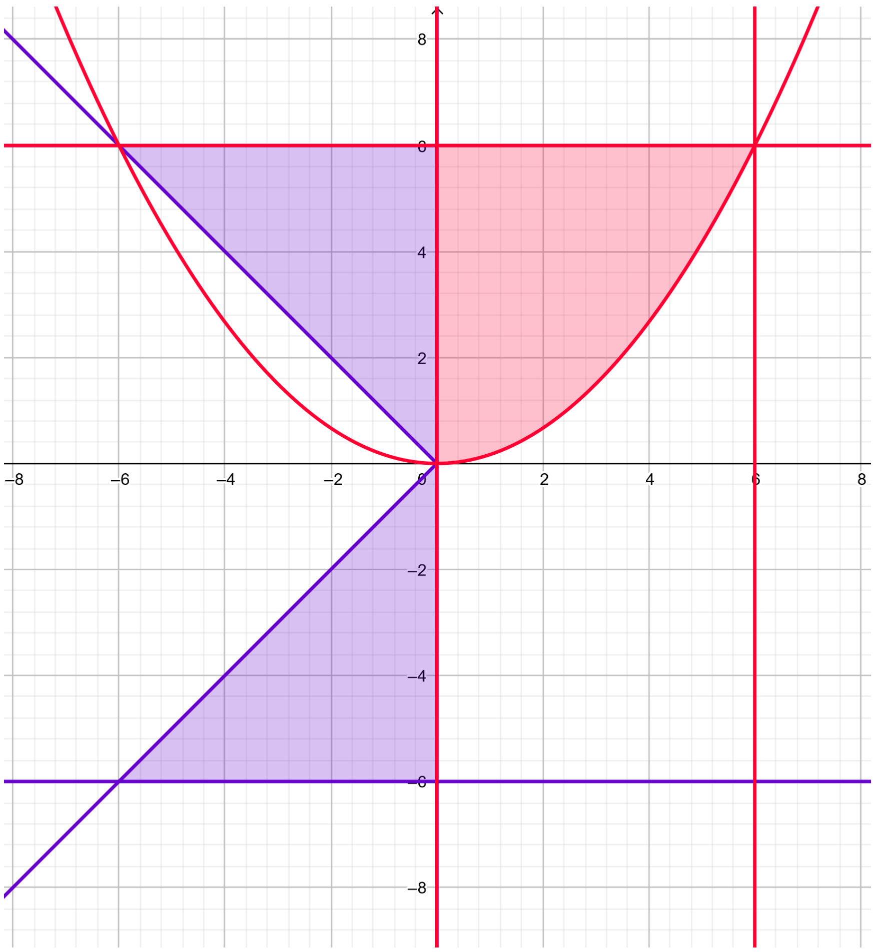
■ **Exemplo 7.14 — Reunião de regiões horizontalmente e verticalmente simples.** Na figura abaixo encontra-se representada uma região R, definida como a reunião de duas regiões R_1 e R_2, onde:

1. R_1 – a lilás – é a região horizontalmente simples dada por

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -6 \leq y \leq 6 \ \text{ e } \ -|y| \leq x \leq 0\};$$

2. R_2 – a vermelho – é a região verticalmente simples dada por

$$R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 6 \ \text{ e } \ \frac{x^2}{6} \leq y \leq 6\right\}.$$



Uma decomposição alternativa da região

$$R = R_1 \cup R_2$$

passaria por decompor em duas regiões verticalmente simples situadas acima e abaixo do eixo Ox:

1. **Acima do eixo** Ox: Região verticalmente simples (R_3), delimitada pelas rectas $y = -x$ e $y = 6$, e pela parábola $y = \frac{x^2}{6}$.
2. **Abaixo do eixo** Ox: Região verticalmente simples (R_4), delimitada pelo eixo Oy e pela rectas de equações $y = x$ e $y = -6$.

Como exercício:

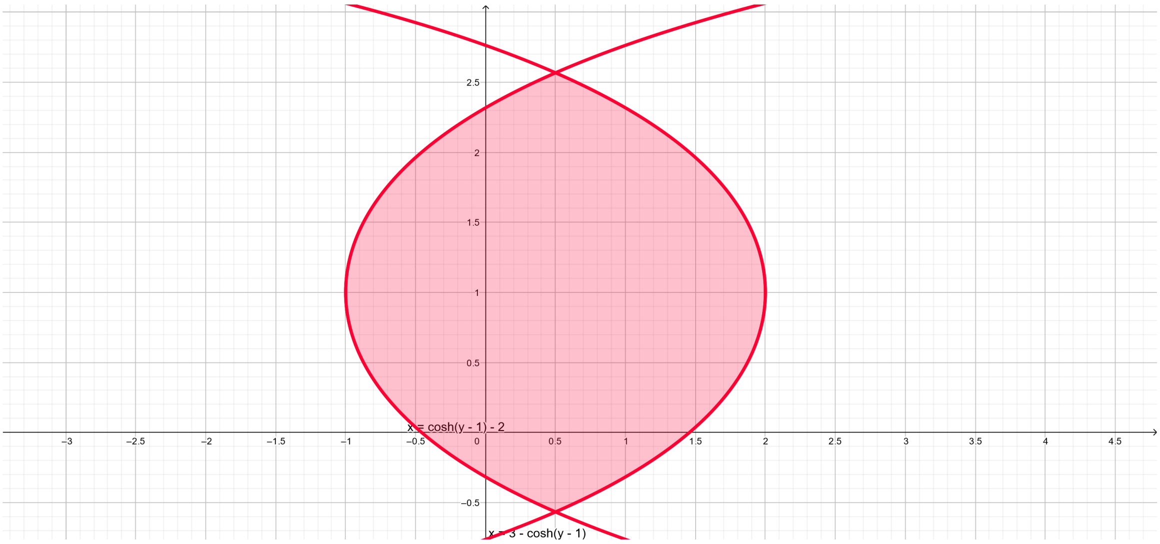
1. Represente a área das regiões R_1 e R_2, $A(R_1)$ e $A(R_2)$ respectivamente, como integrais definidos. Use estas relações para determinar a área da região R.
2. Represente as áreas das regiões verticalmente simples R_3 e R_4 supramencionadas como integrais definidos e calcule-as.
3. Sendo $A(R_3)$ e $A(R_4)$ as áreas das regiões R_3 e R_4, respectivamente, verifique que

$$A(R) = A(R_3) + A(R_4).$$

■

Desafio 7.5 — Área delimitada por curvas hiperbólicas. Determine a área da região horizontalmente simples da figura abaixo, delimitada pelas curvas hiperbólicas, de equação

$$x = \cosh(y-1) - 3 \text{ e } x = 2 - \cosh(y-1).$$



7.5 Técnicas de Integração

Esta subseção vai ao encontro da discussão do cálculo de primitivas iniciado na seção **4.4 Métodos de Primitivação** do capítulo **4 Primitivação**.

7.5.1 Integração Por Partes

Teorema 7.5.1 — Fórmula de Integração Por Partes.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

■ **Exemplo 7.15**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx &= \left[\frac{x}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\,dx \\
&= \sqrt{3} - \left[\frac{1}{15}\sqrt{(2x+1)^5}\right]_0^1 \\
&= \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15} = \frac{1+6\sqrt{3}}{15}.
\end{aligned}$$

■

7.5.2 Integração Por Substituição

Teorema 7.5.2 — Fórmula de Integração por Substituição .

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\,dt$$

sendo $a = g(c)$ e $b = g(d)$.

Em resumo deverá seguir os seguintes passos:

1. Mudar a variável por meio de $x = g(t)$
2. Diferenciar a variável x, isto é, $dx = g'(t)dt$
3. Substituir x e dx, o que origina uma nova função de t:

   $$f[g(t)]g'(t)$$

4. Calcular as novas extremidades (ou extremos): $c = g^{-1}(a)$ e $d = g^{-1}(b)$
5. Calcular $\int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$

■ **Exemplo 7.16 — Exemplo 7.9 segundo integração por substituição.** No **Exemplo 7.9** verificámos essencialmente que as funções de área da forma

$$A(s) = \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} (s - x^2)dx \quad (s > 0)$$

permitem-nos determinar a área de uma região delimitada superiormente por rectas horizontais da forma $y = s$, e inferiormente pela parábola de equação $y = x^2$.

Da substituição $x = \sqrt{s}\,t$ $(-1 \leq t \leq 1)$ segue que

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} (s - x^2)dx \\ &= \int_{-1}^{1} (s - st^2)\sqrt{s}dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1 - t^2)s\sqrt{s}dt \\ &= \sqrt{s^3}A(1). \end{aligned}$$

Em particular, a área da região delimitada pelas rectas $y = 9$ e $y = c$, e pela parábola de equação $y = x^2$ pode ser descrita através da relação

$$36 - A(c) = (\sqrt{3^3} - \sqrt{c^3})A(1).$$

Adicionalmente, podemos ainda verificar que o factor $\frac{4}{3}$ que aparece nos cálculos do **Exemplo 7.9** coincide com $A(1)$. ■

■ **Exemplo 7.17 — Substituição trigonométrica.** Recorrendo à substituição trigonométrica

$$x = 3\sin(t) - 1$$

é fácil concluir com base nas igualdades

$$\begin{aligned} 2 &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \quad (t = \tfrac{\pi}{2}) \\ -1 &= 3\sin(0) - 1 \quad (t = \tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} \sqrt{9-(x+1)^2}\,dx &= \int_{-1}^{2} 3\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 3\cos t\, 3\cos t\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 9\cos^2 t dt \\ &= 9\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \\ &= \frac{9}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{2}\left(\frac{\pi+\sin(\pi)}{2}\right) \\ &= \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

■

A substituição $t = x+1$ permite-nos demonstrar que

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{9-(x+1)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{9-t^2}\,dx.$$

Em geral, a substituição $t = x - \alpha$ em integrais envolvendo funções da forma $\sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}dx$ permite-nos concluir que

$$\int_{\alpha-\rho}^{\alpha+\rho} \sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}dx = \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2-t^2}dt.$$

Geometricamente, a identidade acima diz-nos que área da semi-circunferência de raio ρ é independente da escolha do centro da circunferência.

Desafio 7.6 — Substituição trigonométrica. Use a substituição trigonométrica

$$x = 4\tan(t) + 3$$

para calcular o integral

$$\int_{-1}^{7} \sqrt{16+(x-3)^2}dx.$$

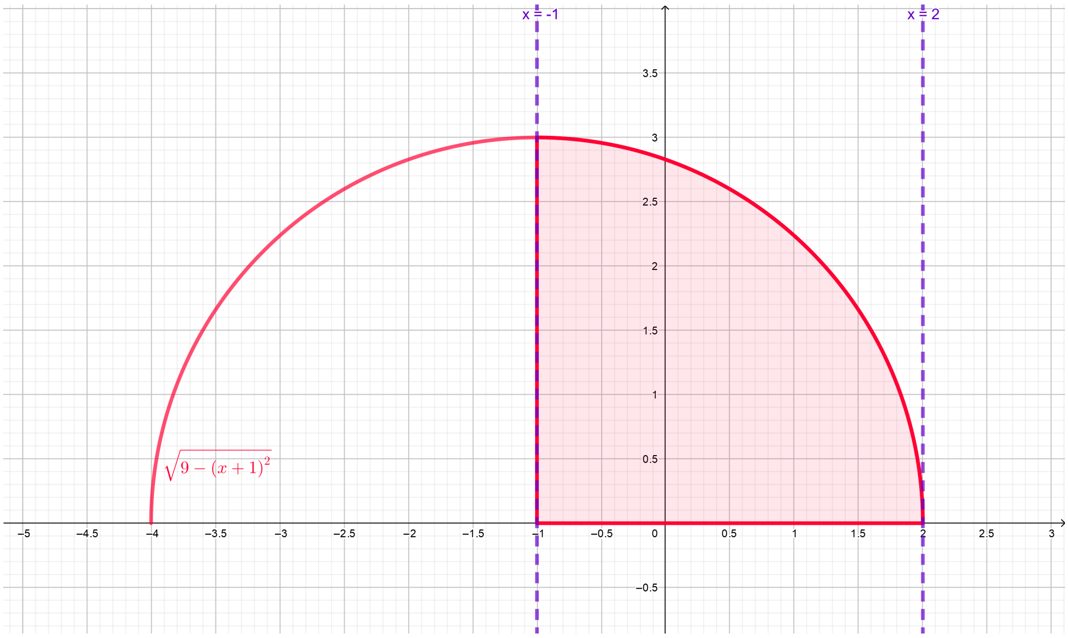


Figura 7.4: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.17**. A área sombreada a vermelho é determinada a partir do integral definido $\int_{-1}^{2} \sqrt{9-(x+1)^2}\,dx$. A substituição trigonométrica permitiu-nos concluir que o integral definido dá-nos área de $\frac{1}{4}$ de circunferência de raio 3 (i.e. $\frac{\pi r^2}{4}$ para $r = 3$).

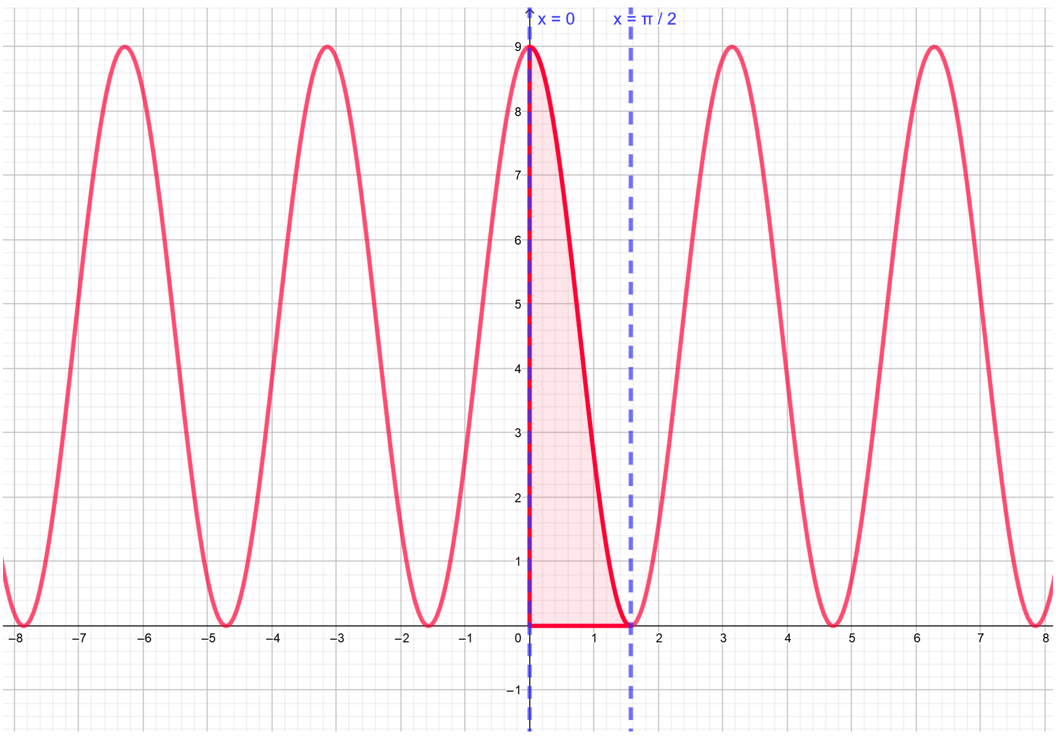


Figura 7.5: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.17**. A substituição trigonométrica $x = 3\sin(t) - 1$ permitiu-nos mostrar que $\int_{-1}^{2} \sqrt{9-(x+1)^2}\,dx$ coincide com a área delimitada pelo eixo Ox, pelo gráfico de $x \mapsto 9\cos^2(x)$, e pelas rectas verticais $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

7.5.3 Integral definido envolvendo a função inversa

Corolário 7.5.3 — Fórmula de Integração da Função Inversa.

$$\int_c^d h^{-1}(y)dy = bd - ac - \int_a^b h(x)\,dx,$$

sendo $c = h(a)$ e $d = h(b)$.

Demonstração. Suponhamos que $c = h(a)$ e $d = h(b)$. Usando a técnica de primitivação por substituição para $y = h(x)$, segue que

$$h^{-1}(y) = x \quad \& \quad dy = h'(x)dx.$$

Logo,

$$\int_c^d h^{-1}(y)dy = \int_a^b xh'(x)dx.$$

Por outro lado, da fórmula de integração por partes, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_a^b xh'(x)dx &= [xh(x)]_a^b - \int_a^b x'h(x)dx \\ &= bh(b) - ah(a) - \int_a^b h(x)dx.\end{aligned}$$

A combinação das duas fórmulas de integração anteriores, e as condições

$$c = h(a) \text{ e } d = h(b)$$

permite-nos assim concluir que

$$\int_c^d h^{-1}(y)dy = bd - ac - \int_a^b h(x)dx,$$

como pretendido. ■

As sequências de igualdades

$$bd - ac = (b-a)d + a(d-c) = \int_a^b d\,dx + \int_c^d a\,dy$$

$$bd - ac = b(d-c) + c(b-a) = \int_c^d b\,dy + \int_a^b c\,dx$$

permitem-nos obter as seguinte formulações equivalentes do **Corolário 7.5.3**:

$$\begin{aligned}\int_c^d \left(h^{-1}(y) - a\right)dy &= \int_a^b (d - h(x))\,dx \\ \int_c^d \left(h^{-1}(y) - b\right)dy &= \int_a^b (c - h(x))\,dx.\end{aligned}$$

Mais adiante, estas serão de extrema utilidade para a resolução do **Desafio 7.7**.

■ **Exemplo 7.18** A aplicação do **Corolário 7.5.3** permite-nos facilmente concluir que

$$\int_1^e \ln x\,dx = e - \int_0^1 e^y\,dy = 1.$$

■

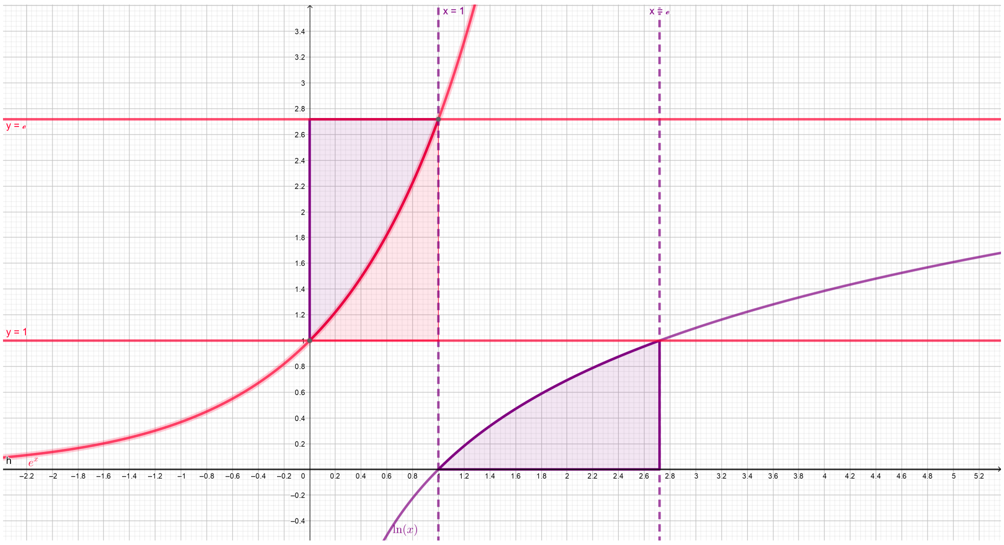


Figura 7.6: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.18**. O integral definido $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$ corresponde à região a lilás compreendida entre as rectas verticais $x=1$ e $x=e$ (a tracejado), enquanto que o integral definido $\int_0^1 e^y dy$ corresponde à região a rosa. A identidade $e-\displaystyle\int_0^1 e^y = \int_0^1 (e-e^y)dy$ permitiu-nos concluir geometricamente que, no intervalo $[0,1]$, a área compreendida entre a recta $y=e$ e a função $x\mapsto e^x$ coincide com $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$.

■ **Exemplo 7.19** Atendendo às identidades trigonométricas

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)=\tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\tfrac{1}{2},$$

podemos aplicar mais uma vez o **Corolário 7.5.3** permite-nos facilmente concluir, após alguns cálculos auxiliares, que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos(x)\,dx &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}.\frac{\pi}{3}-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\cos(y)\,dy\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}.\frac{\pi}{3}-\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+1\right),
\end{aligned}$$

ou equivalentemente, que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\arccos(x)-\frac{\pi}{6}\right)dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\cos(y)\right)dy\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)-\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi+6}{12}.
\end{aligned}$$

■

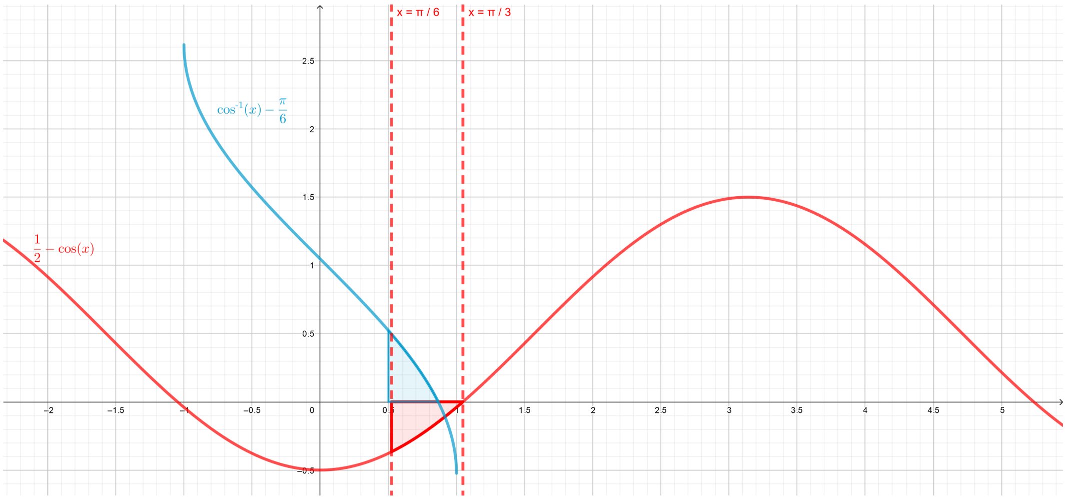


Figura 7.7: Ilustração gráfica do **Exemplo 7.19**. O integral definido $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\arccos(x) - \frac{\pi}{6}\right) dx$ corresponde à região a azul, enquanto que o integral definido $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \cos(y)\right) dy$ corresponde à área da região a vermelho compreendida entre as rectas verticais $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{3}$ (a tracejado). Por seu turno, a aplicação do **Corolário 7.5.3** permitiu-nos ilustrar geometricamente a igualdade $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\arccos(x) - \frac{\pi}{6}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \cos(y)\right) dy$ (i.e. a área das regiões a azul e a vermelho coincide).

7.5.4 Integração num intervalo simétrico em relação à origem

Esta subseção tem como objectivo extrapolar o estudo de paridade e simetria, iniciado na subseção **1.3.3 Paridade e Simetria** do capítulo **1 Funções Elementares e Gráficos** para o cálculo de integrais definidos em intervalos simétricos da forma $[-a,a]$.

Teorema 7.5.4 — Integral de uma função par ou ímpar. Seja f uma função contínua em $[-a,a]$, onde $a > 0$.

- Se f é ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;
- Se f é par então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Demonstração. Usando a decomposição temos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

De seguida, usando a mudança de variável $x = -t$ obtemos:

(i) Se f é ímpar então $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$;

(ii) Se f é par então $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

■

■ **Exemplo 7.20 — Área do gráfico do seno.** Voltando ao **Exemplo 7.4**, podemos facilmente concluir, com base na substituição $t = x - \frac{\pi}{2}$, e na identidade $\sin(2t+\pi) = -\sin(2t)$ que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin(2x)dx &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt; \\
\int_0^{\pi} |\sin(2x)|dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)|dt.
\end{aligned}$$

No caso do primeiro integral, a igualdade envolvendo a função seno – que é ìmpar no intervalo simétrico $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ – permite-nos imediatamente concluir que

$$\int_0^{\pi} \sin(2x)dx = 0.$$

Para o segundo caso, atente que o módulo nos garante que $t \mapsto |\sin(2t)|$ é uma função par em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Desta observação, podemos facilmente chegar na sequência de igualdades:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} |\sin(2x)|dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)|dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)|dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(2t)dt \\
&= [-\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\cos(\pi) + \cos(0) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 7.21 — Complemento ao Exemplo 7.17.** Suponhamos que pretendemos calcular o integral

$$\int_{-4}^{2} x\sqrt{9-(x+1)^2}dx.$$

Fazendo a substituição, $x = t - 1$, tem-se que o integral acima pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{2} x\sqrt{9-(x+1)^2}dx &= \int_{-3}^{3} (t-1)\sqrt{9-t^2}dt \\
&= \int_{-3}^{3} t\sqrt{9-t^2}dt - \int_{-3}^{3} \sqrt{9-t^2}dt.
\end{aligned}$$

Atendendo agora ao facto de:

1. $t \mapsto \sqrt{9-t^2}$ ser uma função par em $[-3,3]$;
2. $t \mapsto t\sqrt{9-t^2}$ ser uma função ímpar em $[-3,3]$ (produto de uma função par por uma função ímpar),

segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} \sqrt{9-t^2}dt &= 2\int_0^{3} \sqrt{9-t^2}dt \\
\int_{-3}^{3} t\sqrt{9-t^2}dt &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, o cálculo do integral definido acima reduz-se à identidade

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{2} x\sqrt{9-(x+1)^2}dx &= \int_{-3}^{3}(t-1)\sqrt{9-t^2}dt \\ &= -2\int_{0}^{3}\sqrt{9-t^2}dt,\end{aligned}$$

onde o integral definido $\int_0^3 \sqrt{9-t^2}dt$ corresponde ao cálculo do integral obtido no **Exemplo 7.17**.

Este facto permite-nos concluir que

$$\int_{-4}^{2} x\sqrt{9-(x+1)^2}dx = -\frac{9\pi}{2}.$$

■

7.6 Aplicações

7.6.1 Os Excedentes do Produtor e do Consumidor

Os economistas estudam a determinação de preços de um bem de consumo num mercado, onde os agentes económicos se encontram para realizarem transacções. Os preços num mercado de concorrência perfeita são estabelecidos pela lei da procura e da oferta.
Por um lado, a quantidade procurada q de um bem varia no sentido inverso do seu preço p, sendo expressa pela seguinte função procura:

$$\begin{array}{rrcl} D: & J\subseteq [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & q & \longmapsto & p=D(q)\end{array}$$

Supomos que:

- D é positiva, diferenciável e estritamente decrescente em J.

A sua representação gráfica, designada por curva de procura, satisfaz

$$p=D(q) \Longleftrightarrow q=d(p)$$

sendo d a função inversa de D.
Por outro lado, a quantidade q do mesmo bem que os produtores estão dispostos a produzir e a vender varia no mesmo sentido do seu preço p, sendo expressa pela seguinte função oferta

$$\begin{array}{rrcl} S: & J\subseteq [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & q & \longmapsto & p=S(q)\end{array}$$

Supomos que:

- S é positiva, diferenciável e estritamente crescente em J.

A sua representação gráfica, designada por curva da oferta, satisfaz

$$p=S(q) \Longleftrightarrow q=s(p)$$

sendo s a função inversa de S.
Os interesses antagónicos dos consumidores e dos produtores vão determinar o equilíbrio no mercado, que ocorre quando a quantidade procurada do bem coincide com a quantidade oferecida, isto é, $d(p_e)=s(p_e)$. Assim sendo ao correspondente preço, p_e, chama-se preço de equilíbrio.
Graficamente, o excedente do consumidor é a medida da área compreendida entre o eixo dos preços, a curva da procura e o preço de equilíbrio. O excedente do produtor é a medida da área compreendida entre o eixo dos preços, o preço de equilíbrio e a curva da oferta.

Desafio 7.7 — Excedentes do Produtor e do Consumidor.

1. Escreva os excedentes do consumidor e do produtor na forma de integrais usando q como variável independente.
2. Escreva os excedentes do consumidor e do produtor na forma de integrais usando agora p como variável independente. Note que as funções procura e oferta admitem inversa.
3. Recorrendo à fórmula de integração da função inversa, mostre a igualdade entre os integrais para o excedente do produtor.
4. Dê exemplos de funções procura e oferta e estude essas funções quanto ao sinal e à monotonia.
5. Considere um mercado caracterizado pelas funções procura e oferta, definidas respectivamente por:

$$D(q) = \sqrt{20-q} \quad ; \quad S(q) = \frac{q}{2} + 2\,.$$

   onde $q \geq 0$ e $p \geq 0$.
   (a) Trace as curvas da procura e da oferta.
   (b) Calcule o preço p_e e a quantidade q_e de equilíbrio do bem. Qual é o significado geométrico do ponto $I = (q_e, p_e)$?
   (c) Determine o excedente do consumidor e identifique-o geometricamente.
   (d) Determine o excedente do produtor e identifique-o geometricamente.

7.6.2 As Curvas de Lorenz e o Coeficiente de Gini

O estudo da repartição pessoal dos rendimentos por toda a população de um país durante um período ou a comparação de rendimentos entre países no mesmo período tem sido alvo de análise estatística por parte dos cientistas das Ciências Sociais. Uma forma de se medir quantitativamente a desigualdade na repartição dos rendimentos baseia-se no traçado das chamadas Curvas de Lorenz. Para construir a curva de Lorenz coloca-se no eixo horizontal a percentagem acumulada da população, ordenada por ordem crescente dos seus rendimentos, e no eixo vertical a percentagem acumulada dos rendimentos correspondentes. Essa curva é a representação gráfica da função de Lorenz, que é definida por:

$$\begin{array}{rccc} L: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = L(x) \end{array}$$

onde $L(x)$ é a fracção do rendimento total recebido pelos x por cento da população. Supondo que L é regular em $[0,1]$, então toda a função de Lorenz satisfaz as seguintes condições:
(i) $L(0) = 0$ e $L(1) = 1$;
(ii) $L(x) \leq x$ para todo o $x \in [0,1]$;
(iii) L é uma função estritamente crescente.
O coeficiente de Gini é um índice estatístico que mede a desigualdade na repartição dos rendimentos, variando entre zero para igualdade perfeita e 1 para desigualdade total. Graficamente, o coeficiente de Gini corresponde ao rácio entre a área, limitada superiormente pela hipotenusa do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,0)$ e inferiormente pela curva de Lorenz, e a área desse triângulo.

Desafio 7.8

1. Usando integrais na variável x, escreva a expressão para o coeficiente de Gini.
2. Mostre que o coeficiente de Gini também é definido por

$$1 - 2\int_0^1 L(x)\,dx\,,$$

   e interprete geometricamente esse resultado em termos de áreas.

3. Calcule o coeficiente de Gini no caso em que $L(x) = x$, para todo o $x \in [0,1]$. Qual o seu significado?
4. Para cada parâmetro $k \in \mathbb{N}$, considere uma função de Lorenz definida por

$$L(x) = \frac{(k-1)}{k}x^2 + \frac{1}{k}x$$

para todo o $x \in [0,1]$.

(a) Mostre que L satisfaz as três condições enunciadas acima.
(b) Calcule o coeficiente de Gini em função de k.
(c) Esboce as curvas de Lorenz para $k \in \{1,2,3,10\}$.
(d) Qual das curvas traçadas traduz maior desigualdade na repartição dos rendimentos? Justifique.
(e) Esboce a curva de Lorenz para k suficientemente grande $(k \to \infty)$ e calcule o coeficiente de Gini correspondente.

5. Consideremos a tabela abaixo com a distribuição de rendimento de um País num dado ano:

x_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	0.07	0.18	0.35	0.62	1

(a) Utilizando a calculadora, estime o parâmetro n (arredondado às centésimas) para a função potência definida por $L(x) = x^n$, de acordo com:

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{5} \ln(x_i)\ln(y_i)}{\sum_{i=1}^{5} \ln^2(x_i)}$$

(b) Calcule o coeficiente de Gini.

7.7 Recursos Complementares

Sugestões de Leitura-páginas: 137 - 201 - Manual: SILVA, Jaime Carvalho, Princípios de Análise Matemática Aplicada, Lisboa, Editora McGraw-Hill de Portugal, 1994 [BP 517 SIL]

7.8 Exercícios Propostos

67. Calcule os seguintes integrais definidos:

(a) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\ln 3}} xe^{-x^2}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3} \sinh x\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int_{-1}^{4} |\,3-x\,|\,dx$ **(f)** $\displaystyle\int_{-1}^{4} (3-|\,x\,|)\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} (\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$ **(h)** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2}{x^2+2x}\,dx$ **(i)** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3}{x+1}\,dx$

68. Calcule a área da região do plano xOy definida pelos seguintes conjuntos:

(a) $\{(x,y) : -1 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le 4 - x^2\}$ **(b)** $\{(x,y) : 0 \le x \le 4 \wedge -\sqrt{x} \le y \le 0\}$

(c) $\{(x,y) : 0 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le |\,x^2 - 3x\,|\}$ **(d)** $\{(x,y) : \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3} \wedge \frac{1}{2} \le y \le \operatorname{tg} x\}$

(e) $\{(x,y) : 0 \le x \le 8 \wedge 2 - \sqrt{x+1} \le y \le 1\}$ **(f)** $\{(x,y) : -2 \le x \le 0 \wedge e^x \le y \le e^{-x}\}$

69. Para cada uma das seguintes regiões do plano xOy esboce a correspondente região simétrica relativamente à recta de equação $y = x$ e calcule a respectiva área:
   (**a**) $\{(x,y) : 0 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le 4 - x^2\}$

   (**b**) $\{(x,y) : 0 \le x \le 4 \wedge -\sqrt{x} \le y \le 0\}$

   (**c**) $\{(x,y) : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le x\} \cup \{(x,y) : 1 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le \sqrt{2-x}\}$

   (**d**) $\{(x,y) : -1 \le x \le 0 \wedge 1 \le y \le 2 - \sqrt{x+1}\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 8 \wedge 2 - \sqrt{x+1} \le y \le 1\}$

   (**e**) $\{(x,y) : 0 \le x \le 1 \wedge -2\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}\} \cup \{(x,y) : 1 \le x \le 4 \wedge 2x - 4 \le y \le 2\sqrt{x}\}$

70. Recorrendo ao cálculo integral, determine a área do trapézio de vértices: $V_1 = (2,0)$, $V_2 = (1,3)$, $V_3 = (8,3)$ e $V_4 = (6,0)$.
71. Usando a fórmula de integração por partes, calcule:
   (**a**) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} x \ln x \, dx$ (**b**) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x} \, dx$ (**c**) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} x \sec^2 x \, dx$

   (**d**) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 \sinh x \, dx$ (**e**) $\displaystyle\int_{0}^{1} x \operatorname{arctg} x \, dx$ (**f**) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} e^x \cos x \, dx$

   (**g**) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin(3x) \sin x \, dx$ (**h**) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin^2 x \, dx$ (**i**) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 (x+2)^4 \, dx$

72. Usando a fórmula de integração por substituição com a mudança de variável indicada, calcule:
   (**a**) $\displaystyle\int_{0}^{3/2} \sqrt{9-4x^2} \, dx \quad ; \quad x = \tfrac{3}{2} \sin t$ (**b**) $\displaystyle\int_{-\ln(\sqrt{3})}^{0} \frac{1}{\cosh x} \, dx \quad ; \quad x = \ln t$

   (**c**) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{1}{2+\sqrt[3]{x}} \, dx \quad ; \quad x = t^3$ (**d**) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx \quad ; \quad x = \operatorname{tg} t$

73. Mostre que:
   (**a**) $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x \, dx = e - \int_{0}^{1} e^y \, dy$ (**b**) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \arcsin x \, dx = -\frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^{0} \sin y \, dy$

   Dê uma interpretação geométrica dos resultados.
74. Considere a região do plano xOy definida por

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4 \wedge 0 \le y \le \sqrt{3}x\}$$

   (**a**) Esboce a região.
   (**b**) Usando o cálculo integral, determine a área da região.
75. Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[-a,a]$, onde $a \in \mathbf{R}^+$. Mostre que:
   (**a**) Se f é ímpar então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$;
   (**b**) Se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 2\int_{0}^{a} f(x) \, dx$.
76. Calcule a área das regiões do plano xOy limitadas pelas seguintes condições:
   (**a**) $y + x^2 - 4 = 0$; $x - y + 2 = 0$ (**b**) $y + \sqrt{x+1} - 2 = 0$; $y = 1$; $x = -1$

   (**c**) $y - e^{|x|} + 1 = 0$; $y = 2$ (**d**) $y = \sqrt{2-x^2}$; $y = x^2$

   (**e**) $y = \sqrt{2-x^2}$; $y = x^2$; $y = 0$ (**f**) $y = \ln x$; $y = x$; $x = e$; $y = 0$

   (**g**) $y - x^2 - 2x = 0$; $y = -x^2$ (**h**) $y + x^2 - 2 = 0$; $y = |\, 3x + 2 \,|$

8. Integrais Impróprios

8.1 Definição e Exemplos

Definição 8.1.1 — Integração num intervalo ilimitado. Seja f uma função contínua em $[a,+\infty[$. Diz-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

é um integral impróprio.

Definição 8.1.2 — Natureza do Integral Impróprio. Diz-se que o integral impróprio:

- É convergente se o limite existe e é finito
- É divergente se o limite existe e é mais (menos) infinito
- É divergente se o limite não existe

■ Exemplo 8.1 — Integração num intervalo ilimitado.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} e^{-x+1}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{-x+1}\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-x+1}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-t+1}+e^0\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

O integral impróprio é convergente. ■

Exemplo 8.2 — Integração num intervalo ilimitado.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty}[\ln x]_1^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}\ln t \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

O integral impróprio é divergente para $+\infty$. ■

Definição 8.1.3 — Integração num intervalo ilimitado . Seja f uma função contínua em $]-\infty,b]$. Diz-se que

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

é um integral impróprio.

Definição 8.1.4 — Natureza do Integral Impróprio. Diz-se que o integral impróprio:

- É convergente se o limite existe e é finito
- É divergente se o limite existe e é mais (menos) infinito
- É divergente se o limite não existe

Exemplo 8.3 — Integração num intervalo ilimitado.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^{-x}\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left([-e^{-x}x]_t^0 + \int_t^0 e^{-x}\,dx\right) \\
&= \lim_{t\to-\infty}(e^{-t}t + [-e^{-x}]_t^0) \\
&= \lim_{t\to-\infty}(e^{-t}t - 1 + e^{-t}) \\
&= -1 + \lim_{t\to-\infty}(t+1)e^{-t} = -\infty
\end{aligned}$$

O integral é divergente para $-\infty$. ■

Definição 8.1.5 — Integração num intervalo ilimitado. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Definição 8.1.6 — Natureza do Integral Impróprio. Diz-se que:

- É convergente se ambos os integrais são convergentes
- É divergente se, pelo menos, um dos integrais é divergente para $+\infty$ e o outro não é divergente para $-\infty$.
- É divergente se não é convergente nem divergente para ∞

Exemplo 8.4 — Integração num intervalo ilimitado .

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+121}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+121}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+121}\,dx \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+121}\,dx \\
&= 2\lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{x^2+121}\,dx \\
&= 2\lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{121\left(\left(\frac{x}{11}\right)^2+1\right)}\,dx \\
&= \frac{2}{11}\lim_{t\to+\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{11}\right)\right]_0^t \\
&= \frac{2}{11}\lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{11}\right) = \frac{\pi}{11}
\end{aligned}$$

O integral impróprio é convergente. ∎

Definição 8.1.7 — Integração de uma Função Não-Limitada. Seja f contínua em $]a,b]$ mas não limitada. Diz-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

é um integral impróprio.

Definição 8.1.8 — Integração de uma Função Não-Limitada. Seja f contínua em $[a,b[$ mas não limitada. Diz-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

é um integral impróprio.

Exemplo 8.5 — Integração de uma Função Não-Limitada.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x\,dx &= \lim_{t\to0^+} \int_t^1 \ln x\,dx \\
&= \lim_{t\to0^+} [x\ln x - x]_t^1 \\
&= \lim_{t\to0^+} (-1 - t\ln t + t) \\
&= -1 - \lim_{t\to0^+} t\ln t \\
&= -1 - \lim_{t\to0^+} \frac{\ln t}{t^{-1}} \\
&= -1 - \lim_{t\to0^+} -t \\
&= -1
\end{aligned}$$

O integral impróprio é convergente. ∎

■ **Exemplo 8.6 — Integração de uma Função Não-Limitada.**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx &= \lim_{t \to (\pi/2)^-} \int_0^t \operatorname{tg} x \, dx \\
&= \lim_{t \to (\pi/2)^-} [\ln(\sec x)]_0^t \\
&= \lim_{t \to (\pi/2)^-} \ln(\sec t) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

O integral impróprio é divergente. ■

Definição 8.1.9 — Integração de uma Função Não-Limitada. Seja f contínua em $]a,b[$ mas não limitada. Diz-se que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
&= \lim_{t \to a^+} \int_t^c f(x)\,dx + \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx
\end{aligned}$$

é um integral impróprio.

■ **Exemplo 8.7 — Integração de uma Função Não-Limitada.**

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= 2\lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= 2\lim_{t \to 1^-} [\arcsin x]_0^t \\
&= 2\lim_{t \to 1^-} \arcsin t \\
&= \pi
\end{aligned}$$

O integral impróprio é convergente. ■

Definição 8.1.10 — Integração de uma Função Não-Limitada. Seja f uma função contínua em $[a,c[$ e em $]c,b]$, mas não limitada em cada um dos intervalos. Diz-se que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
&= \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{u \to c^+} \int_u^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

é um integral impróprio.

■ **Exemplo 8.8 — Integração de uma Função Não-Limitada.**

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\
&= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t (x-1)^{-2}\,dx + \lim_{u\to 1^+} \int_u^2 (x-1)^{-2}\,dx \\
&= \lim_{t\to 1^-} [-(x-1)^{-1}]_0^t + \lim_{u\to 1^+} [-(x-1)^{-1}]_u^2 \\
&= \lim_{t\to 1^-} \left(-1-\frac{1}{t-1}\right) + \lim_{u\to 1^+} \left(-1+\frac{1}{u-1}\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

O integral é divergente. ■

8.2 Exercícios Propostos

77. Justifique que os seguintes integrais são impróprios e calcule os seus valores para determinar a natureza:

(**a**) $\displaystyle\int_{1/e}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ (**b**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$ (**c**) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$

(**d**) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$ (**e**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (**f**) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

(**g**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos^2 x\,dx$ (**h**) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,dx$ (**i**) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1}\,dx$

78. Sendo p um parâmetro real positivo, mostre que:

(**a**) Se $p>1$ então $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente (**b**) Se $p\leq 1$ então $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ é divergente $(+\infty)$

(**c**) Se $p\geq 1$ então $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ é divergente $(+\infty)$ (**d**) Se $p<1$ então $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente

79. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Diz-se que f é uma densidade de probabilidade se é não-negativa e se satisfaz $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Para cada uma das seguintes funções, determine o parâmetro $k>0$ de modo a obter uma densidade de probabilidade:

(**a**) $f(x)=ke^{-|x|}$ (**b**) $f(x)=e^{-k|x|}$

(**c**) $f(x)=\dfrac{k}{1+x^2}$ (**d**) $f(x)=\dfrac{k}{1+e^x}$

IV

Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações

9. Vectores e Matrizes

10. Sistemas de Equações Lineares

11. Inversa de uma Matriz

12. Determinante de uma Matriz