

[Inversão de Matrizes]

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ (ou de ordem n).

Dizemos que B é a inversa da matriz A , e escrevemos $B = A^{-1}$, quando a matriz B satisfaz as igualdades

$$AB = BA = I_n,$$

onde I_n é a matriz de ordem n .

$$[\text{i.e. } AA^{-1} = I_n \text{ e } A^{-1}A = I_n]$$

Exemplo (para verificar)

Verifique que $B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ é

a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Teorema:

Se uma matriz

$$A = [a_{ij}]_{m \times m}$$

admite inversa, então ela é única.

Demonstração:

Suponhamos que B e C são inversas da matriz A

Segue então da sequência de igualdades

$$AB = BA = I_m$$

(B inversa de A)

$$AC = CA = I_m$$

(C inversa de A)

que

$$B = B I_m$$

$$\leftarrow I_m$$

Justificações
passos
elemento
neutro multiplicação
matrizes

$$= B(AC)$$

$$= (BA)C$$

definição: C inversa
de A

$$= I_m C$$

associatividade

$$= C$$

$$\leftarrow I_m$$

Definição: B inversa
de A
elemento neutro
da multiplicação matrizes

Provamos assim que

$B = C$, ou seja que A^{-1} é única.

Propriedades da Inversa

(3)

(a) Se A é invertível, então A^{-1} também é.

$$\left[\text{Adicionalmente: } (A^{-1})^{-1} = A \right]$$

(b) Se A é invertível, então A^T também é.

$$\left[\text{Adicionalmente: } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \right]$$

(c) Se A e B são matrizes invertíveis, então AB também é invertível

$$\left[\text{Adicionalmente: } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \right]$$

O resultado abaixo, cuja demonstração iremos omitir por "falta de tempo" permite-nos fazer uso prático da Condensação / escalonamento de matrizes introduzido na última aula para determinar explicitamente A^{-1} . ④

Teorema: Seja A uma matriz $m \times m$.

Então as afirmações abaixo são equivalentes.

(a) Existe uma matriz B tal que
 $BA = I_m$

(b) A matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade

(c) A^{-1} existe (i.e. A admite inversa)

(a) $\Rightarrow$ (c) [Implicação]

⑤

$BA = I_m \Rightarrow$ a igualdade
 $AB = I_m$ também é
satisfeita.

Produto matriz - vetores coluna

✓ $\overset{\text{Produto}}{AB}$ pode ser escrito como

$$(\#) AB = [AB^{(1)} AB^{(2)} \dots AB^{(n)}],$$

onde $B^{(j)}$ — j -ésima Coluna matriz B

$AB^{(j)}$ — j -ésima Coluna matriz AB .

(b) $[\Rightarrow (c) \Rightarrow] (a)$

A resolução da equação $\overset{\text{matricial}}{AB = I_m}$
envolve a resolução de m sistemas de
equações independentes (resulta de $(\#)$)

$\Rightarrow$

$$\left[A \mid I_m \right] \xrightarrow{\text{operações elementares}} \left[I_m \mid A^{-1} \right]$$

Algoritmo de

Gauss - Jordan

[Extensão da resolução sistemas
na matriz ampliada]

[apenas]

sobre linhas

Exemplo ① Inversa da matriz

⑥

[Resolvido]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ L_3 + L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{5} & -4 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ -L_2 \\ \frac{1}{5}L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} C(A) = 3 \text{ já} \\ \text{me permite dizer} \\ \text{que } \exists \text{ } \vec{x} \text{ Existe} \end{array} \right]$$

→ Sistema possível e determinado

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ L_2 + 2L_3 \\ L_1 - L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

(Termine p. ⑦)

(7)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

I_3 A^{-1}

Portanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Exemplo (2)

[Resolvido]

Inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(caso exista)

→
(segue pag. (8))

(8)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Para?
 AQUE
 $\hookrightarrow [C(A) = 2 \times 3] \Rightarrow A^{-1}$ não existe.

O escalonamento de A permitiu-nos mostrar que a ~~sistema~~ equação matricial

$$AB = I_n$$

não admite solução única.

Obs: Quando A^{-1} não existe,
dizemos que A é uma matriz
Singular.

(9)

Teorema: ~~Seja~~ Seja A uma matriz $n \times n$.

(I) O sistema $AX = b$ é possível
e determinado se, e só se, A^{-1} existe.

Neste caso:

$$X = A^{-1}b$$

(II) O sistema homogêneo $AX = 0_{n \times 1}$
é possível e indeterminado se, e só se,
 A é uma matriz singular.

Obs: No caso de A^{-1} existir, segue que
 $X = 0_{n \times 1}$ é a única solução do sistema
homogêneo

$$AX = 0_{n \times 1}$$

10

Exemplo : (Solução de $AX=b$
via Cálculo A^{-1})

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix}$$

representa o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 2x + y + 4z = 2000 \\ 2x + 3y + 5z = 2500 \end{cases}$$

Verifique que :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

veja p. (6)

$$A^{-1} b \stackrel{(*)}{=} \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

passo
por $\frac{1}{5}$
em evidência.

Exercícios aula:

11

(1) Se A é uma matriz 3×3 e
 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ solução da Eq.

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O que posso concluir sobre A
(invertível ou singular?)

(2) Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$
para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

admite inversa.

(3) Se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

determine

(i) $(AB)^{-1}$

(ii) $(A^T)^{-1}$, $(B^T)^{-1}$ e $((AB)^T)^{-1}$.

12

(4) Seja B uma matriz invertível.

Então

$$AB^{-1} = B^{-1}A \Leftrightarrow AB = BA$$

DICA: [multiplique a equação
 $AB = BA$ por B^{-1}]

(5) [MATRIZES ORTOGONAIS : $A^T = A^{-1}$]

Verifique que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad e$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{são}$$

matrizes ortogonais.

Exercício 7, p. 78 Livro "Lições de Álgebra Linear".

(13)

a) Mostrar que

$$A^2 - 2A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Usar a equação anterior para determinar A^{-1} .

Exercício 8, p. 78 Livro "Lições de Álgebra Linear".

Supondo que $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $M^3 = O_{4 \times 4}$

a) Calcule $(I_4 - M)(I_4 + M + M^2)$

b) Verifique que $(I_4 - M)^{-1}$ existe e que

$$(I_4 - M)^{-1} = I_4 + M + M^2$$

(14)

Próximo Passo:

— Estudar existência (ou não) de A^{-1}
via Cálculo de determinantes

— Aplicar o Cálculo de determinantes

Para:

(a) Construir A^{-1} via Cálculo
da matriz adjunta;

(b) Usar o Cálculo de determinantes
para resolver sistemas possíveis e
determinados. (Regra de Cramer).