

MATRIZES E DETERMINANTES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

80. Considere os seguintes sistemas de duas equações a duas incógnitas:

$$(i) \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} 3y + 2x = 8 \\ x = 1 \end{cases}$$

(a) Verifique que os sistemas são equivalentes.

(b) Represente no plano XoY as duas rectas cujas equações estão indicadas em cada um dos sistemas.

81. Resolva os seguintes sistemas de duas equações a duas incógnitas pelo método de eliminação de Gauss:

$$(i) \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} -6x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} -6x + 3y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad (v) \begin{cases} -6x + 3y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad (vi) \begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

82. Resolva os seguintes sistemas de três equações a três incógnitas pelo método de eliminação de Gauss:

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 4x - y - z = 7 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 3x + 3y - z = 6 \\ x - y + z = -1 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \quad (v) \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ -3x + 2y + z = -7 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases} \quad (vi) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 1 \end{cases}$$

83. Classifique os seguintes sistemas para todos os valores reais do parâmetro k :

$$(i) \begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x + ky + z = 0 \\ kx + y + kz = 1 \\ x + ky = k \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (k^2 - 14)z = k + 2 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} x + ky + z = k \\ x - y + kz = 0 \\ x - ky + z = k \end{cases} \quad (v) \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 2 \\ x + ky + z = 3 \end{cases} \quad (vi) \begin{cases} -x + ky = -k \\ -ky + kz = 2 \\ x - kz = -1 \end{cases}$$

84. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz $C = 2(A + B) - AB$.

85. Calcule os produtos AB e BA , quando definidos, nos seguintes casos:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \quad A = [1 \quad 0 \quad -1] \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

86. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

87. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolha uma maneira de as ordenar, de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

88. Sendo α e β números reais, calcule o produto

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}.$$

89. Calcule:

$$(i) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2 \quad (ii) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3 \quad (iii) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^4 \quad (iv) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$$

90. Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores (resp. inferiores) da mesma ordem é ainda uma matriz triangular superior (resp. inferior). A que são iguais os elementos diagonais do produto neste caso?

91. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e as três matrizes de permutação $P_{i,j}$ com $i < j, j = 2, 3$. Calcule:

$$(i) P_{12}A \quad (ii) AP_{12} \quad (iii) P_{12}AP_{12} \\ (iv) P_{13}b \quad (v) P_{23}Ab \quad (vi) (P_{13}P_{23})^T AP_{13}P_{23}$$

92. Duas matrizes quadradas A e B dizem-se permutáveis se $AB = BA$.

(a) Mostre que:

- (i) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ se e só se A e B são permutáveis;
- (ii) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ se e só se A e B são permutáveis;
- (iii) $(AB)^2 = A^2B^2$ se e só se A e B são permutáveis.

(b) Verifique se as seguintes matrizes A e B são permutáveis:

$$(b.1) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (b.2) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

93. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ e D a matriz diagonal de ordem 3 dada por $D = \text{diag}(2, 1, -3)$.

- (a) Calcule o produto DA e descreva o efeito da multiplicação à esquerda de A por D .
- (b) Calcule o produto AD e descreva o efeito da multiplicação à direita de A por D .
- (c) Determine quais as matrizes diagonais que são permutáveis com A .

94. Calcule os determinantes das seguintes matrizes de segunda ordem:

$$(i) \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ii) \ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \quad (iii) \ C = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$$

95. Calcule os determinantes das seguintes matrizes de terceira ordem:

$$(i) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (ii) \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (iii) \ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

96. Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

$$(i) \ \det(A) \quad (ii) \ \det(3A) \quad (iii) \ \det(A^2)$$

97. Utilize as propriedades dos determinantes para concluir que:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

98. Calcule os determinantes das seguintes matrizes de quarta ordem:

$$(i) \ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ii) \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (iii) \ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

99. Sendo a, b e c parâmetros reais não-nulos, considere as seguintes matrizes elementares de ordem 3:

$$E_{21}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{31}(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{32}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule:

$$(i) \ E_{21}(a)E_{31}(b) \quad (ii) \ E_{31}(b)E_{21}(a) \quad (iii) \ E_{21}(a)E_{31}(b)E_{32}(c)$$

$$(iv) \ (E_{31}(b)E_{32}(c))^T \quad (v) \ E_{31}(b)^T E_{32}(c)^T \quad (vi) \ E_{31}(b)^T E_{21}(a)^T$$

(b) Mostre que:

$$(i) \ E_{21}(a)E_{21}(-a) = I_3 \quad (ii) \ E_{31}(-b)E_{31}(b) = I_3 \quad (iii) \ E_{32}(-c)E_{32}(c) = I_3$$

(c) Verifique que $E_{21}(-a)E_{31}(-b)$ é a inversa de $E_{21}(a)E_{31}(b)$.

(d) Calcule a inversa de $E_{21}(a)E_{31}(b)E_{32}(c)$.

100. Determine, se possível, as inversas das seguintes matrizes:

$$(i) \ A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (ii) \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (iii) \ C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (v) \ E = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (vi) \ F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

101. Determine os determinantes das inversas das matrizes dadas no exercício anterior.

102. Que mudança se dá em A^{-1} se em A :

- a) Trocamos as linhas i e j ?
- b) Multiplicamos a linha i por um número $\alpha \neq 0$?
- c) À linha i adicionamos a linha j multiplicada por um número $\alpha \neq 0$?

103. Sabendo que

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

determine as inversas das matrizes:

$$(i) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ii) \ B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad (iii) \ C = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

104. Mostre que se $ad - bc \neq 0$ então a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é não-singular e determine a sua inversa.

105. Dados os parâmetros reais a e b , mostre que a matriz $\begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$ tem inversa se e só se $a \neq 0 \wedge a \neq b$.

106. Considere os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(i) \ \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad (ii) \ \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$$

- (a) Escreva os sistemas na forma matricial $Ax = b$.
- (b) Estude a singularidade da matriz A do sistema.
- (c) Resolva os sistemas pela regra de Cramer.