

Iniciaremos o estudo de sistemas de equações lineares, referindo-nos à sua representação matricial.

Como iremos ver ao longo da aula de hoje, a abordagem matricial permite-nos simultaneamente

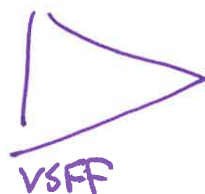
- (1) discutir a existência de soluções do sistema; (Discussão do Sistema)
- (2) resolver ^{sempre que possível} o sistema usando "substituição ascendente". (Resolução do Sistema)

Sistema equações na forma matricial

O sistema de m equações com n incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

pode ser escrito na forma matricial



(2)

$$[AX = b]$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{— matriz } m \times m$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{— vector coluna } m \times 1$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{— Vector Coluna } m \times 1$$

Matriz ampliada do Sistema

A matriz ampliada

$$[A | b]$$

Corresponde a uma representação da equação matricial

$$AX = b$$

Exemplo:

3

O sistema de equações de 2 equações
a 3 incógnitas

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

admita a representação matricial

$$(M) \left[\begin{array}{ccc|c} & x & y & z \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

Este sistema admite como conjunto solução

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = 1 - 3x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Em termos matriciais

vector coluna ~~$\vec{x}$~~ $\begin{bmatrix} \cancel{1} \\ 1 - 2x \\ 1 - 3x \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R})$

é uma solução da equação matricial (M)

A matriz ampliada do sistema
é dada por

(4)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Exercício: Escreva o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(i) Na forma matricial.

(ii) Como uma matriz ampliada do sistema.

Para resolvermos sistemas $\times$ de equações como os anteriores iremos realizar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema.

(para escalonar matriz ampliada do sistema)

São elas: (C_{ij}) Troca das colunas
 i e j

5

(L_{ij}) Troca das linhas i e j

(αL_i) Multiplicação da linha i
por escalar $\alpha \neq 0$.

$(L_i - \alpha L_j)$ Substituição da linha i pela
linha que dela se obtém,
subtraindo-lhe a linha j
multiplicada por escalar $\alpha \neq 0$

Exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 5 \\ x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases}$$

Na forma de matriz ampliada

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -6 & 7 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 8 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$



Matriz ampliada do Sistema após
escalonamento conduz-nos ao sistema
equivalente

6

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 = 7 \\ 8x_2 = -\frac{9}{2} \end{cases} \quad (x_1 = 7 + 6x_2)$$

Resolução ascendente :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{29}{8} \\ x_2 = -\frac{9}{16} \end{cases}$$

Resolução usando operações elementares

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 8 & -\frac{9}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{8}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 + 6L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{29}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 = \frac{29}{8} \\ 0x_1 + x_2 = -\frac{9}{16} \end{cases}$$

Matriz identidade

Para o exemplo da página 3

7

$$\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C_{12}} \begin{array}{c} y \quad x \quad z \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{C_{23}} \begin{array}{c} y \quad z \quad x \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Matriz identidade

Sistema equivalente

$$\begin{cases} 1y + 0z + 2x = 1 \\ 0y + 1z + 3x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1y + 0z = 1 - 2x \\ 0y + 1z = 1 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x \\ 1 - 3x \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x \\ 1 - 3x \end{bmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$ variável livre

Teorema (útil para discussão e resolução sistemas) ⑧

Dois sistemas equivalentes

$$AX = b \Leftrightarrow CX = d$$

possuem matrizes ampliadas equivalentes

i.e

$$[A | b] \rightarrow [C | d]$$

(após operações elementares).

Estratégia para resolução sistemas

Fazer operações elementares sobre a matriz ampliada do sistema $[A | b]$ como matriz em forma de escada

(“próxima” de ser uma matriz triangular superior)

Característica de uma
matriz M

Notação:

$$[C(M)]$$

(9)

Nº de linhas não nulas
da matriz escalonada.

Resumimos a resolução do sistema

$$AX = b$$

para representar
(forma matricial sistema equações)
lineares

na tabela abaixo

POSSÍVEL	DETERMINADO	$C(A) = C([A b]) = m$
	INDETERMINADO	$C(A) = C([A b]) < m$
IMPOSSÍVEL		$C(A) < C([A b])$

Obs:

O grau de indeterminação do
sistema POSSÍVEL E DETERMINADO é igual

a

nº de incógnitas
do sistema eq. lineares m — $C(A)$
característica da
matriz A

Sistemas Homogêneos Representados por (10)

$$AX = 0_{m \times 1}$$

onde $0_{m \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ vetor coluna nulo $m \times 1$.

Obs:

#1 Sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então

$$X = 0_{n \times 1} \rightarrow \text{vetor coluna nulo}$$

é solução sistema homogêneo.

(ou seja, um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução $\rightarrow$ a solução nula)

o sistema POSSÍVEL

#2 A conclusão acima segue ^{também} da relação

$$C(A) = C([A | 0_{m \times 1}])$$

(ou seja, apenas preciso escalonar a matriz A para resolver sistema homogêneo)

Exemplo (Distribuição da população segundo classes sociais)

(11)

Vamos supor que a população esteja dividida entre

ricos $\rightarrow$ índice 1

Classe média $\rightarrow$ índice 2

pobres $\rightarrow$ índice 3.

Matriz
transição
de probabilidades

$$T = [t_{ij}]_{3 \times 3}$$

$t_{ij} \rightarrow$ probabilidade de transitar
do estado i para
o estado j

$(i \neq j)$

$t_{ii} \rightarrow$ probabilidade de permanecer
no mesmo estado (diagonal
principal)

Seja $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$ o vector

12

Coluna associada à distribuição da população inicial, a solução do sistema homogêneo

$$T P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

permite-nos determinar qual a ~~população~~
~~inicial~~ distribuição inicial da população
permanece inalterada.

(i.e. não existe transição entre
indivíduos das diferentes
classes sociais).

Exemplo matriz $T = [t_{ij}]_{3 \times 3}$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Escalonamento da matriz T

13

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2L_1 \\ 2L_2 \\ 2L_3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Escalonamento Completo)

$$C(T) = 2 < 3$$

grau indeterminação : $1 = 3 - 2$

Sistema ^{homogêneo} equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 + \frac{1}{2} P_2 = 0 \\ \frac{1}{2} P_2 + P_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_1 = -\frac{1}{2} P_2 \\ P_3 = -\frac{1}{2} P_2 \\ P_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$C.S. \quad \{ [P_1, P_2, P_3]^T = \left[-\frac{1}{2} P_2, P_2, -\frac{1}{2} P_2 \right]^T : P_2 \in \mathbb{R} \}$$

Exercícios selecionados livro "Lições de Álgebra Linear"

Exercícios II. 2. 22 $\rightarrow$ 1, 3
[págs 118-121]

4c) 5a)
5g)
6

Extra :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha+1)x + 2y - w = 0 \\ x + y + z - w = 0 \\ 2x + (\alpha+2)y + 2z - w = 0 \end{array} \right.$$

$$2x + 2z = B$$

$\alpha, B = ?$

- (i) • possível e determinado
- (ii) • possível e indeterminado
- (iii) • impossível