

Determinantes e Aplicações

1

Últimas aulas:

(i) Discussão de Sistemas de Equações

(ii) Estudo da existência de matriz inversa

O que podemos concluir ^{ainda} da discussão de sistemas?

(A) Se $\boxed{AX = 0_{m \times 1}}$ representa um sistema homogêneo e A é uma matriz $m \times m$, então

$\hookrightarrow m < m \Rightarrow$ Sistema homogêneo é possível e indeterminado (porquê?)

(B) Se A é uma matriz $m \times m$ e x_1, x_2 duas soluções do sistema

$$\boxed{AX = b}$$

então

$\xrightarrow{\text{VSSF}}$ 2

(I)

$X_1 - X_2$ é solução do
Sistema homogêneo $AX = 0_{m \times 1}$

2

$$\left[\begin{array}{l} AX_1 = b \\ AX_2 = b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 \\ = b - b \\ = 0_{m \times 1} \end{array} \right]$$

II

$\alpha X_1 + \beta X_2$ Solução de
 $AX = b$

desde que $\alpha + \beta = 1$. (p.e. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$)

$$\left[\begin{array}{l} AX_1 = b \\ AX_2 = b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \\ = \alpha AX_1 + \beta AX_2 \\ = \alpha b + \beta b \\ = (\alpha + \beta) b \\ = b, \text{ se } \alpha + \beta = 1 \end{array} \right]$$

Obs: No caso de $m = n$ (Sistemas em que
nº equações = nº incógnitas)
tem-se ainda a seguinte caracterização:

Teorema: [MATRIZES SINGULARES] Seja A uma matriz $m \times m$ (ou matriz quadrada de ordem m) então as seguintes afirmações são equivalentes: (3)

(i) A é uma matriz singular
(i.e. A^{-1} não existe)

(ii) $C(A) < m$
[i.e. o sistema homogêneo é possível e indeterminado]

(iii) O sistema $AX = b$ admite
uma solução pelo menos dois
vetores coluna $X_1 \neq X_2$

(iv) O sistema homogêneo ~~admite~~

$$AX = 0_{m \times 1}$$

admite pelo menos uma solução
diferente do vetor coluna nulo.

Teorema :

[MATRIZES
INVERTÍVEIS]

Seja A uma matriz quadrada
 $n \times n$

(4)

então as seguintes afirmações são equivalentes :

(i) A é uma matriz invertível.

(ii) $C(A) = n$

[i.e. o sistema homogêneo é possível e determinado]

(iii) O sistema $\overline{AX = b}$ é possível e determinado.

[i.e. $C(A) = C(A|b)$]

(iv) $\overline{X = A^{-1}b}$ solução única do Sistema $AX = b$.

[i.e. $A(A^{-1}b) = (A^{-1}A)b = I_n b = b$]

Aula hoje :

Pág. (5) em diante

(I) Iremos introduzir a noção de determinante de uma matriz

(5)

(II) Iremos usar o cálculo de determinante para verificar se uma matriz quadrada:

$$\hookrightarrow [\text{É INVERTÍVEL} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0]$$

$$\hookrightarrow [\text{É SINGULAR} \Leftrightarrow \det(A) = 0]$$

(III) Iremos calcular a inversa de uma matriz A (caso exista) via a matriz adjunta.

(IV) Iremos aplicar o cálculo de determinantes à resolução de sistemas possíveis e determinados.
(também conhecidos por sistemas de Cramer)

Noção de determinante

$$A = [a] \quad (\text{matriz } 1 \times 1)$$

$$\det(A) = a.$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(matriz 2×2)

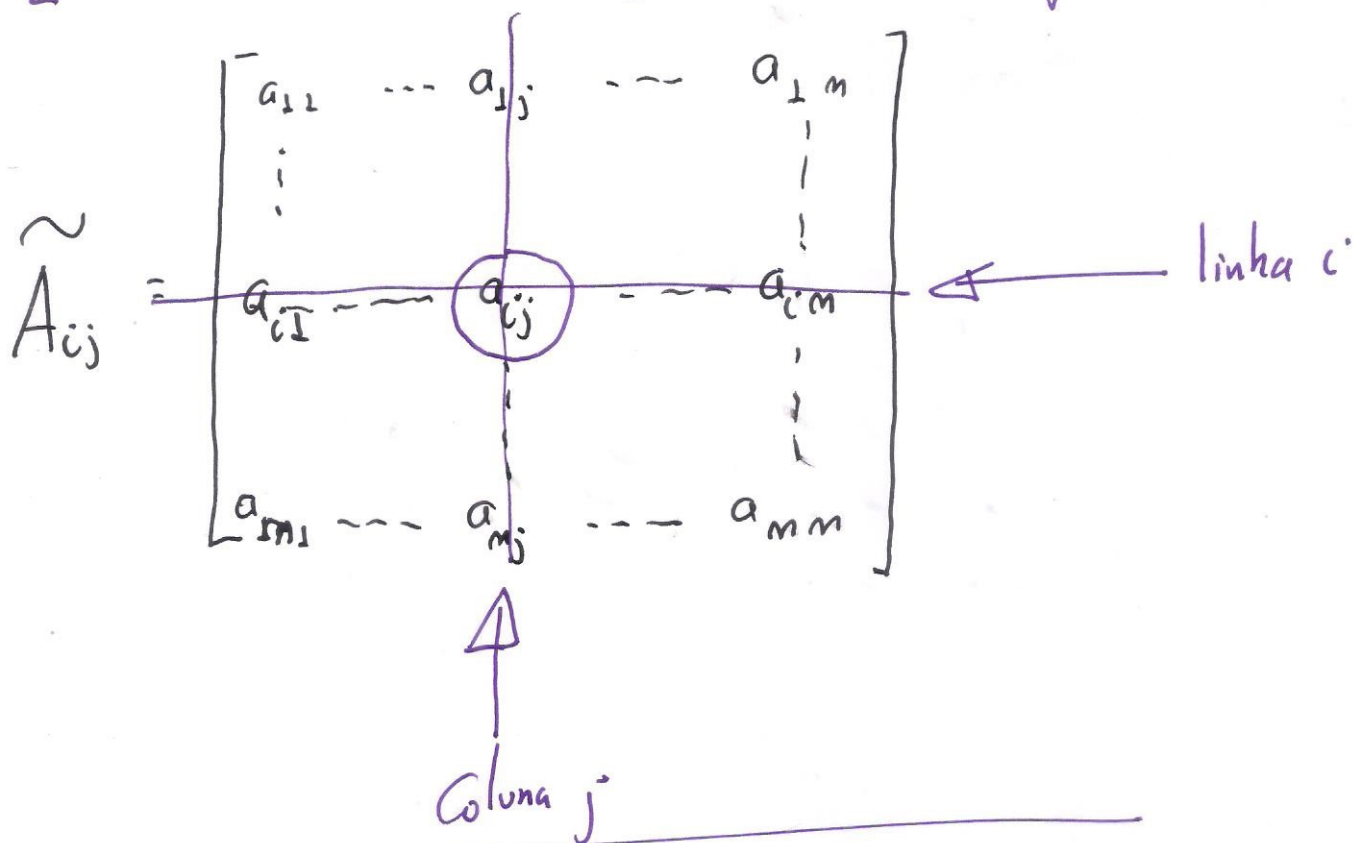
$$\det(A) = ad - bc$$

Continua p.

(6)

[Matrizes dos Cofactores] (Matriz $n \times n$ genérica)

(6)



$\tilde{A}_{ij} \rightarrow$ ~~Matriz~~ Submatriz de A ,
obtida por eliminação da
linha i e da Coluna j
de A

MATRIZ DOS COFACTORES (DEFINIÇÃO):

$$\text{Cof}(A) = \left[(-1)^{i+j} \tilde{a}_{ij} \right]_{n \times n}$$

onde $\left[\tilde{a}_{ij} = \det(\tilde{A}_{ij}) \right]$

Exemplo: (Matrizes 2×2)

(7)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{11} = [(-1)^{1+1} a_{22}]$$

$$\tilde{A}_{12} = [(-1)^{1+2} a_{21}]$$

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{21} = [(-1)^{2+1} a_{12}]$$

$$\tilde{A}_{22} = [(-1)^{2+2} a_{11}]$$

Observe que: ~~Toda~~ ^{matriz} $B = (\text{cof}(A))^T$

Satisfaz a igualdade

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Observações:

(8)

#1 Se $\det(A) \neq 0$ então a matriz A admite inversa e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Transposta da matriz dos cofactores.

#2 Se A é uma matriz ortogonal i.e. $A^{-1} = A^T$

Segue que $\det(A) = 1$ (ou) $\det(A) = -1$

Exercícios (para casa):

(#1) Para as matrizes

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

pág.

(a) Calcule $\det(P)$ e $\det(Q)$

(9)

(b) Verifique que P e Q são matrizes ortogonais.

(c) Calcule a matriz dos cofactores $\text{Cof}(P)$ e $\text{Cof}(Q)$

e compare com as matrizes

P e Q .

#2 Verifique se A é uma ^{matriz 2x2} invertível, então

$$B = \frac{1}{\sqrt{|\det(A)|}} A$$

satisfaz $\det(B) = 1$.

#3 Calcule a matriz dos cofactores de

$$C = \begin{bmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R})$$

e o determinante de C .

Diga, justificando, ~~se~~ se C admite inversa e se C é uma matriz ortogonal.

DETERMINANTE MATRIZ $m \times m$

(10)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Coluna j

Linha i

Cálculo segundo linha i :

$$\det(A) = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + \dots + a_{ij} \tilde{a}_{ij} + \dots + a_{im} \tilde{a}_{im}$$

COFACTOR LINHA i , coluna k : $\tilde{a}_{ik} = (-1)^{i+k} \det(\tilde{A}_{ik})$

Cálculo segundo Coluna j :

$$\det(A) = a_{1j} \tilde{a}_{1j} + \dots + a_{ij} \tilde{a}_{ij} + \dots + a_{mj} \tilde{a}_{mj}$$

COFACTOR LINHA p , Coluna j : $\tilde{a}_{pj} = (-1)^{p+j} \det(\tilde{A}_{pj})$

NOTAÇÃO: Iremos usar a notação $|A|$ para nos referirmos a $\det(A)$

(não confundir com módulo de número real)

Exemplo:

#1

desenvolvimento segundo linha 1

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 \underbrace{(-1)^{1+2}}_{=-1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \underbrace{(-1)^{1+3}}_{=-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \underbrace{(-1)^{1+3}}_{=-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 5) + 1 \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1))$$

$$= 3 \cdot (-16) + 6$$

$$\underbrace{= 3 \cdot 2}$$

$$= 3 \cdot (-14)$$

$$= -42$$

#2

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

desenvolvimento
Segunda coluna
2

(12)

$$= 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ 4 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 14 - 4 \cdot 14$$

$$= -3 \cdot 14$$

$$= -42$$

(mesmo valor que obtido na pág.)

(12)

Observação [CÁLCULO DE DETERMINANTES 3x3]

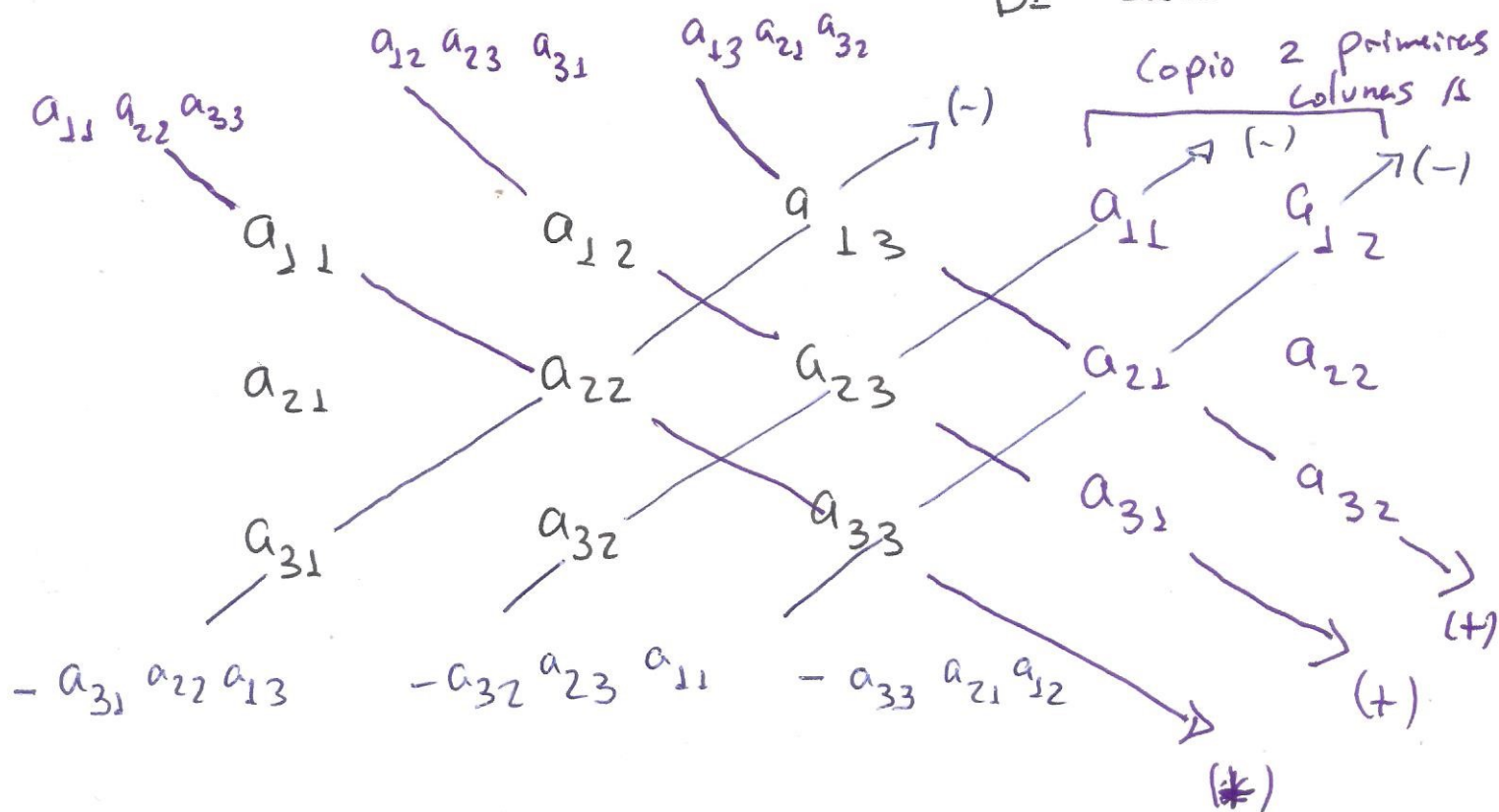
13

Se calcularmos o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{linha 1}$$

Segundo o desenvolvimento da linha 1, obtemos uma regra prática CONHECIDA POR REGRA

DE SARRUS



#3 [Via Regra de Sarrus]

24

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$-(1 \cdot 2 \cdot 1) = -2$
 $-4 \cdot 5 \cdot 3 = -60$
 $0 \rightarrow 0$
 $1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$
 $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$$= 12 + 0 + 4 + 2 - 60 - 0$$

$$= 12 + 6 - 60$$

$$= 18 - 60$$

$$= -42$$

Obs: (Regra de Sarrus)

↳ Permite-nos calcular de forma intuitiva determinantes 3×3 .

↳ Não é um método eficiente, pois envolve muitos cálculos auxiliares.

DESAFIO: Calcule, se conseguir, o determinante

de matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

usando a
regra de Sarrus.
(sem calculadora ...)

PROPRIEDADES DO DETERMINANTE:

(15)

↳ Se $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

então

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

↳ Se A é uma matriz triangular superior / inferior

então

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

[Produto dos elementos da diagonal principal]

Em particular:

$$\left[\begin{array}{l} \det(I_n) = 1 \\ \det(\lambda \underbrace{I_n}_\substack{= \text{matriz} \\ \text{escalar}}) = \lambda^n \end{array} \right]$$

Exemplo [matrizes triangulares]

(16)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Coluna 3
(com mais zeros)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

linha 3
(com mais zeros)

$$\det(L) = \left(\frac{1}{3}\right) (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

[igual a produto dos elementos da diagonal principal]

$$\det(U) = 3 (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = 6$$

[também coincide com o produto dos elementos de diagonal principal]

[Estratégia para cálculo de determinantes]

17

↳ escolher sempre linha ou coluna
Com maior número de zeros.

Exemplo (4x4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

linha 3

$$\det(A) = -3 (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

linha 3

$$= -3 \left(2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \right)$$

$= +1$
 $= -1$
 $= 2$
 9

~~$$= -3 (2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 9)$$~~

$$= -3 \cdot (-4 - 9)$$

$$= -3 \cdot (-13) = 39$$

Propriedades do Determinante (vs)

(18)

Escalonamento / Condensação

$$A \xrightarrow{L_{ij}} B$$

$$: \det(A) = -\det(B)$$

[Troca das linhas
i e j de A]

$$A \xrightarrow{L_i - \alpha L_j} B$$

$$: \det(A) = \det(B)$$

($\alpha \neq 0$)

["Some de Linhas"]

$$A \xrightarrow{1/\alpha L_i} B$$

$$\det(A) = \alpha \det(B)$$

[multiplicação linha
por $1/\alpha$ ($\alpha \neq 0$)]

Exemplo:

(19)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$\frac{1}{4}L_2$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & -6 \end{vmatrix}$$

$L_2 - 2L_1$
 $L_3 - 6L_1$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 27 \end{vmatrix}$$

$L_3 - 11L_2$

Triangular
Superior

$$= 4 \cdot 27$$

$$= 108$$

(20)

Thais properties:

$$\left[\begin{array}{l} (a) \quad \det(A) = \det(A^T) \\ (b) \quad \det(AB) = \det(A) \det(B) \end{array} \right]$$

Consequência (a) + (b) + $\det(I_n) = 1$

A matriz ortogonal:

$$\det(AA^T) = \det(I_n) = 1$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \det(AA^T) &= \det(A) \det(A^T) \\ &= \det(A)^2 \end{aligned}$$

Portanto ~~A~~ ortogonal

$$\Rightarrow [\det(A)]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = \pm 1 \quad (\text{ou}) \quad \det(A) = 1$$

(21)

Consequência (b) $\rightarrow \lambda A = (\lambda I_m) \cdot A$

$$\det(\lambda A) = \det((\lambda I_m) A) \\ = \det(\lambda I_m) \det(A)$$

$$\hookrightarrow \det(\lambda A) = \lambda^m \det(A)$$

Ao realizarmos o produto λ por A , estamos a multiplicar as m linhas de A por λ .

[DETERMINANTE DA MATRIZ INVERSA]

$$A^{-1} \text{ existe} \iff \det(A) \neq 0$$

$$A A^{-1} = I_m \Rightarrow \underbrace{\det(A) \det(A^{-1})}_{= \det(A A^{-1})} = \underbrace{1}_{= \det(I_m)}$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \det(A) \neq 0$$

$$E \text{ Se } A^T = -A, 0$$

(22)

que posso dizer sobre a invertibilidade de A ?

Primeiro : $\det(A^T) = \det(A)$

Segundo : $\det(-A) = \det(-I_m A)$
 $= \det(-I_m) \det(A)$
 $= (-1)^m \det(A)$

Segue então que $A^T = -A$

~~$A^T = -A$~~

$$\Rightarrow \det(A^T) = \det(-A)$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = (-1)^m \det(A)$$

m ímpar : $\det(A) = -\det(A)$

$$\Leftrightarrow 2 \det(A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = 0$$

Conclusão : Matriz Singular
para m ímpar.

CÁLCULO DA MATRIZ INVERVA

23

Via matriz adjunta.

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

$$\text{Cof}(A) = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n} \longrightarrow \text{matriz dos Cofactores}$$

$$\text{adj}(A) = [\text{Cof}(A)]^T \longrightarrow \text{Matriz adjunta de } A \text{ corresponde à transposta da matriz dos Cofactores.}$$

RESULTADO :

$$\left[A \text{ adj}(A) = \underbrace{\det(A) I_n}_{\text{Matriz escalar}} \right]$$

②

$$\left[\text{adj}(A) A = \underbrace{\det(A) I_n}_{\text{Matriz escalar}} \right]$$

Resultado(s): Se A é invertível
(ou não-singular)

(24)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

[fórmula para cálculo
da inversa com recurso
à adjunta]

$$\text{adj}(A) = \det(A) A^{-1}$$

[fórmula para cálculo da matriz adjunta,
supondo que conheço a inversa
de A]

Exemplo: (Determinante, adjunta e inversa de A)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \\ &= 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= -2\alpha \end{aligned}$$

Matriz invertível se $\alpha \neq 0$

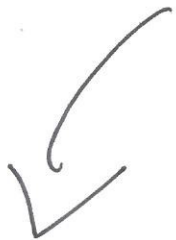
CONTINUA p. (25)

Suppose $\alpha \neq 0$

25

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2\alpha & 4 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$



$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & -\alpha & 1 \\ -2\alpha & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\alpha} \\ -1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Regra de Cramer:

(26)

$$\text{Seja } A = [A^{(1)} \dots A^{(j)} \dots A^{(m)}]$$

uma matriz invertível $[\det(A) \neq 0]$

então o sistema $AX = b$ é possível e determinado.

$$\text{Adicionalmente, se } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \text{ segue}$$

$$\text{que } x_j = \frac{\det[A^{(1)} \dots b \dots A^{(m)}]^{(*)}}{\det(A)}$$

$(*)$
 $[A^{(1)} \dots b \dots A^{(m)}]$ é a matriz
obtida a partir de A , substituindo
a j -ésima coluna $A^{(j)}$ de A pelo
vector coluna b .

Exemplo: (Fica Gmo exercício)

(27)

$$\text{Sistema} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{array} \right.$$

(.) Resolva o sistema via método de Gauss.

(..) Calcule o determinante da matriz A do sistema.

(...) Calcule a matriz A^{-1} via a matriz dos cofactores.

(::) Verifique que a solução obtida em (.)

coincide

com

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$; Y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$; Z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$